第四章课后习题

1、已知函数 $y=y(x)$在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时 α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)$等于

(A)2π (B)π (C)$e^{\frac{\pi}{4}}$ (D)$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

2、微分方程$y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$_________。

3、求微分方程 $x\ln x dy+(y-\ln x)dx=0$ 满足条件$y|_{x=e}=1$ 的特解

4、微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$的解为_________。

5、若函数满足$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及$f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$_________。

6、解微分方程$y'=\frac{1}{xy+y^3}$

7、解微分方程$(x-\sin y)dy+\tan y dx=0$

8、(数二数三不用做)

求方程$y'+\frac{y}{x}=y^2-\frac{1}{x^2}$的通解

9、(数二数三不用做)

解微分方程$x^2y'+xy=y^2$

10、(数二数三不用做)

求微分方程 $3(1+x^2)y'+2xy=2xy^4$的通解

11、(数二数三不用做)

解微分方程$(x^2+y)dx-xdy=0$

12、设函数 $y(x)$满足方程$y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$，求 $y(x)$

13、微分方程$y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$_________。

14、求满足条件$\begin{cases} y''+4y'+4y=0 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=-4 \end{cases}$的函数 $y(x)$

15、$y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$为某二阶常系数齐次微分方程的通解，$C_1$、$C_2$是任意常数，求该方程

16、求以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ $\left(C_1、C_2、C_3\text{是任意常数}\right)$ 为通解的微分方程

17、求微分方程$y''+4y'+4y=e^{-2x}$的通解

18、求微分方程$y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$的通解，其中常数 $a>0$

19、$y''-4y=e^{2x}$的通解为________。

20、求微分方程$y''-3y'+2y=2xe^x$的通解

21、二阶常系数非齐次线性微分方程$y''-4y'+3y=2e^{2x}$的通解为 $y=$________。

22、求微分方程$y''+2y'-3y=e^{-3x}$的通解

23、微分方程$y''-2y'+2y=e^x$的通解为________。

24、若二阶常系数齐次线性微分方程$y''+ay'+by=0$的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程

$y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2$、$y'(0)=0$ 的解为 $y=$________。

25、$y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$是二阶常系数非齐次线性微分方程$y''+ay'+by=ce^x$的一个特解，求 a、b、c

26、求微分方程$y''-y=\sin x$ 满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$的解

27、设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$，其中 $f(x)$为连续函数，求 $f(x)$

28、设$y_1(x)$、$y_2(x)$是二阶常系数齐次线性微分方程的两个特解，则$y_1(x)$与$y_2(x)$能构成该方程的通解，其充分条件为____。

(A)$y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=0$　　(B)$y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\neq0$

(C)$y_1(x)y_2'(x)+y_2(x)y_1'(x)=0$　　(D)$y_1(x)y_2'(x)+y_2(x)y_1'(x)\neq0$

29、(数三不用做)

求微分方程$y''=y'+x$的通解

30、(数三不用做)

求方程$y''=(y')^3+y'$的通解

31、(数三不用做)

求微分方程$y''+\frac{(y')^2}{1-y}=0$ (其中 $y\neq1$)的通解

32、(数一数二不用做)

求差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解

33、(数二数三不用做)

欧拉方程$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0$ $(x>0)$的通解为________。

34、(数二数三不用做)

求方程$(1+x)^2y''-(1+x)y'+y=\frac{1}{1+x}$的通解

参考答案

1、已知函数 $y=y(x)$在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时 α 是 Δx 的高阶无穷小，

$y(0)=\pi$，则 $y(1)$等于

(A)2π　　(B)π　　(C)$e^{\frac{\pi}{4}}$　　(D)$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

解：①$\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$ 等号两边同除以 Δx，有$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\Delta x}$

等号两边同取极限，有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{y}{1+x^2}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{\Delta x}$

即$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2}$

②$\frac{1}{y}dy=\frac{1}{1+x^2}dx$

③$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{1+x^2}dx$

$\ln|y|+C_1=\arctan x+C_2$

$\ln|y|=\arctan x+C_3$

$|y|=e^{\arctan x+C_3}$

$y=\pm e^{\arctan x+C_3}$

$y=\pm e^{C_3}e^{\arctan x}$

$y=Ce^{\arctan x}$

将 $y(0)=\pi$ 代入通解，有 $\pi=Ce^0$

$\therefore C=\pi$，$\therefore y=\pi e^{\arctan x}$

$\therefore y(1)=\pi e^{\arctan 1}=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$，选(D)

2、微分方程$y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$__________。

解：$\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}\cos x$

$\frac{dy}{dx}=e^{-x}\cos x-y$

$Q(x)=e^{-x}\cos x$，$P(x)=1$

$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

$=e^{-\int 1dx}\left(\int e^{-x}\cos x e^{\int 1dx}\,dx + C\right)$

$=e^{-x}(\int e^{-x}\cos x e^{x}\,dx + C)$

$=e^{-x}(\int \cos x\,dx + C)$

$=e^{-x}(\sin x + C)$

$\because y(0)=0$

$\therefore e^{-0}(\sin 0 + C)=0$

$\therefore C=0$

$\therefore y=e^{-x}\sin x$

3、求微分方程 $x\ln x dy+(y-\ln x)dx=0$ 满足条件$y|_{x=e}=1$ 的特解

解：方程等号两边同除以 $x\ln x dx$，有$\frac{x\ln x dy}{x\ln x dx}+\frac{(y-\ln x)dx}{x\ln x dx}=0$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{(y-\ln x)}{x\ln x}=0$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x\ln x}-\frac{\ln x}{x\ln x}=0$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x\ln x}-\frac{1}{x}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x\ln x}\cdot y$$

$Q(x)=\frac{1}{x}$，$P(x)=\frac{1}{x\ln x}$

$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C\right]$

$=e^{-\int\frac{1}{x\ln x}dx}\left(\int \frac{1}{x}e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}\,dx + C\right)$

$=e^{-\ln(\ln x)}\left[\int \frac{1}{x}e^{\ln(\ln x)}\,dx + C\right]$

$=\frac{1}{e^{\ln(\ln x)}}\left[\int \frac{1}{x}e^{\ln(\ln x)}\,dx + C\right]$

$=\frac{1}{\ln x}\left(\int \frac{1}{x}\ln x\,dx + C\right)$

$=\frac{1}{\ln x}\left(\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)$

$=\frac{\ln x}{2}+\frac{C}{\ln x}$

$\because y|_{x=e}=1$

$\therefore \frac{\ln e}{2}+\frac{C}{\ln e}=1$

$\therefore C=\frac{1}{2}$

$\therefore y=\frac{\ln x}{2}+\frac{1}{2\ln x}$

4、微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$的解为________。

解：$y'+\frac{2}{x}y=\ln x$

$y'=\ln x-\frac{2}{x}y$

$\frac{dy}{dx}=\ln x-\frac{2}{x}y$

$Q(x)=\ln x$，$P(x)=\frac{2}{x}$

$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

$=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int \ln x\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right)$

$=e^{-2\ln x}\left(\int \ln x\cdot e^{2\ln x}dx+C\right)$

$=\frac{1}{e^{2\ln x}}\left(\int \ln x\cdot e^{2\ln x}dx+C\right)$

$=\frac{1}{x^2}\left(\int \ln x\cdot x^2dx+C\right)$

$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{3x^3\ln x-x^3}{9}+C\right)$

$\because y(1)=-\frac{1}{9}$

$\therefore \frac{1}{1}\left(\frac{3\ln 1-1}{9}+C\right)=-\frac{1}{9}$

$\therefore C=0$

$\therefore y=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3x^3\ln x-x^3}{9}=\frac{3x\ln x-x}{9}$

5、若函数满足$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$及$f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$__________。

解：$\left.\begin{matrix} f''(x)+f'(x)-2f(x)=0 \\ f''(x)+f(x)=2e^x \end{matrix}\right\}\Rightarrow f'(x)=-2e^x+3f(x)$

即 $\frac{dy}{dx}=-2e^x+3y$

$Q(x)=-2e^x$，$P(x)=-3$

$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

$=e^{-\int -3dx}\left(\int -2e^xe^{\int -3dx}dx+C\right)$

$=e^{3x}\left(\int -2e^xe^{-3x}dx+C\right)$

$=e^{3x}\left(\int -2e^{-2x}dx+C\right)$

$=e^{3x}\left(e^{-2x}+C\right)$

$=e^x+Ce^{3x}$

即 $f(x)=e^x+Ce^{3x}$

$\therefore f''(x)=e^x+9Ce^{3x}$

将 f(x)、f″(x)代入方程$f''(x)+f(x)=2e^x$，有$e^x+9Ce^{3x}+e^x+Ce^{3x}=2e^x$

$\therefore C=0$

$\therefore f(x)=e^x$

6、解微分方程$y'=\frac{1}{xy+y^3}$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy+y^3}$

用 X 替换 y，用 Y 替换 x，有

$\frac{dX}{dY}=\frac{1}{YX+X^3}$

$\frac{dY}{dX}=YX+X^3$

$Q(X)=X^3$，$P(X)=-X$

$Y=e^{-\int P(X)dX}\left[\int Q(X)e^{\int P(X)dX}\,dX+C\right]$

$=e^{-\int -XdX}\left(\int X^3e^{\int -XdX}\,dX+C\right)$

$=e^{\frac{X^2}{2}}\left(\int X^3e^{-\frac{X^2}{2}}\,dX+C\right)$

$=e^{\frac{X^2}{2}}\left[(-X^2-2)e^{-\frac{X^2}{2}}+C\right]$

$=e^{\frac{X^2}{2}}\cdot(-X^2-2)\cdot e^{\frac{X^2}{2}}+Ce^{\frac{X^2}{2}}$

$=-X^2-2+Ce^{\frac{X^2}{2}}$

$\therefore x=-y^2-2+Ce^{\frac{y^2}{2}}$

7、解微分方程$(x-\sin y)dy+\tan y\,dx=0$

解：方程等号两边同除以 tanydx，有$\frac{x-\sin y}{\tan y}\frac{dy}{dx}+1=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\tan y}{\sin y-x}$

用 X 替换 y，用 Y 替换 x，有

$\frac{dX}{dY}=\frac{\tan X}{\sin X-Y}$

$\frac{dY}{dX}=\frac{\sin X-Y}{\tan X}=\cos X-\cot X\cdot Y$

$Q(X)=\cos X$，$P(X)=\cot X$

$Y=e^{-\int P(X)dX}\left[\int Q(X)e^{\int P(X)dX}\,dX+C\right]$

$=e^{-\int \cot X dX}\left(\int \cos X e^{\int \cot X dX} dX + C\right)$

$=e^{-\ln|\sin X|}\left(\int \cos X e^{\ln|\sin X|} dX + C\right)$

$=\frac{1}{e^{\ln|\sin X|}}\left(\int \cos X e^{\ln|\sin X|} dX + C\right)$

$=\frac{1}{|\sin X|}\left(\int \cos X|\sin X| dX + C\right)$

$=\frac{1}{\sin X}\left(\int \cos X \sin X\, dX + C\right)$

$=\frac{1}{\sin X}\left(\frac{\sin^2 X}{2} + C\right)$

$\therefore x=\frac{1}{\sin y}\left(\frac{\sin^2 y}{2} + C\right)$

8、(数二数三不用做)

求方程$y'+\frac{y}{x}=y^2-\frac{1}{x^2}$的通解

解：$y'=y^2-\frac{1}{x^2}-\frac{y}{x}$

设 u=xy，有

$\frac{\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}}{x}=\left(\frac{u}{x}\right)^2-\frac{1}{x^2}-\frac{\frac{u}{x}}{x}$

$\frac{\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}}{x}=\frac{u^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{u}{x^2}$

$\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=\frac{u^2}{x}-\frac{1}{x}-\frac{u}{x}$

$\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{x}-\frac{1}{x}$

$\frac{1}{u^2-1}du=\frac{1}{x}dx$

$\int \frac{1}{u^2-1}du=\int \frac{1}{x}dx$

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|=\ln|x|+C_1$

$\ln\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}=\ln e^{C_1}|x|$

$\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}=C_2 x$

$\frac{1-u}{1+u}=Cx^2$

$\frac{1-xy}{1+xy}=Cx^2$

9、(数二数三不用做)

解微分方程$x^2y'+xy=y^2$

解：$y'=\frac{1}{x^2}y^2-\frac{1}{x}y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}y^2-\frac{1}{x}y$$

$Q(x)=\frac{1}{x^2}$，$P(x)=\frac{1}{x}$，$n=2$

设 $u=y^{1-n}=y^{-1}$，有

$$\frac{du}{dx}=(1-2)\frac{1}{x^2}-(1-2)\frac{1}{x}u$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}u$$

$$u=e^{-\int-\frac{1}{x}dx}\left(\int-\frac{1}{x^2}e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{\ln|x|}\left(\int-\frac{1}{x^2}e^{-\ln|x|}dx+C\right)$$

$$=e^{\ln|x|}\left(\int-\frac{1}{x^2}\frac{1}{e^{\ln|x|}}dx+C\right)$$

$$=|x|\left(\int-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{|x|}dx+C\right)$$

$$=x\left(\int-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}dx+C\right)$$

$$=x\left(\frac{1}{2x^2}+C\right)$$

$$=\frac{1}{2x}+Cx$$

$$y^{-1}=\frac{1}{2x}+Cx=\frac{2Cx^2+1}{2x}$$

$$y=\frac{2x}{2Cx^2+1}$$

$$y=\frac{2x}{Cx^2+1}$$

10、(数二数三不用做)

求微分方程 $3(1+x^2)y'+2xy=2xy^4$的通解

解：$y'=\frac{2x}{3(1+x^2)}y^4-\frac{2x}{3(1+x^2)}y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3(1+x^2)}y^4-\frac{2x}{3(1+x^2)}y$$

$Q(x)=\frac{2x}{3(1+x^2)}$，$P(x)=\frac{2x}{3(1+x^2)}$，$n=4$

设 $u=y^{1-n}=y^{-3}$，有

$$\frac{du}{dx}=(1-4)\frac{2x}{3(1+x^2)}-(1-4)\frac{2x}{3(1+x^2)}u$$

$\frac{du}{dx}=-\frac{2x}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}u$

$u=e^{-\int-\frac{2x}{1+x^2}dx}\left(\int-\frac{2x}{1+x^2}e^{\int-\frac{2x}{1+x^2}dx}dx+C\right)$

$=e^{\ln(1+x^2)}\left[\int-\frac{2x}{1+x^2}e^{-\ln(1+x^2)}dx+C\right]$

$=(1+x^2)\left(\int-\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx+C\right)$

$=(1+x^2)\left(\frac{1}{1+x^2}+C\right)$

$=1+C(1+x^2)$

$y^{-3}=1+C(1+x^2)$

11、(数二数三不用做)

解微分方程$(x^2+y)dx-xdy=0$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y}{x}=-\frac{x^2+y}{-x}$

$\frac{\partial(x^2+y)}{\partial y}=1\neq\frac{\partial(-x)}{\partial x}=-1$

继续变形，有$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+y}{-x}=-\frac{1+\frac{y}{x^2}}{-\frac{1}{x}}$

$P(x,y)=1+\frac{y}{x^2}$，$Q(x,y)=-\frac{1}{x}$

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{x^2}$，$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{x^2}$

$\therefore\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

$\therefore$通解为$\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy=C$

$\int_{x_0}^{x}\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx+\int_{y_0}^{y}\left(-\frac{1}{x_0}\right)dy=C$

取$x_0=1$，$y_0=0$

通解为$\int_{1}^{x}\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx+\int_{0}^{y}\left(-\frac{1}{1}\right)dy=C$

$\left(x+\frac{-y}{x}\right)\Big|_1^x+(-y)|_0^y=C$

$x+\frac{-y}{x}-\left(1+\frac{-y}{1}\right)+(-y)-0=C$

$x-\frac{y}{x}-1+y-y=C$

$x-\frac{y}{x}-1=C$

即 $x-\frac{y}{x}=C$

12、设函数 $y(x)$满足方程$y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$，求 $y(x)$

解：②$r^2+2r+k=0$

$\Rightarrow\left(r+1-\sqrt{1-k}\right)\left(r+1+\sqrt{1-k}\right)=0$

解得$r_1=-1+\sqrt{1-k}$，$r_2=-1-\sqrt{1-k}$

③单实根$\alpha_1=-1+\sqrt{1-k}$，$\alpha_2=-1-\sqrt{1-k}$

解 $C_1e^{\left(-1+\sqrt{1-k}\right)x}$，$C_2e^{\left(-1-\sqrt{1-k}\right)x}$

④通解为 $y(x)=C_1e^{\left(-1+\sqrt{1-k}\right)x}+C_2e^{\left(-1-\sqrt{1-k}\right)x}$，$C_1$、$C_2$是任意常数

13、微分方程$y''+2y'+3y=0$ 的通解为 y=_________。

解：②$r^2+2r+3=0$

$\Rightarrow\left(r+1-\sqrt{2}i\right)\left(r+1+\sqrt{2}i\right)=0$

解得$r_1=-1+\sqrt{2}i$，$r_2=-1-\sqrt{2}i$

③一对复根$-1\pm\sqrt{2}i$

解 $e^{-x}\left(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x\right)$

④通解为 $y=e^{-x}\left(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x\right)$，$C_1$、$C_2$是任意常数

14、求满足条件$\begin{cases}y''+4y'+4y=0\\y(0)=2\\y'(0)=-4\end{cases}$的函数 $y(x)$

解：②$r^2+4r+4=0$

$\Rightarrow(r+2)(r+2)=0$

解得$r_1=r_2=-2$

③二重实根 $\alpha=-2$

解 $e^{-2x}(C_1+C_2x)$

④通解为 $y(x)=e^{-2x}(C_1+C_2x)$

$y'(x)=-2e^{-2x}(C_1+C_2x)+e^{-2x}\cdot C_2=e^{-2x}(C_2-2C_1-2C_2x)$

$y(0)=2 \quad\Rightarrow\quad e^0(C_1+0)=2$

$y'(0)=-4\Rightarrow e^0(C_2-2C_1-0)=-4$

由上述两式解得$\begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 2 \end{cases}$

$\therefore y(x)=2e^{-2x}$

15、$y=e^x(C_1\sin x + C_2\cos x)$为某二阶常系数齐次微分方程的通解，$C_1$、$C_2$是任意常数，求该方程

解：一对复根 $1\pm i$

$r_1=1+i$，$r_2=1-i$

$(r-1-i)(r-1+i)=0$

$r^2-2r+2=0$

$\therefore$微分方程为$y''-2y'+2y=0$

16、求以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ $\left(C_1、C_2、C_3\text{是任意常数}\right)$ 为通解的微分方程

解：C_1e^x　　$C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$

单实根$\alpha_1=1$　一对复根 $0\pm 2i$

$r_1=1$，$r_2=2i$，$r_3=-2i$

$(r-1)(r-2i)(r+2i)=0$

$r^3-r^2+4r-4=0$

$\therefore$微分方程为$y'''-y''+4y'-4y=0$

17、求微分方程$y''+4y'+4y=e^{-2x}$的通解

解：①(齐次方程求解过程请看第 14 题)

特征方程有二重实根 $\alpha=-2$

齐次方程的通解为$\bar{y}=e^{-2x}(C_1+C_2x)$

②$f(x)=e^{-2x}=1\cdot x^0\cdot e^{-2x}$ $\Rightarrow \lambda=-2$，$m=0$

③λ 是特征方程的重根 $\Rightarrow k=2$

④设方程的特解为$y^*=x^k(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)e^{\lambda x}$

$$=x^2(b_0x^0+\cdots+b_0x^0)e^{-2x}$$
$$=x^2\cdot b_0x^0\cdot e^{-2x}$$
$$=b_0x^2e^{-2x}$$

将$y^*=b_0x^2e^{-2x}$代入方程，有$(2b_0-8b_0x+4b_0x^2)e^{-2x}+4\cdot(2b_0x-2b_0x^2)e^{-2x}+4\cdot b_0x^2e^{-2x}=e^{-2x}$

$$2b_0e^{-2x}=e^{-2x}$$

$$b_0=\frac{1}{2}$$

$\therefore y^*=\frac{1}{2}x^2e^{-2x}$

⑤通解 $y=\bar{y}+y^*=e^{-2x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{2}x^2e^{-2x}$，$C_1$、$C_2$是任意常数

18、求微分方程$y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$ 的通解，其中常数 $a>0$

解：①齐次方程为$y'''+6y''+(9+a^2)y'=0$

$$r^3+6r^2+(9+a^2)r=0$$

$$\Rightarrow r(r+3+ai)(r+3-ai)=0$$

解得$r_1=0$，$r_2=-3-ai$，$r_3=-3+ai$

单实根$\alpha_1=0$　　一对复根$-3\pm ai$

解　　C_1　　$e^{-3x}(C_2\cos ax+C_3\sin ax)$

通解为$\bar{y}=C_1+e^{-3x}(C_2\cos ax+C_3\sin ax)$

②$f(x)=1=1\cdot x^0\cdot e^{0\cdot x}$ $\Rightarrow \lambda=0$，$m=0$

③λ 是特征方程的单根 $\Rightarrow k=1$

④设方程的特解为$y^*=x^k(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)e^{\lambda x}$

$$=x^1(b_0x^0+\cdots+b_0x^0)e^{0\cdot x}$$

$$=x\cdot b_0x^0\cdot 1$$

$$=b_0x$$

将$y^*=b_0x$ 代入方程，有 $0+6\cdot 0+(9+a^2)\cdot b_0=1$

$$(9+a^2)\cdot b_0=1$$

$$b_0=\frac{1}{9+a^2}$$

$\therefore y^*=\frac{x}{9+a^2}$

⑤通解 $y=\bar{y}+y^*=C_1+e^{-3x}(C_2\cos ax+C_3\sin ax)+\frac{x}{9+a^2}$，$C_1$、$C_2$、$C_3$是任意常数

19、$y''-4y=e^{2x}$的通解为________。

解：①齐次方程为$y''-4y=0$

$$r^2-4=0$$

$$\Rightarrow(r-2)(r+2)=0$$

解得$r_1=2$，$r_2=-2$

单实根$\alpha_1=2$，$\alpha_2=-2$

解　　C_1e^{2x}，C_2e^{-2x}

通解为$\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

②$f(x)=e^{2x}=1\cdot x^0\cdot e^{2x}\Rightarrow\lambda=2$，$m=0$

③λ 是特征方程的单根 $\Rightarrow k=1$

④设方程的特解为$y^*=x^k(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)e^{\lambda x}$

$$=x^1(b_0x^0+\cdots+b_0x^0)e^{2x}$$
$$=x\cdot b_0x^0\cdot e^{2x}$$
$$=b_0xe^{2x}$$

将$y^*=b_0xe^{2x}$代入方程，有$(4b_0+4b_0x)e^{2x}-4\cdot b_0xe^{2x}=e^{2x}$

$$4b_0e^{2x}=e^{2x}$$

$$b_0=\frac{1}{4}$$

$\therefore y^*=\frac{1}{4}xe^{2x}$

⑤通解 $y=\bar{y}+y^*=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}$，$C_1$、$C_2$是任意常数

20、求微分方程$y''-3y'+2y=2xe^x$的通解

解：①齐次方程为$y''-3y'+2y=0$

$$r^2-3r+2=0$$
$$\Rightarrow(r-1)(r-2)=0$$

解得$r_1=1$，$r_2=2$

单实根$\alpha_1=1$，$\alpha_2=2$

解　　C_1e^x，C_2e^{2x}

通解为$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$

②$f(x)=2xe^x=2\cdot x^1\cdot e^{1\cdot x}\Rightarrow\lambda=1$，$m=1$

③λ 是特征方程的单根 $\Rightarrow k=1$

④设方程的特解为$y^*=x^k(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)e^{\lambda x}$

$$=x^1(b_0x^1+\cdots+b_1x^0)e^x$$

$=x(b_0x+b_1)e^x$

将$y^*=x(b_0x+b_1)e^x$代入方程，有

$(b_0x^2+4b_0x+b_1x+2b_0+2b_1)e^x-3\cdot(b_0x^2+2b_0x+b_1x+b_1)e^x+2\cdot x(b_0x+b_1)e^x=2xe^x$

$(-2b_0x+2b_0-b_1)e^x=2xe^x$

$\begin{cases}-2b_0=2\\2b_0-b_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_0=-1\\b_1=-2\end{cases}$

$\therefore y^*=x(-x-2)e^x$

⑤通解 $y=\bar{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$，$C_1$、$C_2$是任意常数

21、二阶常系数非齐次线性微分方程$y''-4y'+3y=2e^{2x}$的通解为 y=________。

解：①齐次方程为$y''-4y'+3y=0$

$r^2-4r+3=0$

$\Rightarrow(r-1)(r-3)=0$

解得$r_1=1$，$r_2=3$

单实根$\alpha_1=1$，$\alpha_2=3$

解　　C_1e^x，C_2e^{3x}

通解为$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{3x}$

②$f(x)=2e^{2x}=2\cdot x^0\cdot e^{2x}$ $\Rightarrow\lambda=2$，$m=0$

③λ 不是特征方程的单根 $\Rightarrow k=0$

④设方程的特解为$y^*=x^k(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)e^{\lambda x}$

$=x^0(b_0x^0+\cdots+b_0x^0)e^{2x}$

$=1\cdot b_0x^0\cdot e^{2x}$

$=b_0e^{2x}$

将$y^*=b_0e^{2x}$代入方程，有 $4b_0e^{2x}-4\cdot 2b_0e^{2x}+3\cdot b_0e^{2x}=2e^{2x}$

$-b_0e^{2x}=2e^{2x}$

$b_0=-2$

$\therefore y^*=-2e^{2x}$

⑤通解 $y=\bar{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$，$C_1$、$C_2$是任意常数

22、求微分方程$y''+2y'-3y=e^{-3x}$的通解

解：①齐次方程为$y''+2y'-3y=0$

$r^2+2r-3=0$

$\Rightarrow (r-1)(r+3)=0$

解得$r_1=1$，$r_2=-3$

单实根$\alpha_1=1$，$\alpha_2=-3$

解　　C_1e^x，C_2e^{-3x}

通解为$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-3x}$

②$f(x)=e^{-3x}=1\cdot x^0\cdot e^{-3x}$ $\Rightarrow \lambda=-3$，$m=0$

③λ 是特征方程的单根 $\Rightarrow k=1$

④设方程的特解为$y^*=x^k(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)e^{\lambda x}$

$$=x^1(b_0x^0+\cdots+b_0x^0)e^{-3x}$$
$$=x\cdot b_0x^0\cdot e^{-3x}$$
$$=b_0xe^{-3x}$$

将$y^*=b_0xe^{-3x}$代入方程，有$(9b_0x-6b_0)e^{-3x}+2\cdot(b_0-3b_0x)e^{-3x}-3\cdot b_0xe^{-3x}=e^{-3x}$

$$-4b_0e^{-3x}=e^{-3x}$$

$$b_0=-\frac{1}{4}$$

$\therefore y^*=-\frac{1}{4}xe^{-3x}$

⑤通解 $y=\bar{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\frac{1}{4}xe^{-3x}$，$C_1$、$C_2$是任意常数

23、微分方程$y''-2y'+2y=e^x$的通解为_________。

解：①齐次方程为$y''-2y'+2y=0$

$$r^2-2r+2=0$$
$$\Rightarrow (r-1+i)(r-1-i)=0$$

解得$r_1=1-i$，$r_2=1+i$

一对复根 $1\pm i$

解　　$e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$

通解为$\bar{y}=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$

②$f(x)=e^x=1\cdot x^0\cdot e^{1\cdot x}$ $\Rightarrow \lambda=1$，$m=0$

③λ 不是特征方程的根 $\Rightarrow k=0$

④设方程的特解为$y^*=x^k(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)e^{\lambda x}$

$=x^0(b_0x^0+\cdots+b_0x^0)e^x$
$=1\cdot b_0x^0\cdot e^x$
$=b_0e^x$

将$y^*=b_0e^x$代入方程，有$b_0e^x-2\cdot b_0e^x+2\cdot b_0e^x=e^x$

$b_0e^x=e^x$
$b_0=1$

$\therefore y^*=e^x$

⑤通解 $y=\bar{y}+y^*=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^x=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x+1)$，$C_1$、$C_2$是任意常数

24、若二阶常系数齐次线性微分方程$y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程

$y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2$、$y'(0)=0$ 的解为 $y=$__________。

解：二重实根 1

$r_1=r_2=1$
$(r-1)(r-1)=0$
$r^2-2r+1=0$

$\therefore$齐次微分方程为$y''-2y'+y=0$

①特征方程有二重实根 1

齐次方程的通解为$\bar{y}=(C_1+C_2x)e^x$

②$f(x)=x=1\cdot x^1\cdot e^{0\cdot x}$ $\Rightarrow \lambda=0$，$m=1$

③λ 不是特征方程的根 $\Rightarrow k=0$

④设方程的特解为$y^*=x^k(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)e^{\lambda x}$

$=x^0(b_0x^1+\cdots+b_1x^0)e^0$
$=1\cdot(b_0x+b_1)\cdot 1$
$=b_0x+b_1$

将$y^*=b_0x+b_1$代入方程，有 $0-2\cdot b_0+b_0x+b_1=x$

$b_0x+(-2b_0+b_1)=x$

$$\begin{cases}b_0=1\\-2b_0+b_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_0=1\\b_1=2\end{cases}$$

$\therefore y^*=x+2$

⑤通解 $y=\bar{y}+y^*=(C_1+C_2x)e^x+x+2$

$\because y(0)=2$，$\therefore (C_1+C_2\cdot 0)e^0+0+2=2$ 即$C_1+2=2$

$\therefore C_1=0$

$y'=C_2e^x+(C_1+C_2x)e^x+1$，又$y'(0)=0$，$\therefore C_2e^0+(C_1+C_2\cdot 0)e^0+1=0$ 即$C_2+1=0$

$\therefore C_2=-1$

$\therefore$所求解为 $y=(0-1\cdot x)e^x+x+2=x-xe^x+2$

25、$y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$是二阶常系数非齐次线性微分方程$y''+ay'+by=ce^x$的一个特解，求 a、b、c

解：$y=\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{3}e^x}_{\text{齐次方程的通解}}+\underbrace{xe^x}_{\text{非齐次的特解}}$

（注：原本是含C_1、C_2的但C_1、C_2有了具体取值了）

单实根$\alpha_1=2$，$\alpha_2=1$

$r_1=2$，$r_2=1$

$(r-2)(r-1)=0$

$r^2-3r+2=0$

$\therefore$齐次方程为$y''-3y'+2y=0$

$\therefore a=-3$、$b=2$，原方程为$y''-3y'+2y=ce^x$

将非齐次的特解$y^*=xe^x$代入原方程，有$(x+2)e^x-3\cdot(x+1)e^x+2xe^x=ce^x$

$\therefore c=-1$

26、求微分方程$y''-y=\sin x$ 满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$的解

解：①齐次方程为$y''-y=0$

$r^2-1=0$

$\Rightarrow(r-1)(r+1)=0$

解得$r_1=1$，$r_2=-1$

单实根$\alpha_1=1$，$\alpha_2=-1$

解 C_1e^x，C_2e^{-x}

通解为$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}$

②$f(x)=\sin x=e^{0\cdot x}(0\cdot x^0\cdot\cos x+1\cdot x^0\cdot\sin x)\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \beta=1\\ n=0\\ t=0\end{cases}$

③$\lambda+\beta i=i$ 不是特征方程的根 $\Rightarrow k=0$

④n=0、t=0 ⇒m=0

⑤设方程特解为$y^*=x^k[(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_mx^0)\cos\beta x+(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)\sin\beta x]e^{\lambda x}$

$=x^0[(a_0x^0+\cdots+a_0x^0)\cos x+(b_0x^0+\cdots+b_0x^0)\sin x]e^{0\cdot x}$

$=1\cdot(a_0x^0\cos x+b_0x^0\sin x)\cdot 1$

$=a_0\cos x+b_0\sin x$

将$y^*=a_0\cos x+b_0\sin x$ 代入方程，有$(-a_0\cos x-b_0\sin x)-(a_0\cos x+b_0\sin x)=\sin x$

$$-2a_0\cos x-2b_0\sin x=\sin x$$

$$\begin{cases}-2a_0=0\\-2b_0=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=0\\b_0=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\therefore y^*=-\frac{1}{2}\sin x$

⑥通解 $y=\bar{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$

$\because y(0)=0$，$\therefore C_1e^0+C_2e^{-0}-\frac{1}{2}\sin 0=0$ 即$C_1+C_2=0$

$y'=C_1e^x-C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x$，又$y'(0)=\frac{3}{2}$，$\therefore C_1e^0-C_2e^{-0}-\frac{1}{2}\cos 0=\frac{3}{2}$即$C_1-C_2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

联立上述两式，解得$\begin{cases}C_1=1\\C_2=-1\end{cases}$

∴所求解为 $y=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$

27、设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$，其中 f(x)为连续函数，求 f(x)

解：$f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$

$=\sin x-\int_0^x xf(t)\,dt+\int_0^x tf(t)\,dt$

$=\sin x-x\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^x tf(t)\,dt$

$\therefore f'(x)=\cos x-\left[1\cdot\int_0^x f(t)\,dt+x\cdot f(x)\right]+xf(x)$

$=\cos x-\int_0^x f(t)\,dt$

$\therefore f''(x)=-\sin x-f(x)$即$y''+y=-\sin x$

①齐次方程为$y''+y=0$

$r^2+1=0$

$\Rightarrow(r-i)(r+i)=0$

解得$r_1=i$，$r_2=-i$

一对复根 $0\pm i$

解　$C_1\cos x + C_2\sin x$

通解为$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$

② $-\sin x = e^{0\cdot x}(0\cdot x^0\cdot\cos x - 1\cdot x^0\cdot\sin x) \Rightarrow \begin{cases}\lambda=0\\ \beta=1\\ n=0\\ t=0\end{cases}$

③ $\lambda+\beta i=i$ 是特征方程的根 $\Rightarrow k=1$

④ $n=0$、$t=0 \Rightarrow m=0$

⑤设方程特解为$y^*=x^k[(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_mx^0)\cos\beta x+(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)\sin\beta x]e^{\lambda x}$

$$=x^1[(a_0x^0+\cdots+a_0x^0)\cos x+(b_0x^0+\cdots+b_0x^0)\sin x]e^{0\cdot x}$$
$$=x\cdot(a_0x^0\cos x+b_0x^0\sin x)\cdot 1$$
$$=x(a_0\cos x+b_0\sin x)$$

将y^*代入方程，有$[(2b_0-a_0x)\cos x-(2a_0+b_0x)\sin x]+x(a_0\cos x+b_0\sin x)=-\sin x$

$$2b_0\cos x-2a_0\sin x=-\sin x$$

$$\begin{cases}-2b_0=0\\ -2a_0=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_0=\frac{1}{2}\\ b_0=0\end{cases}$$

$\therefore y^*=\frac{x}{2}\cos x$

⑥通解 $y=\bar{y}+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{2}\cos x$

$\because f(0)=\sin 0-\int_0^0(x-t)f(t)\,dt=0-0=0$，$\therefore C_1\cos 0+C_2\sin 0+\frac{0}{2}\cos 0=0$ 即$C_1=0$

$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{\cos x}{2}-\frac{x}{2}\sin x$，又$f'(0)=\cos 0-\int_0^0 f(t)\,dt=1-1=1$

$\therefore -C_1\sin 0+C_2\cos 0+\frac{\cos 0}{2}-\frac{0}{2}\sin 0=1$ 即$C_2+\frac{1}{2}=1$，$\therefore C_2=\frac{1}{2}$

$\therefore$所求解为 $y=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$

28、设$y_1(x)$、$y_2(x)$是二阶常系数齐次线性微分方程的两个特解，则$y_1(x)$与$y_2(x)$能构成该方程的通解，其充分条件为_____。

(A)$y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=0$　　(B)$y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\neq 0$

(C)$y_1(x)y_2'(x)+y_2(x)y_1'(x)=0$　　(D)$y_1(x)y_2'(x)+y_2(x)y_1'(x)\neq 0$

解：本题问的是？$\Rightarrow y_1(x)$与$y_2(x)$能构成该方程的通解

易知$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq C \Rightarrow y_1(x)$与$y_2(x)$能构成该方程的通解

$\therefore \left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right]'\neq 0$

$\therefore \frac{y_1'(x)y_2(x)-y_1(x)y_2'(x)}{y_2^2(x)} \neq 0$

$\therefore y_1'(x)y_2(x)-y_1(x)y_2'(x) \neq 0$，即$y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x) \neq 0$

∴选(B)

29、(数三不用做)

求微分方程$y''=y'+x$ 的通解

解：①令$y'=p$、$y''=p'$

则原方程可化为$p'=p+x$

②$p=e^{-\int -1dx}\left(\int xe^{\int -1dx}dx+C_1\right)$

$=e^x(\int xe^{-x}dx+C_1)$

$=e^x[(-x-1)e^{-x}+C_1]$

$=-x-1+C_1e^x$

③$y=\int p\,dx$

$=\int(-x-1+C_1e^x)\,dx$

$=-\frac{x^2}{2}-x+C_1e^x+C_2$

30、(数三不用做)

求方程$y''=(y')^3+y'$的通解

解：①令$y'=p$、$y''=p\frac{dp}{dy}$

则原方程可化为 $p\frac{dp}{dy}=p^3+p$

$\frac{dp}{dy}=p^2+1$

②$\frac{1}{p^2+1}dp=dy$

$\int\frac{1}{p^2+1}dp=\int dy$

$\arctan p=y+C_1$

$p=\tan(y+C_1)$

③$\frac{dy}{dx}=\tan(y+C_1)$

④$\frac{1}{\tan(y+C_1)}dy=dx$

$\int\frac{1}{\tan(y+C_1)}dy=\int dx$

$\ln|\sin(y+C_1)|=x+C_2$

$|\sin(y+C_1)|=e^{x+C_2}$

$|\sin(y+C_1)|=e^{C_2}e^{x}$

$\sin(y+C_1)=\pm e^{C_2}e^{x}$

$\sin(y+C_1)=C_3e^{x}$

$y+C_1=\arcsin C_3e^{x}$

$y=\arcsin C_3e^{x}+C_4$

31、(数三不用做)

求微分方程$y''+\frac{(y')^2}{1-y}=0$ (其中 $y\neq1$)的通解

解：①令$y'=p$、$y''=p\frac{dp}{dy}$

则原方程可化为 $p\frac{dp}{dy}+\frac{p^2}{1-y}=0$

$\frac{dp}{dy}=\frac{p}{y-1}$

②$\frac{1}{p}dp=\frac{1}{y-1}dy$

$\int\frac{1}{p}dp=\int\frac{1}{y-1}dy$

$\ln|p|=\ln|y-1|+C_1$

$\ln|p|=\ln|y-1|+\ln e^{C_1}$

$\ln|p|=\ln e^{C_1}|y-1|$

$|p|=e^{C_1}|y-1|$

$p=\pm e^{C_1}(y-1)$

$p=C_2(y-1)$

③$\frac{dy}{dx}=C_2(y-1)$

④$\frac{1}{C_2(y-1)}dy=dx$

$\int\frac{1}{C_2(y-1)}dy=\int dx$

$\frac{1}{C_2}\ln|y-1|=x+C_3$

$\ln|y-1|=C_2x+C_2C_3$

$|y-1|=e^{C_2x+C_2C_3}$

$|y-1|=e^{C_2C_3}e^{C_2x}$

$y-1=\pm e^{C_2C_3}e^{C_2x}$

$y-1=C_4e^{C_2x}$

$y=1+C_4e^{C_2x}$

$\because y\neq1$，$\therefore C_4\neq0$

32、(数一数二不用做)

求差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解

解：①原方程可变形为$y_{t+1}+5y_t=\frac{5}{2}t \Rightarrow \lambda=5$

②$y_{t+1}+5y_t=0$ 的通解为$y_c(t)=C(-5)^t$

③$f(t)=\frac{5}{2}t=1^t\cdot\frac{5}{2}t \Rightarrow d=1$、$m=1$

④$\lambda+d=5+1=6\neq0 \Rightarrow y_t^*=d^t(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots b_m)$

$$=1^t(b_0t^1+b_1t^0+\cdots b_1)$$
$$=1\cdot(b_0t^1+b_1)$$
$$=b_0t+b_1$$

⑤将y_t^*代入变形后的方程，有$b_0(t+1)+b_1+5(b_0t+b_1)=\frac{5}{2}t$

$$6b_0t+b_0+6b_1=\frac{5}{2}t$$

$$\begin{cases}6b_0=\frac{5}{2}\\ b_0+6b_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_0=\frac{5}{12}\\ b_1=-\frac{5}{72}\end{cases}\Rightarrow y_t^*=\frac{5}{12}t-\frac{5}{72}$$

⑥通解为$y_t=y_c(t)+y_t^*=C(-5)^t+\frac{5}{12}t-\frac{5}{72}$

33、(数二数三不用做)

欧拉方程$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0$ $(x>0)$的通解为__________。

解：①令 $x=e^t$

②原方程可化为$f''(t)-f'(t)+4f'(t)+2f(t)=0$

即$f''(t)+3f'(t)+2f(t)=0$

③ $r^2+3r+2=0$

$\Rightarrow(r+1)(r+2)=0$

解得$r_1=-1$、$r_2=-2$

单实根$\alpha_1=-1$、$\alpha_2=-2$

解 C_1e^{-t}，C_2e^{-2t}

通解为 $y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}=\frac{C_1}{e^t}+\frac{C_2}{e^{2t}}$，$C_1$、$C_2$是任意常数

④$\because x=e^t$

$\therefore$原方程的通解为 $y=\frac{C_1}{e^t}+\frac{C_2}{(e^t)^2}=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$

34、(数二数三不用做)

求方程$(1+x)^2y''-(1+x)y'+y=\frac{1}{1+x}$的通解

解：①令 $x+1=e^t$

②原方程可化为$f''(t)-f'(t)-f'(t)+f(t)=\frac{1}{e^t}$

即$f''(t)-2f'(t)+f(t)=e^{-t}$

③齐次方程为$f''(t)-2f'(t)+f(t)=0$

$r^2-2r+1=0$

$\Rightarrow(r-1)(r-1)=0$

解得$r_1=1$，$r_2=1$

二重实根 $\alpha=1$

解　　$e^t(C_1+C_2t)$

齐次方程的通解为$\bar{y}=e^t(C_1+C_2t)$

$e^{-t}=1\cdot x^0\cdot e^{-1\cdot t}\ \Rightarrow\lambda=-1$，$m=0$

λ 不是特征方程的根 $\Rightarrow k=0$

设方程的特解为$y^*=t^k(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_mt^0)e^{\lambda t}$

$=t^0(b_0t^0+\cdots+b_0t^0)e^{-t}$

$=1\cdot b_0t^0\cdot e^{-t}$

$=b_0e^{-t}$

将$y^*=b_0e^{-t}$代入方程，有$b_0e^{-t}-2\cdot(-b_0e^{-t})+b_0e^{-t}=e^{-t}$

$4b_0e^{-t}=e^{-t}$

$b_0=\frac{1}{4}$

$\therefore y^*=\frac{1}{4}e^{-t}$

通解 $y=\bar{y}+y^*=e^t(C_1+C_2t)+\frac{1}{4}e^{-t}=e^t(C_1+C_2t)+\frac{1}{4e^t}$，$C_1$、$C_2$是任意常数

④$\because x+1=e^t$

$\therefore t=\ln(x+1)$

$\therefore$原方程的通解为 $y=(1+x)[C_1+C_2\ln(1+x)]+\frac{1}{4(1+x)}$