笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，

应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。

再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，

掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！！】

求一阶微分方程的通解、特解

例1.试求微分方程 $y'=\frac{y\cdot(1-x)}{x}$ 的通解

$$y'=\frac{y\cdot(1-x)}{x}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cdot(1-x)}{x}$$
$$x\,dy=y\cdot(1-x)\,dx$$
$$\frac{1}{y}dy=\frac{1-x}{x}dx$$
$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1-x}{x}dx$$
$$\ln|y|+C_1=\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx$$
$$\ln|y|+C_1=\int\frac{1}{x}dx-\int 1\,dx$$
$$\ln|y|+C_1=\ln|x|+C_2-(x+C_3)$$
$$\ln|y|=\ln|x|-x+(C_2-C_3-C_1)$$
$$\ln|y|=\ln|x|-x+C_4$$
$$\ln|y|=\ln|x|+\ln e^{-x}+\ln e^{C_4}$$
$$\ln|y|=\ln\left(|x|\cdot e^{-x}\cdot e^{C_4}\right)$$
$$\ln|y|=\ln(|x|\cdot e^{-x}\cdot C_5)$$

$$|y|=|x|\cdot e^{-x}\cdot C_5$$
$$\therefore y=\pm C_5\cdot x\cdot e^{-x}$$
$$=C\cdot x\cdot e^{-x}$$

$\therefore$ 通解为 $y=C\cdot x\cdot e^{-x}$

例2.试求 $x\cdot y'+y=0$ 的通解，并求其满足 $y(1)=1$ 的特解

$$x\cdot y'+y=0$$
$$x\cdot y'=-y$$
$$y'=-\frac{y}{x}$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$
$$x\,dy=-y\,dx$$
$$\frac{1}{y}dy=-\frac{1}{x}dx$$
$$\int\frac{1}{y}dy=\int-\frac{1}{x}dx$$
$$\ln|y|+C_1=-\int\frac{1}{x}dx$$
$$\ln|y|+C_1=-(\ln|x|+C_2)$$
$$\ln|y|=-\ln|x|-C_2-C_1$$
$$\ln|y|=-\ln|x|+C_3$$
$$\ln|y|=C_3-\ln|x|$$
$$\ln|y|=\ln e^{C_3}-\ln|x|$$
$$\ln|y|=\ln\frac{e^{C_3}}{|x|}$$
$$\ln|y|=\ln\frac{C_4}{|x|}$$

$$|y|=\frac{C_4}{|x|}$$
$$\therefore y=\pm\frac{C_4}{x}$$

$=\frac{C}{x}$ 通解

$$\because y(1)=1$$
$$\therefore 1=\frac{C}{1}$$
$$C=1$$

$\therefore y=\frac{1}{x}$ 满足 $y(1)=1$ 的特解

例3.若连续函数 f(x) 满足 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln2$，则 f(x)= ______

$$f'(x)=\left[\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln2\right]'$$
$$=\left[\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt\right]'+(\ln2)'$$
$$=f\left(\frac{2x}{2}\right)\cdot(2x)'-f\left(\frac{0}{2}\right)\cdot0'+0$$
$$=2f(x)$$
$$f'(x)=2f(x)$$
$$y'=2y$$
$$\frac{dy}{dx}=2y$$
$$dy=2y\,dx$$
$$\frac{1}{2y}dy=dx$$
$$\int\frac{1}{2y}dy=\int dx$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{y}dy=\int1\,dx$$
$$\frac{1}{2}\ln|y|+C_1=x+C_2$$
$$\ln|y|=2x+2C_2-2C_1$$
$$\ln|y|=2x+C_3$$
$$\ln|y|=\ln e^{2x}+\ln e^{C_3}$$
$$\ln|y|=\ln\left(e^{2x}\cdot e^{C_3}\right)$$
$$\ln|y|=\ln(e^{2x}\cdot C_4)$$
$$|y|=C_4\cdot e^{2x}$$
$$\therefore y=\pm C_4\cdot e^{2x}$$
$$=C\cdot e^{2x}$$
$$f(0)=\int_0^{2\cdot0} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln2$$
$$=\int_0^{0} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln2$$
$$=0+\ln2$$
$$=\ln2$$
$\because f(0)=\ln2$

$\therefore\ \ln2=C\cdot e^{2\cdot0}$

$\therefore\ C=\ln2$

$\therefore$特解为 $y=\ln2\cdot e^{2x}$　即 $f(x)=\ln2\cdot e^{2x}$

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	做法	得到的式子
$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$	设 $u=\frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$变成u，$\frac{dy}{dx}$或y'变成$u+x\frac{du}{dx}$ 的新式子
$\frac{dy}{dx}=Q(x)-P(x)y$	$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx+C]$	
$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$，$c_1$和$c_2$不同时为0；$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$	设 $u=a_2x+b_2y$	$a_2x+b_2y+c_2$变成$u+c_2$，$a_1x+b_1y+c_1$变成$ku+c_1$ $\frac{dy}{dx}$或y'变成$\frac{\frac{du}{dx}-a_2}{b_2}$ 的新式子
$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$，$c_1$和$c_2$不同时为0；$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	由$\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0\\a_2h+b_2k+c_2=0\end{cases}$，解出 h 与 k 设 $X=x-h$，$Y=y-k$	$a_1x+b_1y+c_1$变成a_1X+b_1Y，$a_2x+b_2y+c_2$变成a_2X+b_2Y， $\frac{dy}{dx}$或y'变成$\frac{dY}{dX}$ 的新式子
$\frac{dy}{dx}=f(x,y)-\frac{y}{x}$	设 $u=xy$	y 变成$\frac{u}{x}$，$\frac{dy}{dx}$或y'变成$\frac{\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}}{x}$ 的新式子
$\frac{dy}{dx}=Q(x)y^n-P(x)y$	设 $u=y^{1-n}$	$\frac{du}{dx}=(1-n)Q(x)-(1-n)P(x)u$
$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$，且$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$		通解为$\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,dy=C$或$\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy=C$ (x_0，y_0可任选，一般选0，若选0会出现广义积分，则选1)
$\frac{dy}{dx}$中有 x,y 混合部分，或多次出现的复杂部分	设 u = 该部分	
$\frac{dy}{dx}$不属于任何一种情况	用 X 替换 y，用 Y 替换 x	新式子应该属于某种情况了

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	做法	得到的式子
$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$	设 $u=\frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$变成u，$\frac{dy}{dx}$或y'变成$u+x\frac{du}{dx}$ 的新式子
$\frac{dy}{dx}=Q(x)-P(x)y$	$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx+C]$	

数二、三仅背三条就行

$\frac{dy}{dx}$不属于任何一种情况	用 X 替换 y，用 Y 替换 x	新式子应该属于某种情况了

求一阶微分方程的通解，特解

例1. 求微分方程满足 $y'+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$ 的通解

$$y'+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$$
$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}$$
$$\frac{dy}{dx}=(\frac{y}{x})^2-\frac{y}{x}$$
设 $u=\frac{y}{x}$
$$u+x\frac{du}{dx}=u^2-u$$
$$x\frac{du}{dx}=u^2-2u$$
$$xdu=(u^2-2u)dx$$
$$\frac{1}{u^2-2u}du=\frac{1}{x}dx$$
$$\int\frac{1}{u^2-2u}du=\int\frac{1}{x}dx$$
$$\int\frac{1}{u(u-2)}du=\int\frac{1}{x}dx$$
$$\int\frac{1}{2}(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u})\,du=\int\frac{1}{x}dx$$
$$\frac{1}{2}(\int\frac{1}{u-2}\,du-\int\frac{1}{u}\,du)=\int\frac{1}{x}dx$$
$$\frac{1}{2}[(\ln|u-2|+C_1)-(\ln|u|+C_2)]=\ln|x|+C_3$$
$$(\ln|u-2|+C_1)-(\ln|u|+C_2)=2\ln|x|+2C_3$$
$$\ln|u-2|-\ln|u|=2\ln|x|+2C_3+C_2-C_1$$
$$\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=2\ln|x|+C_4$$
$$\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln|x|^2+\ln e^{C_4}$$
$$\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln x^2+\ln e^{C_4}$$
$$\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln(x^2\cdot e^{C_4})$$
$$\Rightarrow\left|\frac{u-2}{u}\right|=x^2\cdot e^{C_4}$$
$$\frac{u-2}{u}=\pm e^{C_4}\cdot x^2$$
$$\frac{u-2}{u}=Cx^2$$
$$\frac{\frac{y}{x}-2}{\frac{y}{x}}=Cx^2$$
$$\frac{y-2x}{y}=Cx^2$$
$$1-\frac{2x}{y}=Cx^2\Rightarrow y=\frac{2x}{1-Cx^2}$$

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$
做法	设 $u=\frac{y}{x}$
得到的式子	$\frac{y}{x}$ 变成u $\frac{dy}{dx}$ 或 y' 变成 $u+x\frac{du}{dx}$ 的新式子

例2. 求微分方程满足 $y'=\frac{y}{x}(\ln y-\ln x)$ 的通解

$y'=\frac{y}{x}(\ln y-\ln x)$

$y'=\frac{y}{x}\cdot\ln\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cdot\ln\frac{y}{x}$ $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$

设 $u=\frac{y}{x}$

则$u+x\frac{du}{dx}=u\cdot\ln u$

$x\frac{du}{dx}=u(\ln u-1)$

$\frac{1}{u(\ln u-1)}du=\frac{1}{x}dx$

$\int\frac{1}{u(\ln u-1)}du=\int\frac{1}{x}dx$

$\ln|\ln u-1|+C_1=\ln|x|+C_2$

$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+C_2-C_1$

$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+C_3$

$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln e^{C_3}$

$\ln|\ln u-1|=\ln(|x|\cdot e^{C_3})$

$|\ln u-1|=e^{C_3}\cdot|x|$

$\ln u-1=\pm e^{C_3}\cdot x$

$\ln u-1=Cx$

$\ln u=Cx+1$

$e^{\ln u}=e^{Cx+1}$

$u=e^{Cx+1}$

$\frac{y}{x}=e^{Cx+1}$

$y=x\cdot e^{Cx+1}$

$\int\frac{1}{u(\ln u-1)}du$

设 U=lnu

$du=\frac{1}{U'}dU$

$=\frac{1}{(\ln u)'}dU$

$=\frac{1}{\frac{1}{u}}dU$

$=udU$

$\int\frac{1}{u(\ln u-1)}du=\int\frac{1}{u(\ln u-1)}u\,dU$

$=\int\frac{1}{\ln u-1}dU$

$=\int\frac{1}{U-1}dU$

$=\ln|U-1|+C_1$

$=\ln|\ln u-1|+C_1$

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$
做法	设 $u=\frac{y}{x}$
得到的式子	$\frac{y}{x}$变成u $\frac{dy}{dx}$或y'变成$u+x\frac{du}{dx}$ 的新式子

例3. 求微分方程$y'+y=x$的通解

$y'+y=x$

$\frac{dy}{dx}+y=x$

$\frac{dy}{dx}=x-y$

$\frac{dy}{dx}=x-1\cdot y$

$Q(x)=x$，$P(x)=1$

$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$

$=e^{-\int 1dx}(\int xe^{\int 1dx}dx+C)$

$=e^{-x}(\int xe^{x}dx+C)$

$=e^{-x}(\int x\cdot(e^{x})'dx+C)$

$=e^{-x}(xe^{x}-\int e^{x}\cdot x'dx+C)$

$=e^{-x}(xe^{x}-\int e^{x}dx+C)$

$=e^{-x}(xe^{x}-e^{x}+C)$

$=e^{-x}\cdot xe^{x}-e^{-x}\cdot e^{x}+C\cdot e^{-x}$

$=x-1+Ce^{-x}$

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	$\frac{dy}{dx}=Q(x)-P(x)y$
做法	$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$
得到的式子	

例4. 求微分方程$y'+y\tan x=\cos x$的通解

$y'+y\tan x=\cos x$

$\frac{dy}{dx}+y\tan x=\cos x$

$\frac{dy}{dx}=\cos x-y\tan x$

$\frac{dy}{dx}=\cos x-\tan x\cdot y$

$Q(x)=\cos x$，$P(x)=\tan x$

$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$

$=e^{-\int \tan xdx}(\int \cos xe^{\int \tan xdx}dx+C)$　　$(-\ln|\cos x|)'=\tan x$

$=e^{-(-\ln|\cos x|)}(\int \cos xe^{-\ln|\cos x|}dx+C)$

$=|\cos x|(\int \cos x\frac{1}{|\cos x|}dx+C)$

当$|\cos x|=\cos x$时

原式$=\cos x(\int \cos x\frac{1}{\cos x}dx+C)$

$=\cos x(\int 1dx+C)$

$=\cos x(x+C)$

当$|\cos x|=-\cos x$时

原式$=-\cos x(\int \cos x\frac{1}{-\cos x}dx+C)$

$=-\cos x(\int -1dx+C)$

$=-\cos x(-x+C)$

$=\cos x(x-C)$　$=\cos x(x+C)$

$\therefore y=\cos x(x+C)$

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	$\frac{dy}{dx}=Q(x)-P(x)y$
做法	$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$
得到的式子	

例5. 求微分方程$y'=\frac{1}{\cos y-x\tan y}$的通解

$y'=\frac{1}{\cos y-x\tan y}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y-x\tan y}$

用 X 替换 y，用 Y 替换 x

$\frac{dX}{dY}=\frac{1}{\cos X-Y\tan X}$

$\frac{dY}{dX}=\cos X-Y\tan X$

$Y=\cos X\cdot(X+C)$

$x=\cos y\cdot(y+C)$

$\frac{dy}{dx}=\cos x-\tan x\cdot y$

$y=\cos x(x+C)$

(例4过程中的)

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	$\frac{dy}{dx}$不属于任何一种情况
做法	用 X 替换 y，用 Y 替换 x
得到的式子	新式子应该属于某种情况了

$\frac{dy}{dx}$ 的结果		做法	得到的式子
$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$		设 $u=\frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$变成u，$\frac{dy}{dx}$或y'变成$u+x\frac{du}{dx}$ 的新式子
$\frac{dy}{dx}=Q(x)-P(x)y$		$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx+C]$	
$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$，$c_1$和$c_2$不同时为0	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$	设 $u=a_2x+b_2y$	$a_2x+b_2y+c_2$变成$u+c_2$，$a_1x+b_1y+c_1$变成$ku+c_1$ $\frac{dy}{dx}$或y'变成$\frac{\frac{du}{dx}-a_2}{b_2}$ 的新式子
	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	由$\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0\\a_2h+b_2k+c_2=0\end{cases}$，解出 h 与 k 设 $X=x-h$，$Y=y-k$	$a_1x+b_1y+c_1$变成a_1X+b_1Y ，$a_2x+b_2y+c_2$变成 a_2X+b_2Y， $\frac{dy}{dx}$或y'变成$\frac{dY}{dX}$ 的新式子
$\frac{dy}{dx}=f(x,y)-\frac{y}{x}$		设 $u=xy$	y 变成$\frac{u}{x}$，$\frac{dy}{dx}$或y'变成$\frac{\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}}{x}$ 的新式子
$\frac{dy}{dx}=Q(x)y^n-P(x)y$		设 $u=y^{1-n}$	$\frac{du}{dx}=(1-n)Q(x)-(1-n)P(x)u$
$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$，且 $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$			通解为$\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,dy=C$或$\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy=C$ (x_0，y_0可任选，一般选0，若选0会出现广义积分，则选1)
$\frac{dy}{dx}$中有 x, y 混合部分，或多次出现的复杂部分		设 u = 该部分	
$\frac{dy}{dx}$不属于任何一种情况		用 X 替换 y，用 Y 替换 x	新式子应该属于某种情况了

求一阶微分方程的通解、特解

例1.求微分方程 (x+y) dx+(3x+3y−4) dy=0 的通解

$$(x+y)\,dx+(3x+3y-4)\,dy=0$$

$$(3x+3y-4)\,dy=-(x+y)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x-y}{3x+3y-4}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1\cdot x+(-1)\cdot y+0}{3\cdot x+3\cdot y-4}$$

$a_1=-1$，$b_1=-1$，$c_1=0$
$a_2=3$，$b_2=3$，$c_2=-4$

$\because \frac{-1}{3}=\frac{-1}{3}=k$

$\therefore$ 设 $u=3x+3y$

$$\frac{\frac{du}{dx}-3}{3}=\frac{-\frac{1}{3}u+0}{u-4}$$

$$\frac{du}{dx}-3=\frac{-u}{u-4}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{-u+3(u-4)}{u-4}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{2u-12}{u-4}$$

$$(u-4)\,du=(2u-12)\,dx$$

$$\frac{u-4}{2u-12}\,du=dx$$

$$\int\frac{u-4}{2u-12}\,du=\int dx$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{u-4}{u-6}\,du=\int 1\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{u-6+2}{u-6}\,du=\int 1\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{2}{u-6}\right)du=\int 1\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\int 1du+\int\frac{2}{u-6}du\right)=\int 1\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\int 1du+2\int\frac{1}{u-6}du\right)=\int 1\,dx$$

$$\frac{1}{2}[(u+C_1)+2(\ln|u-6|+C_2)]=x+C_3$$

$$u+2\ln|u-6|=2x+2C_3-C_1-2C_2$$

$$u+2\ln|u-6|=2x+C_4$$

$$3x+3y+2\ln|3x+3y-6|=2x+C_4$$

$$x+3y+2\ln|3x+3y-6|=C$$

$\frac{dy}{dx}$的结果	$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$， c_1和c_2不同时为0	
	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$
做法	设 $u=a_2x+b_2y$	由$\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0\\a_2h+b_2k+c_2=0\end{cases}$， 解出 h 与 k 设 $X=x-h$， $Y=y-k$
得到的式子	$a_2x+b_2y+c_2$变成$u+c_2$， $a_1x+b_1y+c_1$变成$ku+c_1$， $\frac{dy}{dx}$或y'变成$\frac{\frac{du}{dx}-a_2}{b_2}$的新式子	$a_1x+b_1y+c_1$变成a_1X+b_1Y， $a_2x+b_2y+c_2$变成a_2X+b_2Y， $\frac{dy}{dx}$或y'变成$\frac{dY}{dX}$的新式子

例2.求微分方程 $(2x+y-4)\,dx+(x+y-1)\,dy=0$ 的通解

$$(2x+y-4)\,dx+(x+y-1)\,dy=0$$

$$(x+y-1)\,dy=-(2x+y-4)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y+4}{x+y-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\cdot x+(-1)\cdot y+4}{1\cdot x+1\cdot y-1}$$

$a_1=-2$，$b_1=-1$，$c_1=4$
$a_2=1$，$b_2=1$，$c_2=-1$

$$\frac{-2}{1}\neq\frac{-1}{1}$$

$$\begin{cases}-2\cdot h+(-1)\cdot k+4=0\\ 1\cdot h+1\cdot k+(-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=3\\ k=-2\end{cases}$$

设 $X=x-3$，$Y=y+2$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{-2\cdot X+(-1)\cdot Y}{1\cdot X+1\cdot Y}$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{-2X-Y}{X+Y}$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{-2-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$$

设 $u=\frac{Y}{X}$

$$u+X\frac{du}{dX}=\frac{-2-u}{1+u}$$

$$X\frac{du}{dX}=\frac{-2-u}{1+u}-u$$

$$X\frac{du}{dX}=\frac{-2-u-u(1+u)}{1+u}$$

$$X\frac{du}{dX}=-\frac{u^2+2u+2}{1+u}$$

$$X\,du=-\frac{u^2+2u+2}{1+u}\,dX$$

$$-\frac{1+u}{u^2+2u+2}\,du=\frac{1}{X}\,dX$$

$$\int-\frac{1+u}{u^2+2u+2}\,du=\int\frac{1}{X}\,dX$$

$$-\int\frac{1}{u^2+2u+2}\cdot(u+1)\,du=\int\frac{1}{X}\,dX$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2+2u+2}\cdot(2u+2)\,du=\int\frac{1}{X}\,dX$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2+2u+2}\cdot(u^2+2u+2)'du=\int\frac{1}{X}\,dX$$

$$-\frac{1}{2}[\ln(u^2+2u+2)+C_1]=\ln|X|+C_2$$

$$\ln(u^2+2u+2)+C_1=-2\ln|X|-2C_2$$

$$\ln(u^2+2u+2)=\ln|X|^{-2}+C_3$$

$$\ln(u^2+2u+2)=\ln\frac{1}{|X|^2}+\ln e^{C_3}$$

$$\ln(u^2+2u+2)=\ln\left(\frac{1}{X^2}\cdot e^{C_3}\right)$$

$$u^2+2u+2=\frac{1}{X^2}\cdot e^{C_3}$$

$$u^2+2u+2=\frac{1}{X^2}\cdot C$$

$$X^2\cdot(u^2+2u+2)=C$$

$$X^2\cdot\left[\left(\frac{Y}{X}\right)^2+2\cdot\frac{Y}{X}+2\right]=C$$

$$Y^2+2XY+2X^2=C$$

$$(y+2)^2+2(x-3)(y+2)+2(x-3)^2=C$$

$$2x^2+y^2+2xy-8x-2y=C$$

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$， c_1和c_2不同时为0	
	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$
做法	设 $u=a_2x+b_2y$	由 $\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0\\ a_2h+b_2k+c_2=0\end{cases}$， 解出 h 与 k 设 $X=x-h$， $Y=y-k$
得到的式子	$a_2x+b_2y+c_2$变成$u+c_2$， $a_1x+b_1y+c_1$变成$ku+c_1$， $\frac{dy}{dx}$或y'变成$\frac{\frac{du}{dx}-a_2}{b_2}$的新式子	$a_1x+b_1y+c_1$变成a_1X+b_1Y， $a_2x+b_2y+c_2$变成 a_2X+b_2Y， $\frac{dy}{dx}$或y'变成$\frac{dY}{dX}$的新式子

$\frac{dY}{dX}$ 的结果	$\frac{dY}{dX}=f(\frac{Y}{X})$
做法	设 $u=\frac{Y}{X}$
得到的式子	$\frac{Y}{X}$ 变成 u $\frac{dY}{dX}$或 Y'变成 $u+X\frac{du}{dX}$的新式子

例3.解微分方程 $x\cdot y'+y=x\cdot e^x$

$x\cdot y'+y=x\cdot e^x$

$x\cdot y'=x\cdot e^x-y$

$y'=e^x-\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx}=e^x-\frac{y}{x}$

设 $u=x\cdot y$

$\frac{\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}}{x}=e^x-\frac{\frac{u}{x}}{x}$

$\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=x\cdot e^x-\frac{u}{x}$

$\frac{du}{dx}=x\cdot e^x$

$du=x\cdot e^x\,dx$

$\int du=\int x\cdot e^x\,dx$

$\int 1\,du=\int x\cdot(e^x)'\,dx$

$u+C_1=x\cdot e^x-\int x'\cdot e^x\,dx$

$u+C_1=x\cdot e^x-\int e^x\,dx$

$u+C_1=x\cdot e^x-(e^x+C_2)$

$u=x\cdot e^x-e^x-C_2-C_1$

$u=x\cdot e^x-e^x+C$

$x\cdot y=x\cdot e^x-e^x+C$

$y=e^x-\frac{e^x}{x}+\frac{C}{x}$

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	$\frac{dy}{dx}=f(x,y)-\frac{y}{x}$
做法	设 $u=xy$
得到的式子	y 变成 $\frac{u}{x}$， $\frac{dy}{dx}$ 或 y' 变成 $\frac{\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}}{x}$ 的新式子

例4.求微分方程 $y'=-\frac{1}{3}x\cdot y^4+\frac{1}{3}y$ 的通解

$y'=-\frac{1}{3}x\cdot y^4+\frac{1}{3}y$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}x\cdot y^4+\frac{1}{3}y$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}x\cdot y^4-\left(-\frac{1}{3}\right)y$ $Q(x)=-\frac{1}{3}x$，$P(x)=-\frac{1}{3}$，$n=4$

设 $u=y^{1-4}=y^{-3}$

$\frac{du}{dx}=(1-4)\cdot\left(-\frac{1}{3}x\right)-(1-4)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot u$

$\frac{du}{dx}=(-3)\cdot\left(-\frac{1}{3}x\right)-(-3)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot u$

$\frac{du}{dx}=x-u$

$u= x-1+Ce^{-x}$

$y^{-3}= x-1+Ce^{-x}$

$\frac{1}{y^3}= x-1+Ce^{-x}$

$y^3=\frac{1}{x-1+Ce^{-x}}$

例3. 求微分方程 $y'+y=x$ 的通解

$y'+y=x$

$\frac{dy}{dx}+y=x$

$\frac{dy}{dx}=x-y$

$\frac{dy}{dx}=x-1\cdot y$

$Q(x)=x$，$P(x)=1$

$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx+C]$

$=e^{-\int 1dx}(\int xe^{\int 1dx}\,dx+C)$

$=e^{-x}(\int xe^{x}dx+C)$

$=e^{-x}(\int x\cdot(e^{x})'dx+C)$

$=e^{-x}(xe^{x}-\int e^{x}\cdot x'\,dx+C)$

$=e^{-x}(xe^{x}-\int e^{x}dx+C)$

$=e^{-x}(xe^{x}-e^{x}+C)$

$= e^{-x}\cdot xe^{x}-e^{-x}\cdot e^{x}+C\cdot e^{-x}$

$= x-1+Ce^{-x}$

$\frac{dy}{dx}=x-y$

$y= x-1+Ce^{-x}$

$\frac{du}{dx}=x-u$

$u= x-1+Ce^{-x}$

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	$\frac{dy}{dx}=Q(x)y^n-P(x)y$
做法	设 $u=y^{1-n}$
得到的式子	$\frac{du}{dx}=(1-n)Q(x)-(1-n)P(x)\cdot u$

例5.解微分方程 $(5x^4+3xy^2-y^3)\,dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,dy=0$

$$(5x^4+3xy^2-y^3)\,dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,dy=0$$

$$(3x^2y-3xy^2+y^2)\,dy=-(5x^4+3xy^2-y^3)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{5x^4+3xy^2-y^3}{3x^2y-3xy^2+y^2} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}}$$

$P(x,y)=5x^4+3xy^2-y^3$ $\qquad$ $P(x,y_0)=5x^4+3xy_0{}^2-y_0{}^3$

$Q(x,y)=3x^2y-3xy^2+y^2$ $\qquad$ $Q(x_0,y)=3x_0{}^2y-3x_0y^2+y^2$

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=6xy-3y^2$

$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=6xy-3y^2$

$\therefore \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

解法1：

$\therefore$ 通解为 $\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,dy=C$

$$\int_{x_0}^{x}(5x^4+3xy_0{}^2-y_0{}^3)\,dx+\int_{y_0}^{y}(3x^2y-3xy^2+y^2)\,dy=C$$

$$\int_{0}^{x}(5x^4+3x\cdot 0^2-0^3)\,dx+\int_{0}^{y}(3x^2y-3xy^2+y^2)\,dy=C$$

$$\int_{0}^{x}5x^4\,dx+\int_{0}^{y}(3x^2y-3xy^2+y^2)\,dy=C$$

$$x^5\Big|_0^x+\left(\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^y=C$$

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

解法2：

$\therefore$ 通解为 $\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy=C$

$$\int_{x_0}^{x}(5x^4+3xy^2-y^3)\,dx+\int_{y_0}^{y}(3x_0{}^2y-3x_0y^2+y^2)\,dy=C$$

$$\int_{0}^{x}(5x^4+3xy^2-y^3)\,dx+\int_{0}^{y}(3\cdot 0^2\cdot y-3\cdot 0\cdot y^2+y^2)\,dy=C$$

$$\int_{0}^{x}(5x^4+3xy^2-y^3)\,dx+\int_{0}^{y}y^2\,dy=C$$

$$\left(x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3\right)\Big|_0^x+\frac{1}{3}y^3\Big|_0^y=C$$

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$， 且 $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$
得到的式子	通解为： $\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,dy=C$ 或 $\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy=C$ (x_0，y_0可任选，一般选 0， 若选0会出现广义积分，则选1)

例6.解微分方程 $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$，且 $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$
得到的式子	通解为：$\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,dy=C$ 或 $\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy=C$ (x_0，y_0可任选，一般选 0，若选0会出现广义积分，则选1)

$\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

$\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=-\frac{2x}{y^3}dx$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{2x}{y^3}}{\frac{y^2-3x^2}{y^4}}$ 　　$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

$P(x,y)=\frac{2x}{y^3}$ 　　$P(x,y_0)=\frac{2x}{{y_0}^3}$

$Q(x,y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4}$

$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}$

$\therefore \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

$\therefore$ 通解为 $\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,dy=C$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{2x}{{y_0}^3}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=C$$

$$\int_{0}^{x}\frac{2x}{1^3}dx+\int_{1}^{y}\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=C$$

$$\int_{0}^{x}2x\,dx+\int_{1}^{y}\frac{y^2}{y^4}dy-\int_{1}^{y}\frac{3x^2}{y^4}dy=C$$

$$\int_{0}^{x}2x\,dx+\int_{1}^{y}\frac{1}{y^2}dy-\int_{1}^{y}\frac{3x^2}{y^4}dy=C$$

$$x^2\Big|_0^x+\left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_1^y-\left(-\frac{x^2}{y^3}\right)\Big|_1^y=C$$

$$x^2-0^2+\left[\left(-\frac{1}{y}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)\right]-\left[\left(-\frac{x^2}{y^3}\right)-\left(-\frac{x^2}{1^3}\right)\right]=C$$

$$x^2-\frac{1}{y}+1+\frac{x^2}{y^3}-x^2=C$$

$$-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}+1=C$$

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	$\frac{dy}{dx}$ 中有 x,y 混合部分，或多次出现的复杂部分
做 法	设 u = 该部分

例7.试求 $y'=\cos(x+y)$ 的通解

$y'=\cos(x+y)$

$\frac{dy}{dx}=\cos(x+y)$

设 $u=x+y$

$y=u-x$

$\frac{dy}{dx}=\frac{d(u-x)}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{du-dx}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-\frac{dx}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$

$\frac{du}{dx}-1=\cos(x+y)$

$\frac{du}{dx}-1=\cos u$

$\frac{du}{dx}=\cos u+1$

$du=(\cos u+1)\,dx$

$\frac{1}{\cos u+1}du=dx$

$\int\frac{1}{\cos u+1}du=\int dx$

$\tan\frac{u}{2}+C_1=x+C_2$

$\tan\frac{u}{2}=x+C_2-C_1$

$\tan\frac{u}{2}=x+C$

$\tan\frac{x+y}{2}=x+C$

设 $\tan\frac{u}{2}=t$，则 $\cos u=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$du=\frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int\frac{1}{\cos u+1}du=\int\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{1+t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int\frac{1}{\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int\frac{1}{\frac{2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int 1\,dt$$

$$=t+C_1$$

$$=\tan\frac{u}{2}+C_1$$

例8.试求 $y'\cdot(\tan^2 y+1)+\frac{x}{1+x^2}\cdot\tan y=x$

$$y'\cdot(\tan^2 y+1)+\frac{x}{1+x^2}\cdot\tan y=x$$

$$y'\cdot(\tan^2 y+1)=x-\frac{x}{1+x^2}\cdot\tan y$$

$$y'=\frac{x-\frac{x}{1+x^2}\cdot\tan y}{1+\tan^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-\frac{x}{1+x^2}\cdot\tan y}{1+\tan^2 y}$$

设 $u=\tan y$

$y=\arctan u$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\arctan u)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{x-\frac{x}{1+x^2}\cdot\tan y}{1+\tan^2 y}$$

$$\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{x-\frac{x}{1+x^2}\cdot u}{1+u^2}$$

$$\frac{du}{dx}=x-\frac{x}{1+x^2}\cdot u$$

$Q(x)=x$，$P(x)=\frac{x}{1+x^2}$

$$\therefore u=e^{-\int\frac{x}{1+x^2}dx}[\int x\cdot e^{\int\frac{x}{1+x^2}dx}dx+C]$$

$$=e^{-\int\frac{1}{1+x^2}\cdot x\,dx}[\int x\cdot e^{\int\frac{1}{1+x^2}\cdot xdx}dx+C]$$

$$=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\,dx}[\int x\cdot e^{\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\,dx}dx+C]$$

$$=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'dx}[\int x\cdot e^{\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'dx}dx+C]$$

$$=e^{-\frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]}[\int x\cdot e^{\frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]}dx+C]$$

$$=e^{\ln(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}[\int x\cdot e^{\ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx+C]$$

$$=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot[\int x\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx+C]$$

$$=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot[\frac{1}{2}\int 2x\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx+C]$$

$$=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot[\frac{1}{2}\int(1+x^2)'\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx+C]$$

$$=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot[\frac{1}{3}\int\frac{3}{2}(1+x^2)'\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx+C]$$

$$=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot[\frac{1}{3}\int\frac{3}{2}\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+x^2)'dx+C]$$

$$=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C\right]$$

$$=\frac{1+x^2}{3}+\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\therefore u=\frac{1+x^2}{3}+\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

即 $\tan y=\frac{1+x^2}{3}+\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	$\frac{dy}{dx}$ 中有 x,y 混合部分，或多次出现的复杂部分
做 法	设 $u=$ 该部分

$\frac{dy}{dx}$ 的结果	$\frac{dy}{dx}=Q(x)-P(x)y$
做 法	$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$

求常系数齐次线性微分方程的通解，特解

特征方程的根	解
单实根 α	$C\cdot e^{\alpha x}$
k重实根 α	$e^{\alpha x}\cdot\left(C_1+C_2x+\ldots+C_kx^{k-1}\right)$
一对复根 $\alpha\pm\beta i$	$e^{\alpha x}\cdot(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
一对 k 重复根 $\alpha\pm\beta i$	$e^{\alpha x}\cdot[\left(C_1+C_2x+\ldots+C_kx^{k-1}\right)\cos\beta x+\left(D_1+D_2x+\ldots+D_kx^{k-1}\right)\sin\beta x]$

例1：求 $y''-5y'+6y=0$ 的通解

② $r^2-5r+6=0$

$\Rightarrow (r-2)(r-3)=0$

解得：$r_1=2$，$r_2=3$

③ 单实根 $\alpha_1=2$，$\alpha_2=3$

解：$C_1\cdot e^{2x}$　$C_2\cdot e^{3x}$

④ 通解为：$y=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}$

例2：求 $y''-4y'+4y=0$ 的通解

② $r^2-4r+4=0$

$\Rightarrow (r-2)(r-2)=0$

解得：$r_1=r_2=2$

③ 二重实根 $\alpha=2$

解：$e^{2x}\cdot(C_1+C_2x)$

④ 通解为：$y=e^{2x}\cdot(C_1+C_2x)$

例3：求 $y''+4y=0$ 的通解

② $r^2+4=0$

$\Rightarrow (r+2i)(r-2i)=0$

解得：$r_1=0-2i$，$r_2=0+2i$

③ 一对复根 $0\pm2i$

解：$C_1\cos2x+C_2\sin2x$

④ 通解为：$y=C_1\cos2x+C_2\sin2x$

例4：求 $y^{(4)}+8y''+16y=0$ 的通解

② $r^4+8r^2+16=0$

$\Rightarrow (r^2+4)(r^2+4)=0$

$\Rightarrow (r+2i)(r-2i)(r+2i)(r-2i)=0$

解得：$r_1=r_3=0-2i$，$r_2=r_4=0+2i$

③ 一对二重复根 $0\pm2i$

解：$(C_1+C_2x)\cos2x+(D_1+D_2x)\sin2x$

④ 通解为：$y=(C_1+C_2x)\cos2x+(D_1+D_2x)\sin2x$

例5：已知某齐次方程的通解为

$y=C_3e^{-x}+C_2e^{2x}$，求该齐次方程

解：C_3e^{-x}　C_2e^{2x}

单实根 $\alpha_1=-1$，$\alpha_2=2$

$r_1=-1$，$r_2=2$

$(r+1)(r-2)=0$

$r^2-r-2=0$

$r^2-r^1-2r^0=0$

齐次方程为：$y''-y'-2y=0$

求常系数非齐次线性微分方程的通解，特解

例1. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = e^x$ 的通解

$y'' - 5y' + 6y = e^x$ $\quad y^{*''} - 5y^{*'} + 6y^{*} = e^x$

$f(x) = e^x$

$= 1 \cdot x^0 \cdot e^{1\cdot x}$

① $y'' - 5y' + 6y = 0$

例1：求 $y'' - 5y' + 6y = 0$ 的通解

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$\Rightarrow (r-2)(r-3) = 0$

解得：$r_1 = 2$，$r_2 = 3$

单实根 $\alpha_1 = 2$，$\alpha_2 = 3$

解： $C_1 \cdot e^{2x}$ $\quad C_2 \cdot e^{3x}$

通解为：$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$

特征方程的单实根 $\alpha_1 = 2$，$\alpha_2 = 3$

齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$

② $f(x) = 1 \cdot x^0 \cdot e^{1\cdot x}$

$\lambda = 1$，$m = 0$

③ λ不是特征方程的根 $\Rightarrow k = 0$

④ $y^* = x^k(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m x^0)e^{\lambda x}$

$y^* = x^0 \cdot b_0 x^0 \cdot e^{1\cdot x}$

$= b_0 \cdot e^x$

$(y^*)' = (b_0 \cdot e^x)'$

$= b_0 \cdot e^x$

$(y^*)'' = (b_0 \cdot e^x)'$

$= b_0 \cdot e^x$

齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$

④ $y^* = b_0 \cdot e^x$

$(y^*)' = b_0 \cdot e^x$

$(y^*)'' = b_0 \cdot e^x$

$b_0 \cdot e^x - 5b_0 \cdot e^x + 6b_0 \cdot e^x = e^x$

$2b_0 \cdot e^x = e^x$

$b_0 = \frac{1}{2}$

$y^* = \frac{1}{2}e^x$

⑤ 通解 $= \bar{y} + y^*$

$= C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x} + \frac{1}{2}e^x$

形如 $y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x)$ 的方程

若 $f(x) = (a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \cdot x^0) \cdot e^{\lambda x}$

λ 不是特征方程的根	$k = 0$
λ 是特征方程的单根	$k = 1$
λ 是特征方程的重根	$k = 2$

特解为 $y^* = x^k(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m x^0)e^{\lambda x}$

例2. 求微分方程 $y''-5y'+6y=e^{2x}$ 的通解

$y''-5y'+6y=e^{2x}$ $\quad\quad$ $y^{*''}-5y^{*'}+6y^{*}=e^{2x}$

$f(x)=e^{2x}$

$=1\cdot x^0\cdot e^{2x}$

① $y''-5y'+6y=0$

例1：求 $y''-5y'+6y=0$ 的通解

$r^2-5r+6=0$

$\Rightarrow (r-2)(r-3)=0$

解得：$r_1=2$，$r_2=3$

单实根 $\alpha_1=2$，$\alpha_2=3$

解：$C_1\cdot e^{2x}$ $\quad C_2\cdot e^{3x}$

通解为：$y=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}$

特征方程的单实根 $\alpha_1=2$，$\alpha_2=3$

齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}$

② $f(x)=1\cdot x^0\cdot e^{2x}$

$\lambda=2$，$m=0$

③ λ是特征方程的单根 $\Rightarrow k=1$

④ $y^*=x^k(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)e^{\lambda x}$

$y^*=x^1\cdot b_0x^0\cdot e^{2x}$

$=x\cdot b_0\cdot e^{2x}$

$(y^*)'=(x\cdot b_0\cdot e^{2x})'$

$=(x\cdot b_0)'\cdot e^{2x}+(e^{2x})'\cdot b_0x$

$=b_0\cdot e^{2x}+2e^{2x}\cdot b_0x$

$=b_0e^{2x}(2x+1)$

齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}$

④ $y^*=x\cdot b_0\cdot e^{2x}$

$(y^*)'=b_0e^{2x}(2x+1)$

$(y^*)''=[\,b_0e^{2x}(2x+1)]'$

$=(b_0e^{2x})'\cdot(2x+1)+(2x+1)'\cdot b_0e^{2x}$

$=2b_0e^{2x}\cdot(2x+1)+2b_0e^{2x}$

$=2b_0e^{2x}\cdot(2x+2)$

$2b_0e^{2x}\cdot(2x+2)-5[b_0e^{2x}(2x+1)]+6x\cdot b_0\cdot e^{2x}=e^{2x}$

$2b_0\cdot(2x+2)-5[b_0(2x+1)]+6x\cdot b_0=1$

$b_0\,[\,2\cdot(2x+2)-5(2x+1)+6x\,]=1$

$b_0\,(4x+4-10x-5+6x\,)=1$

$b_0\cdot(-1\,)=1$

$b_0=-1$

$\therefore\ y^*=-\,x\cdot e^{2x}$

⑤ 通解 $=\bar{y}+y^*$

$=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}-x\cdot e^{2x}$

例3. 求微分方程 $y''+4y=\cos x+\sin x$ 的通解

$y''+4y=\cos x+\sin x$

$y^{*''}+4y^{*}=\cos x+\sin x$

$f(x)=\cos x+\sin x$

$=e^{0\cdot x}[1\cdot x^0\cdot\cos x+1\cdot x^0\cdot\sin x]$

① $y''+4y=0$

例3：求 $y''+4y=0$ 的通解

$r^2+4=0$

$\Longrightarrow (r+2i)(r-2i)=0$

解得：$r_1=0-2i$，$r_2=0+2i$

一对复根 $0\pm2i$

解：$C_1\cos2x+C_2\sin2x$

通解为：$y=C_1\cos2x+C_2\sin2x$

特征方程的根为 $\pm2i$

齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1\cos2x+C_2\sin2x$

② $f(x)=e^{0\cdot x}[1\cdot x^0\cdot\cos x+1\cdot x^0\cdot\sin x]$

$\lambda=0$，$\beta=1$，$n=0$，$t=0$

③ $\lambda+\beta i=0+1\cdot i=i$

不是特征方程的根 $\Longrightarrow k=0$

④ $m=0$

⑤ $y^*=x^k[(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_mx^0)\cos\beta x+(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)\sin\beta x]e^{\lambda x}$

$y^*=x^0[a_0x^0\cos x+b_0x^0\sin x]e^{0\cdot x}$

$=a_0\cos x+b_0\sin x$

$(y^*)'=(a_0\cos x+b_0\sin x)'$

$=(a_0\cos x)'+(b_0\sin x)'$

$=-a_0\sin x+b_0\cos x$

$=b_0\cos x-a_0\sin x$

$(y^*)''=(b_0\cos x-a_0\sin x)'$

$=(b_0\cos x)'-(a_0\sin x)'$

$=-b_0\sin x-a_0\cos x$

$-b_0\sin x-a_0\cos x+4(a_0\cos x+b_0\sin x)=\cos x+\sin x$

$-b_0\sin x-a_0\cos x+4a_0\cos x+4b_0\sin x=\cos x+\sin x$

$(3a_0-1)\cos x+(3b_0-1)\sin x=0$

$\Longrightarrow\begin{cases}3a_0-1=0\\3b_0-1=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a_0=\frac{1}{3}\\b_0=\frac{1}{3}\end{cases}$

$\therefore y^*=\frac{1}{3}\cos x+\frac{1}{3}\sin x$

⑥ 通解 $=\bar{y}+y^*$

$=C_1\cos2x+C_2\sin2x+\frac{1}{3}\cos x+\frac{1}{3}\sin x$

形如 $y''+p_1y'+p_2y=f(x)$ 的方程

若 $f(x)=e^{\lambda x}[Q_n(x)\cos\beta x+Q_t(x)\sin\beta x]$

$\lambda+\beta i$ 不是特征方程的根	$k=0$
$\lambda+\beta i$ 是特征方程的根	$k=1$

m=n、t 中的最大值

特解为 $y^*=x^k[(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_mx^0)\cos\beta x+(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)\sin\beta x]e^{\lambda x}$

线性微分方程的解的结构

例1：已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$

是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，

则该方程的通解为 $y=$ ____________

找 非齐次方程的通解 $\Rightarrow$ 找 $\begin{cases}\text{齐次方程的通解}\\ \text{非齐次方程的特解（非齐次特解：}y_3=-xe^{2x}\text{）}\end{cases}$

找 齐次方程的通解 $\Rightarrow$ 找 齐次方程的两个特解 且 $\frac{\text{齐次特解}_1}{\text{齐次特解}_2}\neq C$

齐次特解1：$y_1-y_3=(e^{3x}-xe^{2x})-(-xe^{2x})=e^{3x}$

齐次特解2：$y_2-y_3=(e^x-xe^{2x})-(-xe^{2x})=e^x$

$\frac{\text{齐次特解}_1}{\text{齐次特解}_2}=\frac{e^{3x}}{e^x}\neq C$

$\therefore$ 齐次方程的通解为 $C_1\cdot e^{3x}+C_2\cdot e^x$

$\therefore$ 非齐次方程的通解为 $C_1\cdot e^{3x}+C_2\cdot e^x-xe^{2x}$

找啥	需要有啥	能得到啥
非齐次的通解	齐次的通解 $\bar{y}$，非齐次的特解 y^*	非齐次的通解为 $\bar{y}+y^*$
齐次的特解	非齐次的特解 y_1^*、y_2^*	齐次的特解为 $y_1^*-y_2^*$
齐次的通解	齐次的特解 y_1、y_2，且 $\frac{y_1}{y_2}\neq C$	齐次的通解为 $C_1y_1+C_2y_2$
	齐次的特解 y_1、y_2	齐次的特解为 $C_1y_1+C_2y_2$
	$?=f_1(x)$ 的特解 y_a^*，$?=f_2(x)$ 的特解 y_b^*	$?=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解为 $y_a^*+y_b^*$

例2：若 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$

是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$(A)

(A) $3x(1+x^2)$ (B) $-3x(1+x^2)$

(C) $\frac{x}{1+x^2}$ (D) $-\frac{x}{1+x^2}$

$y'+p(x)y=0$ 的特解为：

$y_2-y_1=\left[(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}\right]-\left[(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}\right]$

$=2\sqrt{1+x^2}$

$(2\sqrt{1+x^2})'+p(x)\cdot 2\sqrt{1+x^2}=0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x+p(x)\cdot 2\sqrt{1+x^2}=0$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x+p(x)\cdot 2\sqrt{1+x^2}=0$

$\Rightarrow 2x+p(x)\cdot 2(1+x^2)=0$

$\Rightarrow p(x)=-\frac{x}{1+x^2}$

$\therefore y'-\frac{x}{1+x^2}\cdot y=q(x)$

将 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$ 代入上式：

$\left[(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}\right]'-\frac{x}{1+x^2}\cdot\left[(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}\right]=q(x)$

$\Rightarrow [(1+x^2)^2]'-\left(\sqrt{1+x^2}\right)'-\left[x\cdot(1+x^2)-\frac{x\cdot\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\right]=q(x)$

$\Rightarrow 2\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^2)'-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+x^2)'-x\cdot(1+x^2)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=q(x)$

$\Rightarrow 2\cdot(1+x^2)\cdot 2x-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x-x\cdot(1+x^2)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=q(x)$

$\Rightarrow 4x\cdot(1+x^2)-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-x\cdot(1+x^2)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=q(x)$

$\Rightarrow 3x\cdot(1+x^2)=q(x)$

例3：已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x-e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}+e^{-x}$ 为某二阶线性常系数非齐次微分方程的特解，求此方程。

齐次特解1：$y_3-y_1=(xe^x+e^{2x}+e^{-x})-(xe^x+e^{2x})=e^{-x}$

齐次特解2：$y_3-y_2=(xe^x+e^{2x}+e^{-x})-(xe^x-e^{-x})=e^{2x}+2e^{-x}$

齐次特解3：$y_2-y_1=(xe^x-e^{-x})-(xe^x+e^{2x})=-e^{-x}-e^{2x}$

$\frac{e^{-x}}{e^{2x}+2e^{-x}}\neq C$

$\therefore$ 齐次方程的通解为：$C_1e^{-x}+C_2(e^{2x}+2e^{-x})=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+2C_2e^{-x}$

$$=(C_1+2C_2)e^{-x}+C_2e^{2x}$$
$$=C_3e^{-x}+C_2e^{2x}$$

齐次方程的通解为：$C_3e^{-x}+C_2e^{2x}$

例5：已知某齐次方程的通解为 $y=C_3e^{-x}+C_2e^{2x}$，求该齐次方程

解：C_3e^{-x}　　C_2e^{2x}

单实根 $\alpha_1=-1$，$\alpha_2=2$

$r_1=-1$，$r_2=2$

$(r+1)(r-2)=0$

$r^2-r-2=0$

$r^2-r^1-2r^0=0$

齐次方程为：$y''-y'-2y=0$

齐次方程为：$y''-y'-2y=0$

$\therefore$ 此非齐次方程为：$y''-y'-2y=f(x)$

将 $y_1=xe^x+e^{2x}$ 代入上式：

$(xe^x+e^{2x})''-(xe^x+e^{2x})'-2\cdot(xe^x+e^{2x})=f(x)$

$\Longrightarrow[(xe^x+e^{2x})']'-(xe^x+e^{2x})'-2\cdot(xe^x+e^{2x})=f(x)$

$\Longrightarrow[(xe^x)'+(e^{2x})']'-[(xe^x)'+(e^{2x})']-2\cdot(xe^x+e^{2x})=f(x)$

$\Longrightarrow[x'e^x+x(e^x)'+e^{2x}(2x)']'-[x'e^x+x(e^x)'+e^{2x}(2x)']-2\cdot(xe^x+e^{2x})=f(x)$

$\Longrightarrow(e^x+xe^x+2e^{2x})'-(e^x+xe^x+2e^{2x})-2\cdot(xe^x+e^{2x})=f(x)$

$\Longrightarrow(e^x)'+(xe^x)'+(2e^{2x})'-(e^x+xe^x+2e^{2x})-2\cdot(xe^x+e^{2x})=f(x)$

$\Longrightarrow e^x+x'e^x+x(e^x)'+2e^{2x}(2x)'-(e^x+xe^x+2e^{2x})-2\cdot(xe^x+e^{2x})=f(x)$

$\Longrightarrow e^x+e^x+xe^x+4e^{2x}-(e^x+xe^x+2e^{2x})-2\cdot(xe^x+e^{2x})=f(x)$

$\Longrightarrow e^x+e^x+xe^x+4e^{2x}-e^x-xe^x-2e^{2x}-2xe^x-2e^{2x}=f(x)$

$\Longrightarrow e^x-2xe^x=f(x)$

$\therefore$此非齐次方程为：$y''-y'-2y=e^x-2xe^x$

可降阶的高阶微分方程

例1. 求微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解

$xy''+3y'=0$

$xy''=-3y'$

$y''=\frac{-3y'}{x}$

① 令 $y'=p$、$y''=p'$

$p'=\frac{-3p}{x}$

② $\frac{dp}{dx}=\frac{-3p}{x}$

$xdp=-3pdx$

$\frac{1}{p}dp=\frac{-3}{x}dx$

$\int\frac{1}{p}dp=\int\frac{-3}{x}dx$

$\int\frac{1}{p}dp=-3\int\frac{1}{x}dx$

$\ln|p|+C_1=-3(\ln|x|+C_2)$

$\ln|p|+C_1=-3\ln|x|-3C_2$

$\ln|p|=-3\ln|x|+C_3$

$\ln|p|=\ln|x|^{-3}+\ln e^{C_3}$

$\ln|p|=\ln(e^{C_3}|x|^{-3})$

$\ln|p|=\ln(C_4|x|^{-3})$

$|p|=C_4|x|^{-3}$

$p=\pm C_4x^{-3}$

$p=C_5\,x^{-3}$

③ $y=\int p\,dx$

$=\int C_5x^{-3}\,dx$

$=C_5\int x^{-3}\,dx$

$=C_5(-\frac{x^{-2}}{2}+C_6)$

$=-\frac{C_5}{2}x^{-2}+C_6\cdot C_5$

$=C_7x^{-2}+C_8$

例2. 求微分方程 $x^2y''+(x-y')y'=0$ 的通解

$$x^2y''+(x-y')y'=0$$

$$x^2y''=-(x-y')y'$$

$$y''=-\frac{(x-y')y'}{x^2}$$

① 令 $y'=p$、$y''=p'$

$$p'=-\frac{(x-p)p}{x^2}$$

$$p'=\frac{p^2}{x^2}-\frac{xp}{x^2}$$

$$p'=\frac{p^2}{x^2}-\frac{p}{x}$$

② $\frac{dp}{dx}=\frac{p^2}{x^2}-\frac{p}{x}$

$$=\left(\frac{p}{x}\right)^2-\frac{p}{x}$$

例1. 求微分方程满足 $y'+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$ 的通解

$$y'+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}$$

设 $u=\frac{y}{x}$

$$u+x\frac{du}{dx}=u^2-u$$

$$x\frac{du}{dx}=u^2-2u$$

$$xdu=(u^2-2u)dx$$

$$\frac{1}{u^2-2u}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{u^2-2u}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{u(u-2)}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{u-2}du-\int\frac{1}{u}du\right)=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}[(\ln|u-2|+C_1)-(\ln|u|+C_2)]=\ln|x|+C_3$$

$$(\ln|u-2|+C_1)-(\ln|u|+C_2)=2\ln|x|+2C_3$$

$$\ln|u-2|-\ln|u|=2\ln|x|+2C_3+C_2-C_1$$

$$\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=2\ln|x|+C_4$$

$$\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln|x|^2+\ln e^{C_4}$$

$$\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln x^2+\ln e^{C_4}$$

$$\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln(x^2\cdot e^{C_4})$$

$$\Longrightarrow\left|\frac{u-2}{u}\right|=x^2\cdot e^{C_4}$$

$$\frac{u-2}{u}=\pm e^{C_4}\cdot x^2$$

$$\frac{u-2}{u}=Cx^2$$

$$\frac{\frac{y}{x}-2}{\frac{y}{x}}=Cx^2$$

$$\frac{y-2x}{y}=Cx^2$$

$$1-\frac{2x}{y}=Cx^2\Longrightarrow y=\frac{2x}{1-Cx^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}\Longrightarrow y=\frac{2x}{1-Cx^2}$$

$$\frac{dp}{dx}=\left(\frac{p}{x}\right)^2-\frac{p}{x}\Longrightarrow p=\frac{2x}{1-Cx^2}$$

③ $y=\int p\,dx$

$$=\int\frac{2x}{1-Cx^2}dx$$

$$=\frac{1}{C}\int\frac{2Cx}{1-Cx^2}dx$$

$$=\frac{1}{C}\int\frac{-(1-Cx^2)'}{1-Cx^2}dx$$

$$=\frac{1}{C}\int-[\ln(1-Cx^2)]'dx$$

$$=-\frac{\ln(1-Cx^2)}{C}+C_1$$

例3. 求微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 的通解

$$yy''+(y')^2=0$$

$$y''=-\frac{(y')^2}{y}$$

① 令 $y'=p$、$y''=p\frac{dp}{dy}$

$$p\frac{dp}{dy}=-\frac{p^2}{y}$$

$$\frac{dp}{dy}=-\frac{p}{y}$$

② $$ydp=-pdy$$

$$\frac{1}{p}dp=-\frac{1}{y}dy$$

$$\int\frac{1}{p}dp=-\int\frac{1}{y}dy$$

$$\ln|p|+C_1=-(\ln|y|+C_2)$$

$$\ln|p|=C_3-\ln|y|$$

$$\ln|p|=\ln e^{C_3}-\ln|y|$$

$$\ln|p|=\ln|\frac{e^{C_3}}{y}|$$

$$|p|=|\frac{e^{C_3}}{y}|$$

$$|p|=|\frac{C_4}{y}|$$

$$p=\pm\frac{C_4}{y}$$

$$p=\frac{C_5}{y}$$

③ $$\frac{dy}{dx}=\frac{C_5}{y}$$

④ $$ydy=C_5dx$$

$$\int y\,dy=\int C_5\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}+C_6=C_5x+C_7$$

$$y^2=C_8x+C_9$$

一阶常系数线性差分方程

方程 $y_{t+1}+\lambda y_t=f(t)$

$y_{t+1}+\lambda y_t=0$ 的通解为 $y_c(t)=C(-\lambda)^t$

将f(t)改成$d^t\cdot(a_m t^m+a_{m-1}t^{m-1}+\cdots+a_1 t^1+a_0 t^0)$

特解为 $y_t{}^*=\begin{cases} d^t(b_0 t^m+b_1 t^{m-1}+\cdots b_m)，若\ \lambda+d\neq 0 \\ td^t(b_0 t^m+b_1 t^{m-1}+\cdots b_m)，若\ \lambda+d=0 \end{cases}$

例1. 求差分方程 $y_{t+1}-y_t=t\cdot 2^t$ 的通解

① $y_{t+1}-y_t=t\cdot 2^t$

$y_{t+1}+[(-1)\cdot y_t]=t\cdot 2^t \Longrightarrow \lambda=-1$

② $y_{t+1}+[(-1)\cdot y_t]=0$ 的通解为 $y_c(t)=C\cdot[-(-1)]^t$

$y_{t+1}-y_t=0$ 的通解为 $y_c(t)=C(1)^t=C$

③ $f(t)=t\cdot 2^t$

$=2^t\cdot(1\cdot t^1+0\cdot t^0)\Rightarrow d=2、m=1$

④ $\lambda+d=-1+2=1\neq 0$

$\Longrightarrow y_t{}^*=2^t(b_0 t+b_1)$

⑤ $y_{t+1}{}^*=2^{t+1}[b_0(t+1)+b_1]$

$2^{t+1}[b_0(t+1)+b_1]-2^t(b_0 t+b_1)=t\cdot 2^t$

$2^t\cdot 2[b_0(t+1)+b_1]-2^t(b_0 t+b_1)=t\cdot 2^t$

$2b_0(t+1)+2b_1-(b_0 t+b_1)=t$

$2b_0 t+2b_0+2b_1-b_0 t-b_1=t$

$b_0 t+2b_0+b_1=t$

$(b_0-1)t+(2b_0+b_1)=0 \ \Longrightarrow \begin{cases} b_0-1=0 \\ 2b_0+b_1=0 \end{cases} \Longrightarrow b_0=1，b_1=-2 \ \Longrightarrow y_t{}^*=2^t[\,1\cdot t+(-2)\,]$

$=2^t(t-2)$

$\therefore\ y_t{}^*=2^t(t-2)$

⑥ 通解 $y_t=y_c(t)+y_t{}^*$

$=C+2^t(t-2)$

例2. 求差分方程 $y_{t+1}-y_t=3t^2+5t+1$ 的通解

① $y_{t+1}-y_t=3t^2+5t+1$

$y_{t+1}+[(-1)\cdot y_t]=3t^2+5t+1 \ \Longrightarrow \lambda=-1$

② $y_{t+1}+[(-1)\cdot y_t]=0$ 的通解为 $y_c(t)=C\cdot[-(-1)]^t$

$y_{t+1}-y_t=0$ 的通解为 $y_c(t)=C(1)^t=C$

③ $f(t)=3t^2+5t+1=1^t\cdot(3t^2+5t^1+1t^0)\Rightarrow d=1、m=2$

④ $\lambda+d=-1+1=0$

$\Longrightarrow y_t{}^*=t\cdot 1^t(b_0 t^2+b_1 t+b_2)=b_0 t^3+b_1 t^2+b_2 t$

⑤ $y_{t+1}{}^*=b_0(t+1)^3+b_1(t+1)^2+b_2(t+1)$

$b_0(t+1)^3+b_1(t+1)^2+b_2(t+1)-(b_0 t^3+b_1 t^2+b_2 t)=3t^2+5t+1$

$b_0 t^3+3b_0 t+3b_0 t^2+b_0+b_1 t^2+2b_1 t+b_1+b_2 t+b_2-b_0 t^3-b_1 t^2-b_2 t=3t^2+5t+1$

$3b_0 t+3b_0 t^2+b_0+2b_1 t+b_1+b_2=3t^2+5t+1$

$3b_0 t^2+(3b_0+2b_1)t+b_1+b_0+b_2=3t^2+5t+1$

$(3b_0-3)t^2+(3b_0+2b_1-5)t+(b_1+b_0+b_2-1)=0$

$\Longrightarrow \begin{cases} 3b_0-3=0 \\ 3b_0+2b_1-5=0 \\ b_1+b_0+b_2-1=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_0=1 \\ b_1=1 \\ b_2=-1 \end{cases} \ \Longrightarrow y_t{}^*=1\cdot t^3+1\cdot t^2+(-1)\cdot t$

$=t^3+t^2-t$

⑤ $y_t{}^*=t^3+t^2-t$

⑥ 通解 $y_t=y_c(t)+y_t{}^*$

$=C+t^3+t^2-t$

欧拉方程

形如

$C_n(x+a)^n y^{(n)}+C_{n-1}(x+a)^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+C_1(x+a)y'+C_0y=f(x)$

的方程称为 欧拉方程

$y=y(t)$、$(x+a)y'=y'(t)$、$(x+a)^2y''=y''(t)-y'(t)$、

$(x+a)^3y'''=y'''(t)-3y''(t)+2y'(t)$

例1：求方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的通解

$(x+0)^2y''-3(x+0)y'+4y=0$

① 令 $x+0=e^t$

② 原方程可化为：$y''(t)-y'(t)-3y'(t)+4y(t)=0$

即 $y''(t)-4y'(t)+4y(t)=0$

> 例2：求 $y''-4y'+4y=0$ 的通解
>
> $r^2-4r+4=0$
>
> $\Rightarrow (r-2)(r-2)=0$
>
> 解得： $r_1=r_2=2$
>
> 二重实根 $\alpha=2$
>
> 解：$e^{2x}\cdot(C_1+C_2x)$
>
> 通解为：$y=e^{2x}\cdot(C_1+C_2x)$

③ $y(t)$ 的通解为：$y=e^{2t}\cdot(C_1+C_2t)$

④ $\because x=e^t$

$\therefore t=\ln x$

$\therefore$ 原方程的通解为：$y=e^{2\ln x}\cdot(C_1+C_2\ln x)$

$=e^{\ln x^2}\cdot(C_1+C_2\ln x)$

$=x^2\cdot(C_1+C_2\ln x)$

例2：求方程 $(1+x)^2y''-4(1+x)y'+6y=1+x$ 的通解

$(x+1)^2y''-4(x+1)y'+6y=1+x$

① 令 $x+1=e^t$

② 原方程可化为：$y''(t)-y'(t)-4y'(t)+6y(t)=e^t$

即 $y''(t)-5y'(t)+6y(t)=e^t$

> 例1. 求微分方程 $y''-5y'+6y=e^x$ 的通解
>
> 特征方程的通解为 $\bar{y}=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}$
>
> $y^*=b_0\cdot e^x$
>
> $(y^*)'=b_0\cdot e^x$
>
> $(y^*)''=b_0\cdot e^x$
>
> $b_0\cdot e^x-5b_0\cdot e^x+6b_0\cdot e^x=e^x$
>
> $2b_0\cdot e^x=e^x$
>
> $b_0=\frac{1}{2}$
>
> $y^*=\frac{1}{2}e^x$
>
> 通解 $=\bar{y}+y^*$
>
> $=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$

③ $y(t)$ 的通解为：$y=C_1\cdot e^{2t}+C_2\cdot e^{3t}+\frac{1}{2}e^t$

④ $\because x+1=e^t$

$\therefore t=\ln(x+1)$

$\therefore$ 原方程的通解为：$y=C_1\cdot e^{2\ln(x+1)}+C_2\cdot e^{3\ln(x+1)}+\frac{1}{2}e^{\ln(x+1)}$

$=C_1\cdot e^{\ln(x+1)^2}+C_2\cdot e^{\ln(x+1)^3}+\frac{1}{2}e^{\ln(x+1)}$

$=C_1\cdot(x+1)^2+C_2\cdot(x+1)^3+\frac{1}{2}(x+1)$