启航教育 云图 YUN TU 2024版

张宇考研数学系列丛书·一

张宇考研数学基础30讲
——基础300题

【高等数学分册】

主编 张宇

副主编 高昆轮

赠

本书配套习题课
扫码听讲

张宇考研数学系列丛书·一

张宇考研数学基础30讲——基础300题

【高等数学分册】

○ 主编 张宇

○ 副主编 高昆轮

启航教育 云图 YUN TU

目录

习题演练

参考答案

习题演练

第1讲 高等数学预备知识

1.1 设函数 $f(x)=\begin{cases}2, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=($　　$)$.

(A)0　　　　(B)2

(C)$\begin{cases}2, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　　　(D)$\begin{cases}2, & |x|>1,\\ 0, & |x|\leqslant 1\end{cases}$

1.2 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$,则 $f(x)=$________.

1.3 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$并写出它的定义域.

1.4 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2,\end{cases}$ 写出 $f(x)$的反函数 $g(x)$的表达式.

1.5 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,$f_1(x)=f[f(x)]$,$f_2(x)=f[f_1(x)]$,$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$$(n=1,2,3,\cdots)$.求 $f_n(x)$的解析表达式.

第2讲 数列极限

2.1 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，则(　　).

(A)对任意 n，$a_n<b_n$ 成立

(B)存在正整数 N，当 $n>N$ 时，总有 $a_n<b_n$

(C)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$必定存在

(D)$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ 可能不存在

2.2 设 $x_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-1}$，$n=1,2,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$________.

2.3 设 $a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$，则对$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$和$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$，说法正确的是(　　).

(A)前者存在，但后者不存在

(B)前者存在，且后者也存在

(C)前者不存在，但后者存在

(D)前者不存在，且后者也不存在

2.4 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$________.

2.5 设数列$\{x_n\}$满足 $x_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}$，则(　　).

(A)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(B)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，但不为零

(C)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在

(D)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 可能存在，也可能不存在

2.6 设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{99}}{n^k-(n-1)^k}$存在且不为零，则常数 $k=$________.

2.7 求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

2.8 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$.

2.9 设 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，$x_1=\sqrt{2}$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2.10 设 $x_1=25$，$x_{n+1}=\arctan x_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

(1)证明数列$\{x_n\}$有极限，并求此极限；

(2)求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n+1}}{x_n^3}$.

第3讲 函数极限与连续性

3.1 下列各式正确的是( ).

(A)$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}=1$

(B)$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$

(C)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=1$

(D)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$

3.2 当 $x\to1$ 时,$2e^{\frac{1}{x-1}}$的极限( ).

(A)等于 2

(B)等于 0

(C)为∞

(D)不存在,但不为∞

3.3 当 $x\to0^+$ 时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是( ).

(A)$e^{-\sqrt{x}}-1$

(B)$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

(C)$\ln\sqrt{1+x}$

(D)$\ln(1-\sqrt{x})$

3.4 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x=$________.

3.5 求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$.

3.6 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(2+x^2)\ln(1+x)}$.

3.7 当 $x\to0^+$ 时,若 $\sin x^a$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}$ 均是比 x 高阶的无穷小量,求 a 的取值范围.

3.8 当 $x\to0$ 时,$\tan x-\ln(1+x)\sim ax^b$,求 a 和 b 的值.

3.9 设函数 $f(x)=\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$,则( ).

(A)$x=-1$ 为可去间断点,$x=1$ 为无穷间断点

(B)$x=-1$ 为无穷间断点,$x=1$ 为可去间断点

(C)$x=-1$ 和 $x=1$ 均为可去间断点

(D)$x=-1$ 和 $x=1$ 均为无穷间断点

3.10 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

3.11 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{(x^2-1)|x|}$，求其间断点，并指出其类型.

3.12 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续？若不连续，修改函数在 $x=1$ 处的定义，使之连续.

第4讲 一元函数微分学的概念与计算

4.1 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则(　　).

(A) $f(0)\neq 0$，但 $f'(0)$ 可能不存在

(B) $f(0)=0$，但 $f'(0)$ 可能不存在

(C) $f'(0)$ 存在，但 $f'(0)$ 不一定等于零

(D) $f'(0)$ 存在，且必定有 $f'(0)=0$

4.2 设 $f(x)=x^a|x|$，a 为正整数，则函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处(　　).

(A)极限不存在　　(B)极限存在，但不连续

(C)连续但不可导　　(D)可导

4.3 设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$，当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$(　　).

(A) -1　　(B) 0.1　　(C) 1　　(D) 0.5

4.4 设 $f(x^2)=\frac{1}{1+x^2}$，则当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=$(　　).

(A) $\frac{1}{1+x^2}$　　(B) $\frac{-1}{(1+x)^2}$　　(C) $\frac{1}{(1+x^2)^2}$　　(D) $\frac{-1}{(1+x^2)^2}$

4.5 设 $f(x)=(x-a)\cdot\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 连续，则 $f'(a)=$________.

4.6 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 $f(x)$ 为可微函数，则 $dy=$________.

4.7 设函数 $y=y(x)$ 由 $\sin(x^2y)=xy$ 确定，则 $dy=$________.

4.8 设 $y=y(x)$ 由方程 $x=y^y$ 确定，则 $dy=$________.

4.9 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1-2t)^{-\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$________.

4.10 设 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$，则当 $n\geqslant 1$ 时，$y^{(n)}(x)=$________.

4.11 设 $y=e^{x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dy}{d(x^2)}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

4.12 已知 $g(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $g(0)=g'(0)=0$，设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

证明 $f(x)$ 的导函数在 $x=0$ 处连续.

第5讲 一元函数微分学的几何应用

5.1 函数 $y=(x-1)^2(x-2)^2(-3\leqslant x\leqslant 4)$ 的值域是________.

5.2 设 $y=2x^2+ax+3$ 在 $x=1$ 处取得极值，求 a 的值，并判定 $x=1$ 是极小值点还是极大值点.

5.3 将长为 a 的一段铁丝截成两段，用一段围成正方形，另一段围成圆，为使正方形与圆的面积之和最小，问两段铁丝的长各为多少？

5.4 若 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1$，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处（　）.

(A)取得极大值　　(B)取得极小值

(C)无极值　　(D)不一定有极值

5.5 设 $f(x)=f(-x)$，且在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内的单调性和图形的凹凸性分别是（　）.

(A)单调增加，凸　　(B)单调减少，凸

(C)单调增加，凹　　(D)单调减少，凹

5.6 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 的凸区间为________.

5.7 曲线 $y=x^{\frac{5}{3}}+3x+5$ 的拐点坐标为________.

5.8 设 $f(x)$ 的二阶导数连续，且 $(x-1)f''(x)-2(x-1)f'(x)=1-e^{1-x}$.

(1)若 $x=a(a\neq 1)$ 是 $f(x)$ 的极值点，证明：$x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点；

(2)若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极值点，请确定它是 $f(x)$ 的极大值点还是极小值点.

5.9 曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$（　）.

(A)有且仅有水平渐近线　　(B)有且仅有铅垂渐近线

(C)既有水平渐近线，也有铅垂渐近线　　(D)既无水平渐近线，也无铅垂渐近线

5.10 曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+2}$ 的斜渐近线方程是________.

5.11 函数 $y=x^x$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 上（　）.

(A)不存在最大值和最小值　　(B)最大值是 $e^{\frac{1}{e}}$

(C)最大值是 $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$　　(D)最小值是 $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

5.12 作函数 $y=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$ 的图形，并填写下表.

单调增加区间		凹区间	
单调减少区间		凸区间	
极值点		拐　点	
极　值		渐近线	

第6讲 中值定理

6.1 验证拉格朗日中值定理对函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$ 在区间 $[0,2]$ 上的正确性.

6.2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：

(1)存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$；

(2)存在 $\eta\in(a,b)$，使 $\eta f(\eta)+f'(\eta)=0$.

6.3 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$.

6.4 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

(1)存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{2}$；

(2)存在不同两点 $x_1,x_2\in(0,1)$，使得 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$.

6.5 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(a,b>0)$，在 (a,b) 内可导且 $f(a)\neq f(b)$. 证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}=\dfrac{f'(\eta)}{b+a}$.

6.6 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=-1$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\geqslant 8$.

第7讲 零点问题与微分不等式

7.1 证明方程$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=0$有两个实根.

7.2 若$\frac{a_n}{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}+\cdots+a_0=0$,证明方程$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$在$(0,1)$内至少有一个实根.

7.3 设在$[1,+\infty)$上,$f''(x)<0$,$f(1)=2$,$f'(1)=-3$.证明:$f(x)=0$在$(1,+\infty)$内只有一个实根.

7.4 当a取下列哪个值时,函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$恰有两个不同的零点(　　).

(A)2　　(B)4　　(C)6　　(D)8

7.5 证明不等式$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x}\ (0<x<+\infty)$.

7.6 设$b>a\geqslant e$,证明:$a^b>b^a$.

7.7 证明不等式:

(1)当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$x<\tan x$;

(2)当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$(x^2+\sqrt{4+x^4})\cos x<2$.

第8讲 一元函数积分学的概念与计算

8.1 设下列不定积分存在，则下列命题正确的是(　　).

(A) $\int f'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(2x)+C$　　(B) $\left[\int f(2x)\mathrm{d}x\right]'=2f(2x)$

(C) $\int f'(2x)\mathrm{d}x=f(2x)+C$　　(D) $\left[\int f(2x)\mathrm{d}x\right]'=\frac{1}{2}f(2x)$

8.2 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $x\cos x$，则 $f(x)$ 等于(　　).

(A) $\sin x-x\cos x$　　(B) $\sin x+x\cos x$

(C) $\cos x-x\sin x$　　(D) $\cos x+x\sin x$

8.3 若 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，求 $\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$.

8.4 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

8.5 设 $x\mathrm{e}^{-x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int xf(x)\mathrm{d}x$.

8.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)=$________.

8.7 在闭区间 $[a,b]$ 上，设 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$. 记 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,S_2=f(b)(b-a),S_3=\frac{1}{2}[f(b)+f(a)](b-a)$，则有(　　).

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_3<S_1<S_2$

(C) $S_2<S_3<S_1$　　(D) $S_2<S_1<S_3$

8.8 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则(　　).

(A) $F(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

(B) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但在 $x=0$ 处不可导

(C) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且满足 $F'(x)=f(x)$

(D) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，但不一定满足 $F'(x)=f(x)$

8.9 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$________.

8.10 求连续函数 $f(x)$，使它满足 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=f(x)+x\sin x$.

8.11 设 $f(x)$在$[-1,1]$上连续且 $f(x)>0$. 证明:曲线 $y=\int_{-1}^{1}|x-t|f(t)\mathrm{d}t$ 在$-1\leqslant x\leqslant 1$ 上是凹的.

8.12 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$,求 a 的值.

8.13 求反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x(\alpha\neq 0)$.

第9讲 一元函数积分学的几何应用

9.1 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围成的封闭图形的面积为(　　).

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(B) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(D) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

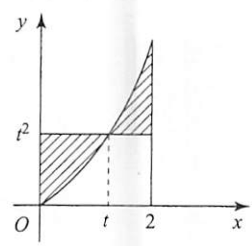
9.2 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域的面积用定积分表示为(　　).

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$　　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$　　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta$

9.3 由曲线 $y=\ln x$ 与两条直线 $y=\mathrm{e}+1-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是________.

9.4 设 $y=x^2$ 定义在$[0,2]$上，t 为$[0,2]$上任意一点，如图所示，当 t 取何值时，图中阴影部分面积之和最小？



9.5 设曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作切线，求此切线与所给曲线及 x 轴所围图形的面积.

9.6 位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(0\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为________.

9.7 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 围成的封闭图形绕直线 $y=1$ 旋转一周所得旋转体的体积为________.

9.8 曲线 $y=x^3$，直线 $x=1$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积为________.

9.9 过曲线 $y=x^2$ 上一点$(1,1)$作切线，求切线方程，并求该切线与曲线及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

9.10 求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转一周所得旋转体的体积.

第10讲 积分等式与积分不等式

10.1 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，证明：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

并计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

10.2 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且有 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

10.3 设 $\varphi(x)$ 是可微函数 $f(x)$ 的反函数，且 $f(1)=0$，证明：

$$\int_0^1\left[\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$$

10.4 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x = f(0)$. 证明：在 $(0,1)$ 内存在一点 c，使得 $f'(c)=0$.

10.5 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x$，证明：至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$.

10.6 设 $f(x)$，$g(x)$ 的导数在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0$，$f'(x)\geqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$. 证明：对任意 $a\in[0,1]$，有 $\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1)$.

10.7 设 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $f(0)=0$，证明：

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}Ma^2,$$

其中，$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}\{|f'(x)|\}$.

10.8 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明：

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

10.9 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$f''(x)>0$，证明 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant 1$.

第11讲 多元函数微分学

11.1 设 $f(0,0)=0$，当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 取下列哪个函数可使 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续？(　　)

(A) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$　　(B) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　　(C) $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$　　(D) $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

11.2 设 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处的偏导数存在，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}=$(　　).

(A) $f_1'(a,b)$　　(B) $f_1'(a+x,b)$

(C) $2f_1'(a,b)$　　(D) 0

11.3 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

11.4 利用变量代换 $u=x,v=\dfrac{y}{x}$，可将方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ 化成新方程(　　).

(A) $u\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$　　(B) $v\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　　(C) $u\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　　(D) $v\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$

11.5 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{xy}$，则 $f_x'(x,1)=$________.

11.6 设函数 $z=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^2$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=$________.

11.7 设 $z=\mathrm{e}^{-x}-f(x-2y)$，其中 f 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

11.8 设 $z=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

11.9 设 $z=z(x,y)$ 由 $(z+y)^x=x^2$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=$________.

11.10 设 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，则点 $(0,0)$(　　).

(A)为 z 的驻点且为极小值点　　(B)为 z 的驻点但不为极小值点

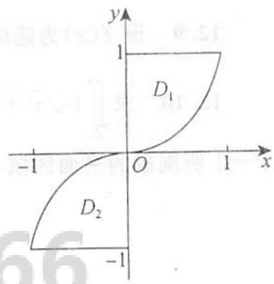
(C)不为 z 的驻点但为极小值点　　(D)不为 z 的驻点也不为极小值点

11.11 求二元函数 $f(x,y)=x^2y^2+x\ln x$ 的极值.

11.12 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

第12讲 二重积分

12.1 如图所示，区域 D 是由曲线 $y=x^3$，$y=-1$，$y=1$ 及 y 轴围成的封闭图形，D_1 为 D 位于第一象限的部分，D_2 为 D 位于第三象限的部分，则以 D 为底，以 $z=x^3+y$ 为顶的曲顶柱体的体积为（　　）.



(A) $\iint\limits_D (x^3+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(B) $\iint\limits_D 2x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $-\iint\limits_{D_1}(x^3+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^3+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(D) $\iint\limits_{D_1}(x^3+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}(x^3+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

12.2 设平面区域 D 由 $x=0$，$y=0$，$x+y=\frac{1}{4}$，$x+y=1$ 围成，若 $I_1=\iint\limits_D[\ln(x+y)]^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_D[\sin(x+y)]^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 I_1,I_2,I_3 的大小顺序为（　　）.

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$　　(C) $I_1<I_3<I_2$　　(D) $I_3<I_1<I_2$

12.3 设 $I_1=\iint\limits_D(x^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_D(x^3-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_D(x^3+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，则（　　）.

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_1<I_2$

(C) $I_2<I_3<I_1$　　(D) $I_1<I_3<I_2$

12.4 设区域 D 是由曲线 $y=\sin x$ 与直线 $x=\pm\frac{\pi}{2}$，$y=1$ 围成的平面区域，则 $\iint\limits_D(xy^5-1)\mathrm{d}\sigma=$ ________.

12.5 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}y=$（　　）.

(A) $\frac{\pi}{4}(\cos 2-1)$　　(B) $\frac{\pi}{4}(-\cos 2+1)$

(C) $\frac{\pi}{4}(\cos 2+1)$　　(D) $\frac{\pi}{4}(-\cos 2-1)$

12.6 设函数 $f(t)$ 连续，区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$，则 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）.

(A) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)\mathrm{d}y$　　(B) $2\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}r$　　(D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\mathrm{d}r$

12.7 设 $f(u)$ 为连续函数，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{2\cos\theta}^{2} f(r^2) r \mathrm{d}r$ 化为在直角坐标系下的二次积分为________.

12.8 设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2 \mathrm{d}y \int_1^y f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x =$ (　　).

(A) $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^{4-x} f(x,y)\mathrm{d}y$

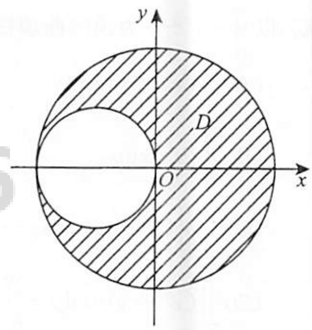
(B) $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_x^{4-x} f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_1^2 \mathrm{d}y \int_1^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x$

(D) $\int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^{2} f(x,y)\mathrm{d}x$

12.9 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t) = \int_1^t \mathrm{d}y \int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(t) =$________.

12.10 求 $\iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2} + y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域，如图所示.



第13讲 常微分方程

13.1 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的特解 $y_1(x),y_2(x)$,C 为任意常数,则该方程的通解为(　　).

(A)$C[y_1(x)-y_2(x)]$　　(B)$y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

(C)$C[y_1(x)+y_2(x)]$　　(D)$y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

13.2 微分方程 $y''-4y'+4y=x^2+8e^{2x}$ 的一个特解应具有的形式为(其中 a,b,c,d 为常数)(　　).

(A)$ax^2+bx+ce^{2x}$　　(B)$ax^2+bx+c+dx^2e^{2x}$

(C)$ax^2+bx+cxe^{2x}$　　(D)$ax^2+(bx^2+cx)e^{2x}$

13.3 设以下的 A,B,C 为常数,微分方程 $y''+2y'-3y=e^x\sin^2 x$ 有特解形如(　　).

(A)$e^x(A+B\cos 2x+C\sin 2x)$　　(B)$e^x(Ax+B\cos 2x+C\sin 2x)$

(C)$e^x(A+Bx\cos 2x+Cx\sin 2x)$　　(D)$xe^x(A+B\cos 2x+C\sin 2x)$

13.4 微分方程 $y'\tan x=y\ln y$ 的通解是________.

13.5 设 $f(x)$ 连续,且 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}f(x)+1$,求 $f(x)$.

13.6(仅数学一) 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xy}{x^2+y}$ 的通解为________.

13.7(仅数学一、数学二) 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为________.

13.8(仅数学一、数学二) 求微分方程 $yy''-y'^2=0$ 满足初值条件 $y\big|_{x=0}=1,y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解.

13.9 以 $y=x^2-e^x$ 与 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程是________.

13.10 已知 $y_1=xe^x+e^{-x}$ 是某二阶非齐次线性微分方程的特解,$y_2=(x+1)e^x$ 是对应二阶齐次线性微分方程的特解,求此非齐次线性微分方程.

13.11 求微分方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解.

13.12 设四阶常系数齐次线性微分方程 $y^{(4)}-y'''+y''-y'=0$.

(1)求上述微分方程的通解 $y(x)$;

(2)求在 $x\to 0$ 时是 x 的三阶无穷小的解 $y(x)$.

第14讲 无穷级数（仅数学一、数学三要求）

14.1 下列命题错误的是（　　）.

(A)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=k}^{\infty}a_n$ 敛散性相同

(B)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 必发散

(C)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$

(D)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$

14.2 有以下命题：

①若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

②若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+100}$ 收敛；

③若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

④若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛.

则其中正确的是（　　）.

(A)①②　　(B)②③　　(C)③④　　(D)①④

14.3 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$（　　）.

(A)条件收敛　　(B)绝对收敛

(C)发散　　(D)敛散性不确定

14.4 判别下列正项级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n+2}\right)^n$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$.

14.5 若级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$收敛，则 $k=$（　　）.

(A)1　　(B)2

(C)−1　　(D)−2

14.6 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，常数 $\lambda>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\sin\frac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$（　　）.

(A)绝对收敛　　(B)条件收敛

(C)发散　　(D)收敛性与 λ 有关

14.7 设常数 $k>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{3/2}-k}{n^{5/2}}$（　　）.

(A)发散　　(B)绝对收敛

(C)条件收敛　　(D)收敛性与 k 有关

14.8 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛，则其收敛半径 $R=$________.

14.9 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(x-2)^n$ 的收敛域为________.

14.10 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

14.11 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

14.12 e^x 展开成的 $x-3$ 的幂级数为________.

14.13 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ 展开成 x 的幂级数，并指出其收敛区间.

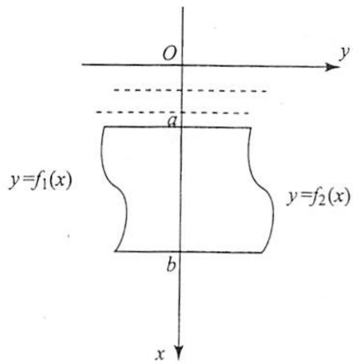
第15讲　数学一、数学二专题内容

15.1　质点 P 沿抛物线 $x=y^2(y>0)$ 移动，P 的横坐标 x 对时间的变化率为 5 cm/s. 当 $x=9$ 时，点 P 到原点 O 的距离对时间的变化率为________.

15.2　设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t\end{cases}$ 所确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程为________.

15.3　设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+\mathrm{e}^t,\\ y=\sin t\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$________.

15.4　由曲线 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ 及直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 所围成的平面板铅直地没入容重为 $r(r=\rho g$，表示单位体积液体的重力)的液体中，x 轴铅直向下，液面与 y 轴重合，如图所示，平面板所受液压力为(　　).



(A) $\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$　　(B) $\int_a^b rx[f_1(x)-f_2(x)]\mathrm{d}x$

(C) $\int_a^b r[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$　　(D) $\int_a^b rx[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$

15.5　曲线 $r=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}(a>0,0\leqslant\theta\leqslant 3\pi)$ 的弧长为________.

15.6　设某物体的温度 T 与时间 t 满足函数关系：

$$T=a(1-\mathrm{e}^{-kt})+b,$$

其中 T 的单位是 ℃，t 的单位是 min. 现将该物体放入 200 ℃的高温介质中.

(1)若物体的初始温度是 20 ℃，求 a 和 b；

(2)在(1)的条件下，若物体温度以 2 ℃/min 的速率开始上升，求 k.

15.7(仅数学一)　求方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2y=x^2$ 的通解.

15.8(仅数学一) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -\pi\leqslant x<0,\\ -5, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pm\pi$ 处收敛于________.

15.9(仅数学一) 函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 在$[-\pi,\pi]$上展开为傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则 $a_n=$________, $b_n=$________, 和函数 $S(x)=$________.

15.10(仅数学一) 将函数 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$展开成以 2 为周期的傅里叶级数,并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

第16讲 数学三专题内容

16.1 设某商品需求函数为 $Q=20-3P$，其中 P 为价格，则该商品的边际收益为________.

16.2 设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$，需求的价格弹性为 ε，$0<\varepsilon<1$. 已知产品收益 R 对价格的边际为 s，且产销平衡，则产品的产量应是________（用 ε，s 的函数表示）.

16.3 某商品的需求量 Q 对价格 P 的弹性为 $P\ln 3$，该商品的市场最大需求量为1 500件，则需求函数 $Q=$________.

16.4 当某商品销售量为 a 时，边际收入为 $R'(a)=200-\dfrac{a}{50}$，求销售量为2 000时的平均单位收入.

16.5 某产品的总成本 C（单位：万元）的变化率是产量 x（单位：百台）的函数 $C'(x)=4+\dfrac{x}{4}$，固定成本为 1 万元. 总收入 R 的变化率是产量 x 的函数 $R'(x)=8-x$. 问产量为多少时，总利润 $L=R-C$ 最大？并求出这个最大利润.

16.6 设某产品的总成本函数为 $C(x)=400+3x+\dfrac{1}{2}x^2$，而价格 $p=\dfrac{100}{\sqrt{x}}$，其中 x 为产量（假定等于需求量），求：

(1)边际成本；(2)边际收益；(3)边际利润；(4)收益的价格弹性.

16.7 已知某企业的总收入函数为 $R=26x-2x^2-4x^3$，总成本函数为 $C=8x+x^2$，其中 x 表示产品的产量，求利润函数，边际收入函数，边际成本函数，以及企业获得最大利润时的产量和最大利润.

16.8 求下列函数的一阶与二阶差分.

(1) $y_x=1-2x^2$；

(2) $y_x=x\cdot 3^x$.

16.9 求一阶非齐次线性差分方程 $\Delta y_x=3$ 满足初始条件 $y_0=2$ 的特解.

第17讲 多元函数积分学的基础知识（仅数学一要求）

17.1 设$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，且$\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$，则$z=$________.

17.2 过点$(1,2,-1)$且过z轴的平面方程为________.

17.3 过点$(1,2,-1)$且垂直于平面$2x-y+3z=5$的直线方程为________.

17.4 设直线$l:\begin{cases}x+y-z+1=0,\\x-y+3z+3=0,\end{cases}$平面$\Pi:x-2y-z+3=0$，则直线$l$(　　).

(A)平行于Π　　(B)在Π上

(C)垂直于Π　　(D)与Π相交但不垂直

17.5 求直线$l:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$在平面$\Pi:3x-y+3z=5$上的投影直线$l_0$的方程.

17.6 经过点$A(1,0,0)$与点$B(0,1,1)$的直线绕z轴旋转一周生成的曲面方程是________.

17.7 在曲线$x=t,y=-t^2,z=t^3$的所有切线中，与平面$x+2y+z=4$平行的切线(　　).

(A) 只有1条　　(B) 只有2条　　(C) 至少有3条　　(D) 不存在

17.8 已知$\boldsymbol{F}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$，则在点$(1,0,-1)$处的$\operatorname{div}\boldsymbol{F}$为________.

17.9 设$u=x^2+3y+yz$，则$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\,u)=$________.

17.10 向量场$\boldsymbol{A}=(z,3x,2y)$在点$M(x,y,z)$处的旋度$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=$________.

17.11 已知曲面$z=4-x^2-y^2$上点P处的切平面平行于平面$2x+2y+z-1=0$，则点P的坐标是(　　).

(A)$(1,-1,2)$　　(B)$(-1,1,2)$　　(C)$(1,1,2)$　　(D)$(-1,-1,2)$

17.12 设u是由方程$e^{z+u}-xy-yz-zu=0$所确定的x,y,z的隐函数，求$u=u(x,y,z)$在点$P(1,1,0)$处方向导数的最大值.

第18讲 三重积分、曲线曲面积分（仅数学一要求）

18.1 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\leqslant 1, z\geqslant 0$；$\Omega_2: x^2+y^2+z^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$. 则有（　）.

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}\sin x\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2}\sin x\mathrm{d}v$　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1}\sin y\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2}\sin y\mathrm{d}v$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}\sin z\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2}\sin z\mathrm{d}v$　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1}\sin xyz\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2}\sin xyz\mathrm{d}v$

18.2 设空间区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, z\geqslant x^2+y^2, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\leqslant z\leqslant\sqrt{\pi}\right\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega}\sin z^2\mathrm{d}v=$ ________.

18.3 设 L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ x+y+z=0,\end{cases}$ 则 $\int_L(3x^2-y^2-z^2)\mathrm{d}s=$（　）.

(A) 27π　　(B) 18π　　(C) 12π　　(D) 6π

18.4 设 Σ 是 yOz 平面上的圆域 $y^2+z^2\leqslant 1$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=$（　）.

(A) 0　　(B) π　　(C) $\frac{1}{4}\pi$　　(D) $\frac{1}{2}\pi$

18.5 设 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$，已知 Σ 的面积为 A，则第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}[(2x+3y)^2+(6z-1)^2]\mathrm{d}S=$ ________.

18.6 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}x(4x-z)\mathrm{d}S=$ ________.

18.7 设 Σ 为球面 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+3y+z)\mathrm{d}S=$（　）.

(A) 4π　　(B) 2π　　(C) π　　(D) 0

18.8 设 L 为自点 $O(0,0)$ 沿曲线 $y=\sin x$ 至点 $A(\pi,0)$ 的有向弧段，计算平面第二型曲线积分

$$I=\int_L[\mathrm{e}^x\cos y+2(x+y)]\mathrm{d}x+\left(-\mathrm{e}^x\sin y+\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}y.$$

18.9 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$，其法向量与 z 轴正向夹角为锐角.

18.10 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

18.11 计算曲线积分

$$\oint_C(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z,$$

其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 从 z 轴正向往 z 轴负向看 C 的方向是顺时针的.

18.12 计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线,从 z 轴正向看去,L 为逆时针方向.

参考答案

第1讲 高等数学预备知识

1.1 (D) **解** 由 $f(x)=\begin{cases}2, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 可知

$$f[f(x)]=\begin{cases}2, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1,\end{cases}$$

因此

$$f[f(x)]=\begin{cases}2, & |x|>1,\\ 0, & |x|\leqslant 1,\end{cases}$$

故选(D).

1.2 $\dfrac{x}{x^2-2}$ **解** 由于

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}=\frac{x^2\left(\dfrac{1}{x}+x\right)}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+x^2\right)}=\frac{\dfrac{1}{x}+x}{\left(\dfrac{1}{x}+x\right)^2-2},$$

因此 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$.

1.3 **解** 由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 得 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$，因此

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},\ x\leqslant 0.$$

1.4 **解** 当 $x<-1$ 时，由 $y=1-2x^2$，得 $x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}(y<-1)$；

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，由 $y=x^3$，得 $x=\sqrt[3]{y}(-1\leqslant y\leqslant 8)$；

当 $x>2$ 时，由 $y=12x-16$，得 $x=\dfrac{y+16}{12}(y>8)$.

综上，有

$$x=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}, & y<-1,\\ \sqrt[3]{y}, & -1\leqslant y\leqslant 8,\\ \dfrac{y+16}{12}, & y>8,\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 的反函数为

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$$

1.5 解

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$f_1(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_2(x)=f[f_1(x)]=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

一般地，可用数学归纳法证明，得

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}(n=1,2,3,\cdots).$$

第2讲 数列极限

2.1 (B) 解 数列极限的概念是描述变量在给定过程中的变化趋势,数列极限存在与否与前有限项的值无关,因此可以排除(A).

由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,由极限运算法则可知$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$必定存在,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$不符合极限运算法则,由无穷小量的性质可知其肯定不存在.因此可以排除(C),(D).故由排除法,应选(B).

2.2 $\frac{1}{2}$ 解

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

$$x_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

2.3 (C) 解 ①$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2+(-1)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}=\begin{cases}\frac{1}{6}, & n\text{为正偶数},\\ \frac{3}{2}, & n\text{为正奇数},\end{cases}$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$不存在.

②$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{2+(-1)^n}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{3}=\frac{1}{2}, & n\text{为正偶数},\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{1}=\frac{1}{2}, & n\text{为正奇数},\end{cases}$$ 于是$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$存在.

2.4 1 解 所给极限为"$\infty-\infty$"型,表达式中含有根式,可先将其变形,即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\cdot\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=1.$$

2.5 (A) 解 因 $x_n>0$,所以数列$\{x_n\}$有下界.又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}<1$,由数列极限的保号性可知,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$,即当 $n>N$ 时数列$\{x_n\}$是单调减少的,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是存在的.结合极限的运算法则,通过反证法易知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

【注】 ①$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$ 与 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$ 之间的区别:前者从第 N 项开始满足 $x_{n+1}<x_n$,而后者从指定项(默认第一项)开始满足.但从考查极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的角度而言,两个条件没有本质上的区别.

②若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=2$,令 $u_n=\frac{1}{x_n}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=2$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.利用无穷小与无穷大之间的关系,知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

③若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 可能存在,也可能不存在.如当 $x_n=\frac{1}{n}$时存在,当$x_n=n$时不存在.

2.6 100 解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{99}}{n^k-(n-1)^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{99}}{n^k\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right]}$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99-k}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^k-1}=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99-k}}{k\left(-\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{k}\lim_{n\to\infty}n^{99-k+1}.$$

由此可知,极限存在且不为零的充要条件是 $99-k+1=0$,即 $k=100$.

2.7 解 因为$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}>(3^n)^{\frac{1}{n}}=3$,又

$$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(3\times 3^n)^{\frac{1}{n}}=3\times 3^{\frac{1}{n}},\quad \lim_{n\to\infty}3\times 3^{\frac{1}{n}}=3,$$

由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

2.8 解 因为

$$1\leqslant\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{n},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=1.$$

2.9 解 由于 $x_1=\sqrt{2}<2$,$x_2=\sqrt{2+x_1}<\sqrt{2+2}=2$,设 $x_k<2$,则 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$,故对于任意正整数 n,都有 $0<x_n<2$,即数列$\{x_n\}$为有界数列.注意到

$$x_n-x_{n-1}=\sqrt{2+x_{n-1}}-x_{n-1}=\frac{2+x_{n-1}-x_{n-1}^2}{\sqrt{2+x_{n-1}}+x_{n-1}},$$

其分母大于 0,其分子

$$2+x_{n-1}-x_{n-1}^2>2+x_{n-1}-2x_{n-1}=2-x_{n-1}>0,$$

故 $x_n-x_{n-1}>0$,即$\{x_n\}$为单调增加且有上界的数列.

由单调有界准则可知数列$\{x_n\}$存在极限.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,由于 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+x_{n-1}}$,从而 $A=\sqrt{2+A}$,$A^2-A-2=0$,解得

$A=2$或 $A=-1$. 由于 $x_n>0$,因此 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant 0$,则 $A=-1$ 应舍去,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

2.10 (1)**证明** 显然 $x_n>0$,由不等式 $\arctan x<x,x>0$ 知,$x_{n+1}=\arctan x_n<x_n$,于是$\{x_n\}$单调减少,由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,由 $x_{n+1}=\arctan x_n$,知 $A=\arctan A$,于是 $A=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2)**解** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n+1}}{x_n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-\arctan x_n}{x_n^3}\xlongequal{x_n=t}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t-\arctan t}{t^3}$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{3t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{3t^2(1+t^2)}=\frac{1}{3}.$$

第3讲 函数极限与连续性

3.1 (B) 解 对于(A)，$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}=0$，选项不正确；

对于(B)，$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$，选项正确；

对于(C)，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=0$，无穷小量乘以无穷小量还是无穷小量，选项不正确；

对于(D)，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，无穷小量乘以有界变量还是无穷小量，选项不正确.

3.2 (D) 解 由于$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$，因此

$$\lim_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,\quad \lim_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

可知$\lim\limits_{x\to1}2e^{\frac{1}{x-1}}$不存在，也不为$\infty$，故选(D).

【注】 当$x\to x_0$时，$f(x)$为无穷大量，但是当$x\to x_0$时，$a^{f(x)}$不一定为无穷大量. 这里还应分$a>1$，$0<a<1$两种情形讨论，还需要讨论当$x\to x_0$时，$f(x)\to+\infty$还是$f(x)\to-\infty$，否则必然导致运算错误.

3.3 (B) 解 由等价无穷小量公式：当$x\to0^+$时，

$$e^{-\sqrt{x}}-1\sim-\sqrt{x},\quad \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\sim\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x},\quad \ln\sqrt{1+x}=\frac{1}{2}\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x,\quad \ln(1-\sqrt{x})\sim-\sqrt{x},$$

故选(B).

3.4 e^3 解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^2}{e^{-1}}=e^3.$$

【注】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+d}=e^{ab}$是常用的公式，应熟记.

相仿， $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}=e^{2a}.$$

上述两种表达式变形是求极限运算的常见技巧，为固定模式的求解方法，应熟记.

3.5 解 由于
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to0^+}\frac{-1}{x}=-\infty,$$
因此
$$\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\quad \lim_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0,$$
可得
$$\lim_{x\to0^+}\frac{2e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2+e^{-\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{2}{x}}}=0.$$

3.6 解 所给极限为“$\frac{0}{0}$”型，先进行等价无穷小代换，再拆分，可简化运算.
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(2+x^2)\ln(1+x)}\xlongequal{(*)}\lim_{x\to0}\frac{1}{2+x^2}\cdot\frac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$$
$$\xlongequal{(**)}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}.$$

【注】 在上述运算中(*)处利用等价无穷小代换.(**)处将非零因子$\frac{1}{2+x^2}$单独求极限，再将表达式拆分，前者利用重要极限公式，后者利用“有界变量与无穷小量之积仍为无穷小量”的性质.

3.7 解 由于当$x\to0^+$时，$\sin x^a\sim x^a$，由题设知$\sin x^a$是比x高阶的无穷小量，因此有
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^a}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^a}{x}=\lim_{x\to0^+}x^{a-1}=0,$$
由此知$a>1$.

又当$x\to0^+$时，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，由题设知$(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}$是比$x$高阶的无穷小量，因此有
$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{a}}}{x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}\lim_{x\to0^+}x^{\frac{2}{a}-1}=0,$$
故有$\frac{2}{a}-1>0$，即$0<a<2$.

综上，由此可知$1<a<2$.

3.8 解 当$x\to0$时，由$\begin{cases}\tan x=x+0x^2+o(x^2),\\ \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\end{cases}$得$\tan x-\ln(1+x)=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，于是$a=\frac{1}{2}$，$b=2$.

3.9 (B) 解 所给表达式为分式，当$x^2-1=0$时，可解得$x_1=-1$，$x_2=1$，即$f(x)$有两个间断点$x_1=-1$，$x_2=1$，由于
$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\infty,\quad \lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2},$$
故$x_1=-1$为无穷间断点，$x_2=1$为可去间断点.故选(B).

3.10 -2 解 因为$f(x)$在$x=0$处连续，所以$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$.又
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=-2,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}ae^{2x}=a,$$

所以 $a=-2$.

3.11 解 $f(x)$ 在 $x=0,x=1,x=-1$ 处无定义,所以 $f(x)$ 有 3 个间断点,因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=-1,$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=\infty,$$

所以 $x=0$ 为跳跃间断点;$x=1$ 为可去间断点;$x=-1$ 为无穷间断点.

3.12 解 因为

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\cos(x-1)-1}{1-\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{2}(x-1)^2}{\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]^2}=-\frac{4}{\pi^2}\neq f(1),$$

所以函数在 $x=1$ 处不连续.若修改定义令 $f(1)=-\frac{4}{\pi^2}$,则函数在 $x=1$ 处连续.

【注】 本题只研究函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性,所以限制在使 $f(x)$ 有定义的 $x=1$ 的某邻域内进行讨论.

第4讲 一元函数微分学的概念与计算

4.1 (C) 解 对于(A),由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在,且分母的极限为零,可知必有分子极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,由于$f(x)$在$x=0$处连续,由连续的定义知$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,故(A)不正确,应排除(A).又由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0),$$

可知应排除(B),(D).选(C).

【注】 应熟记下面的结论:

若$f(x)$在$x=0$处连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$,则①$f(0)=0$;②$f'(0)=A$.

4.2 (D) 解 由题设知$f(0)=0$,则

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^a|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^a=0=f'_+(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^a|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-x^a)=0=f'_-(0),$$

由于$f'_+(0)=f'_-(0)$,可知$f'(0)$存在,且为零.故选(D).

4.3 (D) 解 因为 $dy=f'(x^2)d(x^2)=2xf'(x^2)dx=2xf'(x^2)\Delta x$,

所以得

$$0.1=-2f'(1)\cdot(-0.1),$$

即$f'(1)=0.5$.故选(D).

4.4 (B) 解 由于$f(x^2)=\frac{1}{1+x^2}$,可得$f(x)=\frac{1}{1+x}(x\geqslant 0)$,$f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}(x\geqslant 0)$,故选(B).

4.5 $\varphi(a)$ 分析 概念题.①有的同学用公式法求出$f'(a)$,但这是错误解法;②应该用“导数定义”求出.

解 ①公式法.

$f'(a)=f'(x)\Big|_{x=a}=[\varphi(x)+(x-a)\cdot\varphi'(x)]\Big|_{x=a}=\varphi(a)+0=\varphi(a)$.错误,因为$\varphi(x)$仅连续,$\varphi'(x)$不一定存在!

②导数定义.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot\varphi(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a).$$

【注】 求导数时,当函数不具备“导数存在”的条件时,往往只能用“导数定义”求.

4.6 $\left[e^{f(x)}f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}+f(\ln x)e^{f(x)}\cdot f'(x)\right]dx$ 解 可以利用 $dy=y'dx$,先求 y' 再求 dy,也可以直接利用微分运算.

$$dy=e^{f(x)}d[f(\ln x)]+f(\ln x)d[e^{f(x)}]$$
$$=\left[e^{f(x)}f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}+f(\ln x)e^{f(x)}\cdot f'(x)\right]dx.$$

4.7 $\frac{y-2xy\cos(x^2y)}{x^2\cos(x^2y)-x}dx$ 解 原式两端对 x 求导,得

$$\cos(x^2y)\cdot(x^2y)'=y+xy',$$
$$\cos(x^2y)\cdot(2xy+x^2y')=y+xy',$$

可解得
$$y'=\frac{y-2xy\cos(x^2y)}{x^2\cos(x^2y)-x},\quad dy=y'dx=\frac{y-2xy\cos(x^2y)}{x^2\cos(x^2y)-x}dx.$$

4.8 $\frac{1}{x(1+\ln y)}dx$ 解 将 $x=y^y$ 两端取对数,得

$$\ln x=y\ln y,$$

两端关于 x 求导,得
$$\frac{1}{x}=y'\ln y+y\cdot\frac{1}{y}\cdot y'=(1+\ln y)y',$$

$$y'=\frac{1}{x(1+\ln y)},$$

因此
$$dy=y'dx=\frac{1}{x(1+\ln y)}dx.$$

4.9 $(1+2x)e^{2x}$ 解 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}x(1-2t)^{-\frac{x}{t}}=x\lim\limits_{t\to0}\left[(1-2t)^{-\frac{1}{2t}}\right]^{2x}=xe^{2x}$,

因此
$$f'(x)=(xe^{2x})'=e^{2x}+xe^{2x}\cdot2=(1+2x)e^{2x}.$$

4.10 $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$ 解 对原式化简,得

$$y=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^22x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,$$

则当 $n\geqslant1$ 时,

$$y^{(n)}(x)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)^{(n)}=\left(\frac{3}{4}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{4}\cos 4x\right)^{(n)}$$
$$=\frac{1}{4}(\cos 4x)^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

4.11 解 $\frac{dy}{dx}=2xe^{x^2}$, $\frac{dy}{d(x^2)}=\frac{2xe^{x^2}dx}{2xdx}=e^{x^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2(1+2x^2)e^{x^2}$.

【注】 要能区分这样几个符号:

①$dx^2=(dx)^2$,$dx^n=(dx)^n$,这叫"微分的幂";

②$d(x^2)=2xdx$,$d(x^n)=nx^{n-1}dx$,这叫"幂的微分";

③$d^2x=0$,这是因为$\frac{d^2x}{dx^2}=(x)''=0$,于是 $d^2x=0$.

4.12 证明 因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=0=f(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连

续.又根据导数定义,有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}g''(0).$$

当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$,则

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}$$

$$=g''(0)-\frac{1}{2}g''(0)=\frac{1}{2}g''(0)=f'(0),$$

所以 $f(x)$ 的导函数在 $x=0$ 处连续.

第5讲 一元函数微分学的几何应用

5.1 [0,400] 解 $\frac{dy}{dx}=2(x-1)(x-2)^2+2(x-1)^2(x-2)$

$$=2(x-1)(x-2)(2x-3).$$

令$\frac{dy}{dx}=0$,得驻点:$x=1,2,\frac{3}{2}$.

$$y_{\max}=\max\left\{y(1),y(2),y\left(\frac{3}{2}\right),y(-3),y(4)\right\}$$

$$=\max\left\{0,0,\frac{1}{16},400,36\right\}=400,$$

$$y_{\min}=\min\left\{y(1),y(2),y\left(\frac{3}{2}\right),y(-3),y(4)\right\}$$

$$=\min\left\{0,0,\frac{1}{16},400,36\right\}=0.$$

故函数值域是[0,400].

【注】 本题解法是标准解法,适用于所有可导函数,但如果读者有一定的观察力,立刻可以得到答案,具体解法为 $y=(x-1)^2(x-2)^2\geqslant 0, x=1,2\in[-3,4]$时,$y_{\min}=0$;$y_{\max}\leqslant\max\{(x-1)^2\}\times\max\{(x-2)^2\}=(-4)^2(-5)^2=400, x=-3\in[-3,4]$时等号成立.

如果上述两个最大值不能在同一点取到,则只能用本题的标准解法.

5.2 解 $y=2x^2+ax+3$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且处处可导,则

$$y'=4x+a.$$

由于 y 在 $x=1$ 处取得极值,因此必有 $y'\big|_{x=1}=0$,可得

$$a=-4.$$

又

$$y''=4,\quad y''\big|_{x=1}=4>0,$$

可知 $x=1$ 为 y 的极小值点.

5.3 解 设围成圆的一段长为 x,围成正方形的一段长为 $a-x$,则正方形与圆的面积之和

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{a-x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(a-x)^2}{16}(0<x<a),$$

$$S'=\frac{x}{2\pi}-\frac{a-x}{8},$$

令 $S'=0$,解得 $x=\frac{\pi a}{\pi+4}$,$S''\big|_{x=\frac{\pi a}{\pi+4}}=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{8}>0$,故当 $x=\frac{\pi a}{\pi+4}$时,面积之和最小,即围成圆的一段长为

$\frac{\pi a}{\pi+4}$，围成正方形的一段长为$\frac{4a}{\pi+4}$时，正方形与圆的面积之和最小.

5.4 (A) 解 由于$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1<0$，则存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}<0$，由于$(x-x_0)^2>0$，于是$f(x)-f(x_0)<0$，所以$f(x_0)>f(x)$，$x_0$为极大值点. 故选(A).

5.5 (B) 解 当$x>0$时，由$f'(x)>0$可知$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加；由$f''(x)<0$可知$f(x)$在$(0,+\infty)$内为凸曲线. 由$f(x)=f(-x)$可知$f(x)$关于y轴对称，则$f(x)$在$(-\infty,0)$内单调减少，为凸曲线，选(B).

5.6 $(-1,1)$ 解 $y=\frac{1}{x^2-1}$的定义域是$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

对x求导，可得
$$y'=\frac{-2x}{(x^2-1)^2},\quad y''=\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

在定义域内，y有二阶导数，且没有二阶导数为零的点，曲线没有拐点. 当$(x^2-1)^3<0$，即$x^2-1<0$时，$y''<0$，可知曲线y的凸区间为$(-1,1)$.

5.7 $(0,5)$ 解 $y=x^{\frac{5}{3}}+3x+5$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.
$$y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}+3,\quad y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}.$$

当$x=0$时，y''不存在；当$x<0$时，$y''<0$；当$x>0$时，$y''>0$. 当$x=0$时，$y=5$. 可知$(0,5)$为所求曲线的拐点.

5.8 分析 考查①判别极值点的充分条件，②驻点是取得极值的必要条件.

(1)证明 由$x=a(a\neq 1)$是$f(x)$的极值点，得$f'(a)=0$.

将$x=a$代入条件$(x-1)f''(x)-2(x-1)f'(x)=1-e^{1-x}$，得
$$f''(a)=\frac{1-e^{1-a}}{a-1}\begin{cases}>0, & a>1,\\ >0, & a<1\end{cases}\Rightarrow f''(a)>0,$$

故$x=a$是$f(x)$的极小值点.

(2)解 因为$f'(1)=0$，且$f''(1)=\lim\limits_{x\to 1}f''(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-e^{1-x}}{x-1}=1>0$，故$x=1$是$f(x)$的极小值点.

5.9 (A) 解 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$，由渐近线的求法可知正确选项为(A).

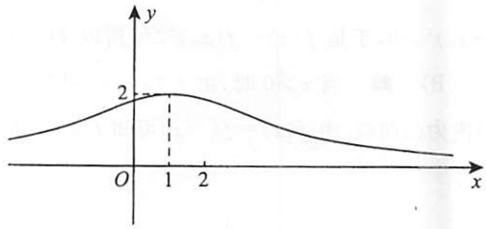
5.10 $y=x-2$ 解 由于
$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+2)}=1=a,$$
$$\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-2x}{x+2}=-2=b,$$

因此所求斜渐近线方程为$y=x-2$.

5.11 (D) 解 $y'=x^x(\ln x+1)$，令$y'=0$，得$x=\frac{1}{e}$. 当$x>\frac{1}{e}$时，$y'>0$，函数单调增加，故选(D).

5.12 解

单调增加区间	$(-\infty,1)$
单调减少区间	$(1,+\infty)$
极值点	1
极　值	2
凹区间	$(-\infty,0),(2,+\infty)$
凸区间	$(0,2)$
拐　点	$\left(0,\frac{3}{2}\right),\left(2,\frac{3}{2}\right)$
渐近线	$y=0$



函数图形如图所示.

第6讲 中值定理

6.1 分析 既要验证定理的条件，也要指出结论中的ξ.

证明
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{3-x^2}{2}=1,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1,$$

且$f(1)=1$，故$f(x)$在$x=1$处连续，于是$f(x)$在$[0,2]$上连续.

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1,\quad f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1,$$

故$f(x)$在$x=1$处可导，于是$f(x)$在$(0,2)$内可导.

由$f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=-\dfrac{1}{2}$，$0<\xi<2$，及$f'(x)=\begin{cases}-x, & x<1,\\ -1, & x=1,\\ -\dfrac{1}{x^2}, & x>1,\end{cases}$知$\xi=\dfrac{1}{2}$或$\sqrt{2}$.

【注】 作答不完整是本题常见的失分点，要么漏掉验证条件，要么没有指出结论中的ξ确实存在，指出ξ确实存在的办法就是求出具体的ξ.

6.2 证明 (1)设$\varphi(x)=xf(x)$，则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$\varphi(a)=\varphi(b)=0$，由罗尔定理得，存在$\xi\in(a,b)$，使$\varphi'(\xi)=0$，即$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

(2)设$F(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}f(x)$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，且$F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理得，存在$\eta\in(a,b)$，使$F'(\eta)=\mathrm{e}^{\frac{\eta^2}{2}}f'(\eta)+\mathrm{e}^{\frac{\eta^2}{2}}\cdot\eta\cdot f(\eta)=0$，由于$\mathrm{e}^{\frac{\eta^2}{2}}\neq0$，则有$\eta f(\eta)+f'(\eta)=0$.

6.3 证明 因$f(a)=f(b)$且$f(x)$不恒为常数，故至少存在一点$c\in(a,b)$，使得$f(c)\neq f(a)$.

不妨设$f(c)>f(a)$（对于$f(c)<f(a)$的情形，类似可证），因$f(x)$在$[a,c]$上满足拉格朗日中值定理的条件，故由拉格朗日中值定理知，至少存在一点$\xi\in(a,c)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{1}{c-a}[f(c)-f(a)]>0.$$

6.4 分析 (1)由于$f(0)<\dfrac{1}{2}<f(1)$，所以对$f(x)$在$[0,1]$上应用连续函数的介值定理即可.

(2)对(1)得到的ξ，分别在$[0,\xi]$和$[\xi,1]$上应用拉格朗日中值定理.

证明 (1)由于$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)<\dfrac{1}{2}<f(1)$，因此由连续函数的介值定理知，存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=\dfrac{1}{2}$.

(2)因为$f(x)$在$[0,\xi]$和$[\xi,1]$上满足拉格朗日中值定理条件，所以存在$x_1\in(0,\xi)$和$x_2\in(\xi,1)$，使得

$$f'(x_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{f(\xi)}{\xi}=\frac{1}{2\xi},$$

$$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1}{2(1-\xi)}.$$

于是,存在不同两点 $x_1,x_2\in(0,1)$,使得

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2\xi+2(1-\xi)=2.$$

6.5 证明 对 $f(x)$ 在 $[a;b]$ 上应用拉格朗日中值定理知

$$f(b)-f(a)=f'(\eta)(b-a),\eta\in(a,b),$$

对 $f(x)$,x^2 在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理知

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},\xi\in(a,b),$$

所以 $f(b)-f(a)=\frac{f'(\xi)}{2\xi}(b^2-a^2)$,则

$$f'(\eta)(b-a)=\frac{f'(\xi)}{2\xi}(b^2-a^2),$$

即 $\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{f'(\eta)}{b+a}$.

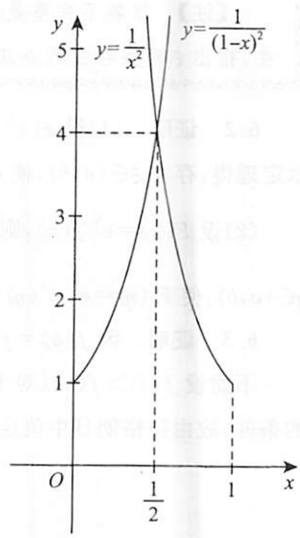
6.6 分析 由于题中是证明存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f''(\xi)\geqslant 8$,因此可以考虑利用一阶泰勒公式.

证明 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,因此存在 $x_0\in[0,1]$,使得 $f(x_0)=\min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=-1$. 由于 $f(0)=f(1)=0>f(x_0)$,因此 $x_0\in(0,1)$,从而有 $f'(x_0)=0$.

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,因此由一阶泰勒公式知,对任意 $x\in[0,1]$,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\eta)(x-x_0)^2$$

$$=-1+\frac{1}{2}f''(\eta)(x-x_0)^2(\eta\text{ 是介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间的实数}).$$



于是,当 $x=0$ 时,$f(0)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2$,即

$$f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2}(\xi_1\text{ 是对应 }x=0\text{ 的 }\eta);$$

当 $x=1$ 时,$f(1)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2$,即

$$f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2}(\xi_2\text{ 是对应 }x=1\text{ 的 }\eta).$$

记 $f''(\xi)=\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$,则 $\xi=\xi_1$ 或 ξ_2. 于是存在 $\xi\in(0,1)$,使得

$$f''(\xi)=2\max\left\{\frac{1}{x_0^2},\frac{1}{(1-x_0)^2}\right\}\geqslant 2\ \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=8(\text{见图}).$$

【注】 当要证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)$ 大于或小于某个非零常数时,往往利用泰勒公式. 这是因为泰勒公式是拉格朗日中值定理的推广,它较拉格朗日中值定理更能揭示所给函数在中值 ξ 处的性质.

第7讲 零点问题与微分不等式

7.1 证明 证明方程根的存在性,可以转化为函数的零点问题.

先将方程两端同乘$(x-1)(x-2)(x-3)$,可得

$$(x-2)(x-3)+2(x-1)(x-3)+3(x-1)(x-2)=0.$$

令 $F(x)=(x-2)(x-3)+2(x-1)(x-3)+3(x-1)(x-2)$,则 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

取闭区间$[1,2]$,有

$$F(1)>0,\quad F(2)<0,$$

由闭区间上连续函数的零点定理可知,在$(1,2)$内至少存在一点 x_1,使 $F(x_1)=0$.

再取$[2,3]$,有

$$F(2)<0,\quad F(3)>0,$$

同理可知,在$(2,3)$内至少存在一点 x_2,使 $F(x_2)=0$.

显然 $x_1\neq x_2$,由于 $F(x)=0$ 为一元二次方程,根据代数知识可知,一元二次方程至多有两个实根,因此 x_1,x_2 就是原方程的两个不同实根,且分别位于$(1,2)$与$(2,3)$内.

7.2 证明 零点存在性问题,用罗尔定理.记

$$f(x)=\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+\frac{a_{n-1}x^n}{n}+\cdots+a_0x,$$

则

$$f'(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0.$$

$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,又 $f(0)=0,f(1)=\frac{a_n}{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}+\cdots+a_0=0$,由罗尔定理知,方程$f'(x)=0$ 即 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$ 在$(0,1)$内至少有一个实根.

7.3 证明 零点唯一性问题,只要证明零点存在和函数单调即可.

在$[1,+\infty)$上,$f''(x)<0$,则 $f'(x)$单调减少,$f'(x)<f'(1)=-3<0$,所以 $f(x)$单调减少.

又 $f(1)=2>0,f(x)=f(1)+f'(\xi)(x-1)<2+(-3)(x-1)=5-3x$,其中 $\xi\in(1,x)$,取 $x=\frac{5}{3}$,则 $f\left(\frac{5}{3}\right)<0$,由零点定理知,$f(x)=0$ 在$\left(1,\frac{5}{3}\right)$内至少有一个实根.

综上所述,$f(x)=0$ 在$(1,+\infty)$内只有一个实根.

7.4 (B) **解** $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-2)(x-1)$.

当 $x\leqslant1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调增加,且 $f(1)=5-a$;

当 $1<x\leqslant2$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调减少,且 $f(2)=4-a$;

当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加.

当 $a=4$ 时，$f(1)=1>0$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. 由单调性和零点定理知 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内存在唯一的零点，此时 $f(2)=0$，且在 $(1,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 内 $f(x)>0$，故 $f(x)$ 无零点. 所以当 $a=4$ 时，可保证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有两个零点.

当 $a=2$ 时，$f(1)=3>0$，$f(2)=2>0$. 由前面讨论的 $f(x)$ 的单调性可知在 $[1,2]$ 上无零点，在 $(2,+\infty)$ 内也无零点，只在 $(-\infty,1)$ 内有一个零点，此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内只有一个零点. 故 $a=2$ 不符合题意.

类似地，可知当 $a=6,8$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内也只有一个零点.

所以只有选项(B)正确.

7.5 证明 **方法一** 记 $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$，$0<x<+\infty$，对 x 求导有

$$f'(x)=-\frac{1}{x(1+x)^2}<0,$$

可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少，由于

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]=0,$$

因此对任意 $x\in(0,+\infty)$，总有 $f(x)>\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，即

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x}.$$

方法二 利用拉格朗日中值定理证明.

记 $f(x)=\ln x\,(0<x<+\infty)$，对其在区间 $[x,x+1]$ 上应用拉格朗日中值定理，有

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi},\xi\in(x,x+1),$$

由于 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln(x+1)-\ln x$，因此对任意 $x\in(0,+\infty)$，有

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}.$$

7.6 分析 $a^b>b^a\Leftrightarrow b\ln a>a\ln b$.

证明 将 b 写为 x，令 $f(x)=x\ln a-a\ln x$，$x>a\geqslant e$，则 $f'(x)=\ln a-\frac{a}{x}>0$，$f(x)$ 单调增加，所以 $f(x)>f(a)=0$，有 $f(b)>0$，即 $b\ln a>a\ln b$.

7.7 证明 (1) 令 $f(x)=\tan x-x$，则

$$f'(x)=\sec^2x-1=\tan^2x>0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调增加. 因此，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$0=f(0)<f(x)$，即 $x<\tan x$.

(2) 令 $g(x)=(x^2+\sqrt{4+x^4})\cos x$，对 $g(x)$ 求导数并整理，得

$$g'(x)=\left(2x+\frac{2x^3}{\sqrt{4+x^4}}\right)\cos x-(x^2+\sqrt{4+x^4})\sin x$$

$$=x(x^2+\sqrt{4+x^4})\left(\frac{2}{\sqrt{4+x^4}}-\frac{\tan x}{x}\right)\cos x,$$

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，根据(1)中不等式，有 $\frac{2}{\sqrt{4+x^4}}<1<\frac{\tan x}{x}$，所以 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少．因此，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$g(x)<g(0)=2$，即 $(x^2+\sqrt{4+x^4})\cos x<2$．

第8讲 一元函数积分学的概念与计算

8.1 (A) **解** 由不定积分的性质 $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$ 知

$$\int f'(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f'(2x)\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}f(2x)+C,$$

可知(A)正确,(C)不正确.

$\int f'(2x)\mathrm{d}x$ 可以理解为先对 $2x$ 求导,后对 x 积分,因此 $\int f'(2x)\mathrm{d}x \neq f(2x)+C$.

注意不定积分 $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$,即先积分后求导,作用抵消.可知(B),(D)都不正确.

综上可知应选(A).

8.2 (C) **解** 由于 $x\cos x$ 为 $f(x)$ 的原函数,由原函数定义知

$$f(x)=(x\cos x)'=\cos x - x\sin x,$$

故选(C).

8.3 **分析** 考查原函数概念.

解 由 $\int xf(x)\mathrm{d}x = \arcsin x + C$ 求导可得 $xf(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,则 $\frac{1}{f(x)} = x\sqrt{1-x^2}$,故

$$\int \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = \int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C_1.$$

8.4 **解** 由分部积分公式可得

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $\frac{\sin x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,可知

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{x}+C,$$

因此 $$\int xf'(x)\mathrm{d}x = \frac{x\cos x - \sin x}{x} - \frac{\sin x}{x} + C = \cos x - \frac{2\sin x}{x}+C.$$

8.5 **解** 因为 xe^{-x} 为 $f(x)$ 的一个原函数,即

$$f(x)=(xe^{-x})'=e^{-x}(1-x),$$

所以 $$\begin{aligned}\int xf(x)\mathrm{d}x &= \int e^{-x}(x-x^2)\mathrm{d}x = -e^{-x}(x-x^2)+\int e^{-x}(1-2x)\mathrm{d}x \\ &= e^{-x}(x^2-x) - e^{-x}(1-2x) - \int 2e^{-x}\mathrm{d}x \\ &= e^{-x}(x^2+x+1)+C.\end{aligned}$$

8.6 $2\sqrt{2}-2$ **解** 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+ni}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}}\cdot\dfrac{1}{n}$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{1+x}\Big|_0^1=2\sqrt{2}-2.$$

【注】 能凑成$\dfrac{i}{n}$,则用定积分定义;凑不成的,先用放缩法,放缩后再用定积分定义.

常见的几种凑定积分定义的式子有

① $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

这里分母上有$n+i$,提出n后,会化成$1+\dfrac{i}{n}$.

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+i^2}$

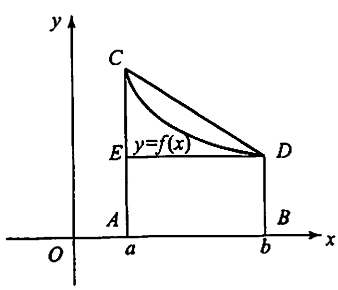
$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n^2}{n^2+i^2}\cdot\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{n}$

$=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$

这里分母上有n^2+i^2,提出n^2后,会化成$1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2$.

③对于本题,分母上有n^2+ni,提出n^2后,会化成$1+\dfrac{i}{n}$.

8.7 (D) **解** 由$f'(x)<0$可知函数$f(x)$在$[a,b]$上单调减少;由$f''(x)>0$可知曲线$y=f(x)$在$[a,b]$上是凹的.曲线的图形如图所示.



由图可知,S_1表示曲边梯形$ABDC$的面积,S_2表示以$(b-a)$为长,以$f(b)$为宽的长方形$ABDE$的面积,而S_3表示梯形$ABDC$的面积,从图中易见有$S_2<S_1<S_3$,因此选(D).

8.8 (B) **解** 首先要注意:当$f(x)$为连续函数时,$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$为$f(x)$的一个原函数,此时有$\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x)$.如果$f(x)$不为连续函数,上述结论不一定成立.因此不能轻易判定(C)成立.

由于 $f(x)$ 为分段函数，因此 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也为分段函数.

当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_0^x(-1)\mathrm{d}t=-x$；

当 $x>0$ 时，$F(x)=\int_0^x 1\,\mathrm{d}t=x$；

当 $x=0$ 时，$F(0)=0$.

因此 $F(x)=|x|$，故 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但在 $x=0$ 处不可导. 故选(B).

8.9　$\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$　解　由变限积分求导公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x),$$

得 $F'(x)=\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$.

8.10　解　令 $tx=u$，则原式变为 $\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=f(x)+x\sin x$，即

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=xf(x)+x^2\sin x,$$

两边对 x 求导，得

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+2x\sin x+x^2\cos x,$$

即

$$f'(x)=-2\sin x-x\cos x.$$

积分，得

$$\begin{aligned}f(x)&=2\cos x-\int x\mathrm{d}(\sin x)=2\cos x-x\sin x-\cos x+C\\&=\cos x-x\sin x+C.\end{aligned}$$

【注】　不要把 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t$ 误认为定积分.

8.11　证明　先处理被积函数中的绝对值符号：

$$|x-t|=\begin{cases}x-t, & -1\leqslant t\leqslant x,\\ t-x, & x<t\leqslant 1.\end{cases}$$

于是，

$$\begin{aligned}y&=\int_{-1}^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t+\int_x^1(t-x)f(t)\mathrm{d}t\\&=x\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t-\int_{-1}^x tf(t)\mathrm{d}t+\int_x^1 tf(t)\mathrm{d}t-x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

上式出现了变限积分，则

$$\begin{aligned}y'&=xf(x)+\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)-xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t+xf(x)\\&=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$y''=2f(x)>0,$$

所以所给曲线在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上是凹的.

8.12　解　原式左端 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=\mathrm{e}^a$，

$$\text{原式右端}=\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x^2)}{1+x^4}=\frac{1}{2}\arctan x^2\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4},$$

因此有 $e^a=\frac{\pi}{4}$，$a=\ln\frac{\pi}{4}$.

8.13 解 令 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^a)}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^a}{(1+x^2)(1+x^a)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

第9讲 一元函数积分学的几何应用

9.1 (D) **解** $y=x(x-1)(2-x)$ 在 $x=0,x=1,x=2$ 处，$y=0$；当 $0<x<1$ 时，$y<0$；当 $1<x<2$ 时，$y>0$. 可知所求封闭图形的面积为

$$-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x,$$

故选(D).

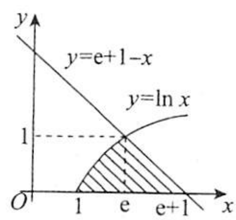
9.2 (A) **解** 双纽线的极坐标方程为 $r^2=\cos 2\theta$，根据对称性，所求面积为

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta,$$

故选(A).

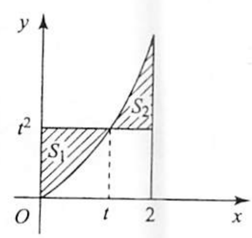
9.3 $\frac{3}{2}$ **解** **方法一** 如图所示，令 $\ln x=0$，得 $x=1$；令 $\mathrm{e}+1-x=0$，得 $x=\mathrm{e}+1$；令 $\ln x=\mathrm{e}+1-x$，得 $x=\mathrm{e}$. 则所求面积为

$$A=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}+1}(\mathrm{e}+1-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}.$$



方法二 对 y 积分，则所求面积为 $A=\int_0^1(\mathrm{e}+1-y-\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=\frac{3}{2}$.

9.4 **解** 如图所示，可知



$$S_1=\int_0^t(t^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}t^3,$$

$$S_2=\int_t^2(x^2-t^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}t^3-2t^2+\frac{8}{3},$$

则

$$S=S_1+S_2=\frac{4}{3}t^3-2t^2+\frac{8}{3},$$

对 t 求导，得

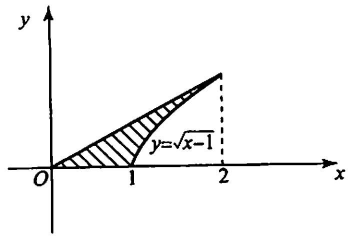
$$S'=4t^2-4t,$$

令 $S'=0$，得 $t=0$ 或 $t=1$，又

$$S''=8t-4,\quad S''\Big|_{t=0}=-4,\quad S''\Big|_{t=1}=4.$$

可知当 $t=1$ 时，S 取得极小值，由于在 $(0,2)$ 内有唯一驻点，因此 $S(1)=2$ 是最小值. 故 t 取值为 1 时，图中阴影部分面积之和最小.

9.5 解 如图所示,记过原点且与曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 相切的切点为 $(x_0,\sqrt{x_0-1})$.



由 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$ 可知切线方程为

$$y-\sqrt{x_0-1}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0).$$

由于切线过原点,因此有

$$0-\sqrt{x_0-1}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(0-x_0),$$

解得 $x_0=2$,$y'\Big|_{x_0=2}=\dfrac{1}{2}$,故所求切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$.

故所求面积为

$$S=\int_0^2\frac{1}{2}x\mathrm{d}x-\int_1^2\sqrt{x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^2\Big|_0^2-\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{1}{3}.$$

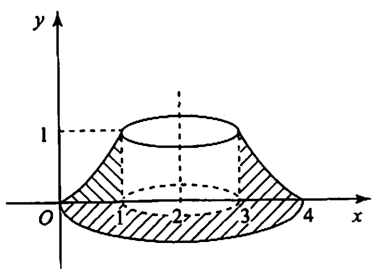
9.6 $\dfrac{\pi^2}{2}$ 解 所求体积为

$$\int_0^{+\infty}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\pi\int_0^b\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi\lim_{b\to+\infty}\arctan x\Big|_0^b=\frac{\pi^2}{2}.$$

9.7 $\dfrac{16}{15}\pi$ 解 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 相交,交点为 $(-1,1)$ 与 $(1,1)$,则曲线绕 $y=1$ 旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=\int_{-1}^1\pi(x^2-1)^2\mathrm{d}x=\pi\int_{-1}^1(x^4-2x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{16}{15}\pi.$$

9.8 $\dfrac{3}{5}\pi$ 解 如图所示,所求旋转体的体积为外侧圆台体积减去内侧圆柱体积,即



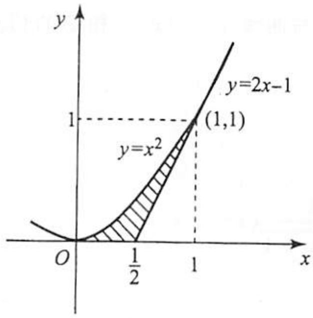
$$V=\pi\int_0^1(2-y^{\frac{1}{3}})^2\mathrm{d}y-\pi=\pi\int_0^1(y^{\frac{2}{3}}-4y^{\frac{1}{3}}+4)\mathrm{d}y-\pi$$

$$=\pi\left(\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}-3y^{\frac{4}{3}}+4y\right)\Big|_0^1-\pi=\frac{3}{5}\pi.$$

9.9 解 由曲线方程 $y=x^2$ 可知 $y'=2x$,$y'\Big|_{x=1}=2$. 因此过点 $(1,1)$ 的切线方程为 $y-1=2(x-1)$,即

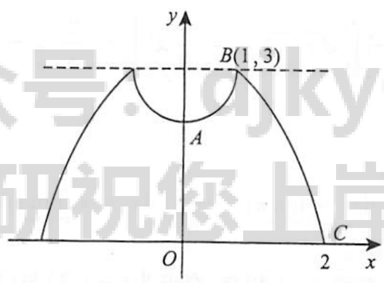
$$y=2x-1.$$

先求切线与 x 轴的交点,将 $y=0$ 代入切线方程,得 $x=\dfrac{1}{2}$,如图所示,则旋转体的体积为



$$V=\pi\int_0^1 x^4\mathrm{d}x-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\pi-\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{30}\pi.$$

9.10 **解** 作出图形如图所示. $\overset{\frown}{AB}$的方程为 $y=x^2+2(0\leqslant x\leqslant 1)$，$\overset{\frown}{BC}$的方程为 $y=4-x^2(1\leqslant x\leqslant 2)$. 设旋转体在区间$[0,1]$上的体积为 V_1，在区间$[1,2]$上的体积为 V_2，则它们的体积元分别为



$$\mathrm{d}V_1=\pi\{3^2-[3-(x^2+2)]^2\}\mathrm{d}x=\pi(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}V_2=\pi\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}\mathrm{d}x=\pi(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x.$$

由对称性得

$$V=2(V_1+V_2)=2\pi\int_0^1(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x+2\pi\int_1^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x$$
$$=2\pi\int_0^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x=\frac{448}{15}\pi.$$

第10讲 积分等式与积分不等式

10.1 解 (1)设 $x=\frac{\pi}{2}-t$,则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$,且当 $x=0$ 时,$t=\frac{\pi}{2}$;当 $x=\frac{\pi}{2}$时,$t=0$. 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

(2)设 $x=\pi-t$,则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$,且当 $x=0$ 时,$t=\pi$;当 $x=\pi$ 时,$t=0$. 于是

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\pi}^0(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

由上述结论可得

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}.$$

10.2 解 由于 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 存在,记 $A=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x$. 于是由题设条件,有

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+A.$$

左、右两边同乘 $\sin x$,再积分,得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi} A\sin x\mathrm{d}x,$$

从而有

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

由上题可知,$A=\frac{\pi^2}{2}$. 因此

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{\pi^2}{2}.$$

10.3 证明 左端定积分的被积函数含有变限积分,故考虑分部积分法.

$$\int_0^1\left[\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\left[x\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\Big|_0^1-\int_0^1 x\varphi[f(x)]\cdot f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 x^2 \cdot f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x^2\mathrm{d}[f(x)]$$

$$=-x^2 f(x)\Big|_0^1+2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$$

10.4 证明 由积分中值定理知，在$\left[\frac{2}{3},1\right]$上必存在一点 c_1，使$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}f(c_1)$，从而有 $f(c_1)=f(0)$，又 $f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，故$f(x)$在区间$[0,c_1]$上满足罗尔定理的条件，因此在$(0,c_1)$内存在一点 c，使$f'(c)=0,c\in(0,c_1)\subset(0,1)$.

10.5 证明 由积分中值定理，可知至少存在一点 $\eta\in[2,3]$，使得

$$\int_2^3 \varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(\eta)(3-2)=\varphi(\eta).$$

又由 $\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(\eta)$知，$2<\eta\leqslant 3$.

对 $\varphi(x)$在$[1,2]$和$[2,\eta]$上分别应用拉格朗日中值定理，并注意到 $\varphi(1)<\varphi(2)$，$\varphi(\eta)<\varphi(2)$，得

$$\varphi'(\xi_1)=\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}>0,1<\xi_1<2,$$

$$\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2}<0,2<\xi_2<\eta\leqslant 3.$$

在$[\xi_1,\xi_2]$上对导函数 $\varphi'(x)$应用拉格朗日中值定理，有

$$\varphi''(\xi)=\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3).$$

【注】 加强形式的积分中值定理：设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a),\xi\in(a,b).$$

提示：利用牛顿-莱布尼茨公式和拉格朗日中值定理.

10.6 证明 设

$$F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t-f(x)g(1),x\in[0,1],$$

则 $F(x)$在$[0,1]$上可导，并且

$$F'(x)=g(x)f'(x)-f'(x)g(1)=f'(x)[g(x)-g(1)].$$

由于 $x\in[0,1]$时，$f'(x)\geqslant 0,g'(x)\geqslant 0$，因此 $F'(x)\leqslant 0$，即 $F(x)$在$[0,1]$上单调不增.

又因为
$$F(1)=\int_0^1 g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x-f(1)g(1),$$

而
$$\int_0^1 g(x)f'(x)\mathrm{d}x=g(x)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(1)g(1)-\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x,$$

故 $F(1)=0$. 因此，当 $x\in[0,1]$时，$F(x)\geqslant 0$. 由此可知对任意 $a\in[0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1).$$

10.7 证明 由 $f'(x)$在$[0,a]$上连续，可知 $f'(x)$在$[0,a]$上有界，即存在常数 $M>0$，使得对任一 $x\in[0,a]$，满足$|f'(x)|\leqslant M$. 又由拉格朗日中值定理，有

$$f(x)=f(x)-f(0)=xf'(\xi),\xi\in(0,x),$$

于是
$$|f(x)|=|xf'(\xi)|\leqslant Mx,$$

故 $$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a Mx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}Ma^2.$$

10.8 证明 由

$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

得 $$|f(x)| \leqslant \int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t, \tag{①}$$

$$f(x) = f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

得 $$|f(x)| \leqslant \int_x^b |f'(t)|\mathrm{d}t. \tag{②}$$

①式+②式,得 $2|f(x)| \leqslant \int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t + \int_x^b |f'(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t$,即

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

10.9 证明 $$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

其中 ξ 介于 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间. 又由 $f''(x)>0$,则 $f''(\xi)>0$,于是

$$f(x)\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

两边在区间[0,1]上对 x 积分,得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &\geqslant \int_0^1\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.\end{aligned}$$

第11讲 多元函数微分学

11.1 (C) 解 由初等数学基本不等式：

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|x| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$. 由定义，可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0).$$

至于(A)，取 $y=kx$，则 $f(x,y)=f(x,kx)=\frac{k}{1+k^2}((x,y)\neq(0,0))$，从而 $\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}} f(x,y)=\frac{k}{1+k^2}$，随 k 而异. (B)同理(A). (D)中取 $y=kx^2$，$\lim\limits_{\substack{y=kx^2\\x\to 0}} f(x,y)=\frac{k}{1+k^2}$，随 k 而异.

11.2 (C) 解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x,b)-f(a,b)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a-x,b)-f(a,b)}{-x}$

$$=f_1'(a,b)+f_1'(a,b)=2f_1'(a,b),$$

故选(C).

11.3 解 (1)由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot y$,

其中

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}=1\text{(重要极限)},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot y=0\text{(无穷小乘有界函数)},$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=1\times 0=0.$$

(2)因为

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=kx}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

11.4 (A) 解 由复合函数微分法则可得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$，于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}=x\frac{\partial z}{\partial u}=z.$$

又 $u=x$，故新方程为 $u\frac{\partial z}{\partial u}=z$.

11.5 1 解 由于 $f(x,1)=x$，故 $f_x'(x,1)=1$.

11.6　$4(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$　解　设 $u=\frac{x}{y}$,则

$$z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^2=(1+u)^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=2(1+u),\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2},$$

故
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2(1+u)\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\left(1+\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2(1+u)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2}\left(1+\frac{x}{y}\right).$$

因此
$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{2}{y}\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(\mathrm{d}x-\frac{x}{y}\mathrm{d}y\right),$$

故
$$\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=4(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y).$$

11.7　解　由于 $z=\mathrm{e}^{-x}-f(x-2y)$,因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}-f'(x-2y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-f''(x-2y)\cdot(-2)=2f''(x-2y).$$

11.8　解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+y\mathrm{e}^{xy}f_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+x\mathrm{e}^{xy}f_2',$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=2x[f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot x\mathrm{e}^{xy}]+\mathrm{e}^{xy}f_2'+xy\mathrm{e}^{xy}f_2'+y\mathrm{e}^{xy}[f_{21}''\cdot(-2y)+f_{22}''\cdot x\mathrm{e}^{xy}]\\&=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)\mathrm{e}^{xy}f_{12}''+xy\mathrm{e}^{2xy}f_{22}''+\mathrm{e}^{xy}(1+xy)f_2'.\end{aligned}$$

11.9　2　解　将所给方程变形为 $(z+y)^x-x^2=0$,令 $F(x,y,z)=(z+y)^x-x^2$. 则

$$F_x'=(z+y)^x\ln(z+y)-2x,$$

$$F_z'=x(z+y)^{x-1},$$

将 $x=0$ 代入所给方程,不成立,故 $x\neq0$, $F_z'\neq0$,则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{(z+y)^x\ln(z+y)-2x}{x(z+y)^{x-1}}.\qquad (*)$$

当 $x=1,y=1$ 时,由原方程可得 $z=0$,代入$(*)$式可得 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=2$.

11.10　(C)　解　由题设可知,当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}>0$,且 $f(0,0)=0$,故点 $(0,0)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点. 由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}$ 不存在,可知在点 $(0,0)$ 处 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 不存在,因此点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的驻点,故选(C).

11.11　解
$$f_x'(x,y)=2xy^2+1+\ln x,\quad f_y'(x,y)=2x^2y.$$

令
$$\begin{cases}f_x'(x,y)=0,\\f_y'(x,y)=0,\end{cases}$$

解得唯一驻点 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)$. 由于

$$f''_{xx}=2y^2+\frac{1}{x},\quad f''_{xy}=4xy,\quad f''_{yy}=2x^2,$$

$$A=f''_{xx}\left(\frac{1}{e},0\right)=e,\quad B=f''_{xy}\left(\frac{1}{e},0\right)=0,\quad C=f''_{yy}\left(\frac{1}{e},0\right)=\frac{2}{e^2},$$

由于 $AC-B^2=\frac{2}{e}>0, A=e>0$,可知点 $\left(\frac{1}{e},0\right)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点,极小值为 $-\frac{1}{e}$.

11.12 解 设 $P(x,y)$ 为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上任意一点,则 P 到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离为 $d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$. 求 d 的最小值点即求 d^2 的最小值点. 设

$$F(x,y,\lambda)=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4),$$

由拉格朗日乘数法,令

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0,$$

得方程组

$$\begin{cases}\frac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0,\\ \frac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda y=0,\\ x^2+4y^2-4=0,\end{cases}$$

解方程组,得

$$x_1=\frac{8}{5},y_1=\frac{3}{5}\text{或}x_2=-\frac{8}{5},y_2=-\frac{3}{5},$$

于是

$$d\Big|_{(x_1,y_1)}=\frac{1}{\sqrt{13}},\quad d\Big|_{(x_2,y_2)}=\frac{11}{\sqrt{13}}.$$

由问题的实际意义,可知点 $\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$ 即为所求点.

【注】 有时目标函数比较复杂,为简便计算试着把目标函数等价转化,如本题将 d 转化成 d^2.

第12讲 二重积分

12.1 (D) **解** 由二重积分的几何意义可知，当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于以 D 为底，以 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积. 在 D_2 上，

$$z=f(x,y)=x^3+y<0,$$

可知(A)不正确. 又由于在 D_1 上，

$$z=f(x,y)=x^3+y>0,$$

可知所给曲顶柱体的体积为

$$-\iint\limits_{D_2}(x^3+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1}(x^3+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此(D)正确.

(B)错误，是因为将 $y=x^3$ 代入被积函数. 实际上，二重积分中被积函数 $f(x,y)$ 中 (x,y) 要取遍 D 上所有的点，而非仅限于 D 的边界点.

12.2 (C) **解** 在 D 内，$\frac{1}{4}\leqslant x+y\leqslant 1$，所以

$$\ln(x+y)\leqslant 0<\sin(x+y)<x+y,$$

于是

$$\iint\limits_D[\ln(x+y)]^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_D[\sin(x+y)]^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即 $I_1<I_3<I_2$.

12.3 (C) **解** 积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$ 既关于 x 轴对称，也关于 y 轴对称.

由于 x^3 为 x 的奇函数，$y^2\geqslant 0$，可知

$$I_1=\iint\limits_D(x^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0.$$

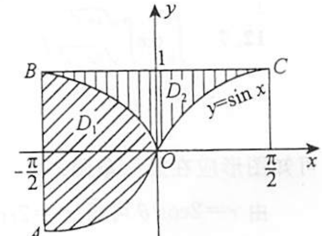
由于 x^3 为 x 的奇函数，$-y^2\leqslant 0$，可知

$$I_2=\iint\limits_D(x^3-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0.$$

由于 x^3 为 x 的奇函数，y^3 为 y 的奇函数，可知

$$I_3=\iint\limits_D(x^3+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

因此有 $I_2<I_3<I_1$. 故选(C).



12.4 $-\pi$ **解** 所给积分区域如图所示.

记 $A\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)$，$B\left(-\frac{\pi}{2},1\right)$，$C\left(\frac{\pi}{2},1\right)$. 作辅助线 $y=-\sin x$，则 $\overset{\frown}{BO}$ 将区域 D 划分为 D_1，D_2 两个子区域，区域 D_1 关于 x 轴对称，区域 D_2 关于 y 轴对称. 而 xy^5 既为 x 的奇函数，也为 y 的奇函数，从而 $\iint\limits_{D_1}xy^5\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$0, \iint\limits_{D_2} xy^5 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，因此

$$\text{原式} = -\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_{\sin x}^{1} \mathrm{d}y$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\mathrm{d}x \xlongequal{(*)} -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = -\pi.$$

【注】 上述(*)处运用了定积分的对称性.

12.5 (B) 解 积分区域 D 的边界曲线为 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{2-x^2}$，其交点为(1,1)与(-1,1)，故 D 可用极坐标表示为

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}\right\}.$$

则
$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\sin r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}(-\cos r^2)\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}(-\cos 2+1).$$

12.6 (D) 解 所给问题为直角坐标系下的二重积分，积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2y\}$ 在直角坐标系下可以表示为 $x^2+(y-1)^2\leqslant 1$，即圆心在(0,1)，半径为1的圆域. 因此区域 D 可表示为

$$-1\leqslant x\leqslant 1, 1-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{1-x^2},$$

也可以表示为

$$0\leqslant y\leqslant 2, -\sqrt{2y-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2y-y^2}.$$

因此

$$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(xy)\mathrm{d}y,$$

可知(A)不正确. 又

$$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy)\mathrm{d}x,$$

且题设中没有给出 $f(xy)$ 为偶函数的条件，可知(B)也不正确.

在极坐标系下，$x^2+y^2=2y$ 转化为 $r=2\sin\theta$. 因此 D 可以表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta,$$

因此

$$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\cos\theta\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

可知(C)不正确，(D)正确. 故选(D).

12.7 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$ 解 区域 D 在极坐标系下表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 2\cos\theta\leqslant r\leqslant 2,$$

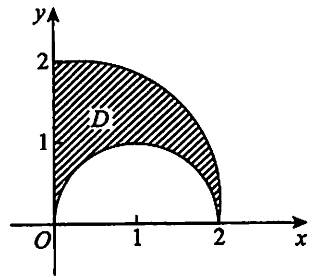
可知图形应在第一象限.

由 $r=2\cos\theta$ 可得 $r^2=2r\cos\theta$，对应 $x^2+y^2=2x$.

由 $r=2$ 得 $r^2=4$，对应 $x^2+y^2=4$.

在直角坐标系下，区域 D 如图所示，可以表示为

$$0\leqslant x\leqslant 2,\ \sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{4-x^2}.$$

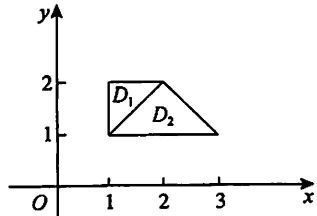


因此

$$\text{原式}=\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)dy.$$

12.8 (C) 解 积分 $\int_1^2 dy\int_1^y f(x,y)dx$ 与 $\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx$ 的积分区域分别为

$$D_1=\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2,1\leqslant x\leqslant y\},$$
$$D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2,y\leqslant x\leqslant 4-y\},$$



其图形如图所示．D_1 与 D_2 有公共边 $y=x$，故 D_1+D_2 可以表示为

$$1\leqslant y\leqslant 2,1\leqslant x\leqslant 4-y,$$

于是

$$\text{原式}=\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx,$$

故选(C)．

12.9 $(t-1)f(t)$ 解 所给积分为二次变限积分，它是变量 t 的函数．故求 $F'(t)$ 需先将二次变限积分化为变限的单积分．为此考虑所给二次积分的特点，由于依给定的积分次序，不能化为变限单积分，因此先交换积分次序，可得

$$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy=\int_1^t (x-1)f(x)dx,$$

于是 $F'(t)=(t-1)f(t)$．

12.10 解 设 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，$D_2=\{(x,y)\mid (x+1)^2+y^2\leqslant 1\}$，则

$$\iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma=\iint\limits_{D_1}(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma-\iint\limits_{D_2}(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma,$$

其中

$$\iint\limits_{D_1}(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+\iint\limits_{D_1}yd\sigma$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2dr+0=\frac{16}{3}\pi,$$

$$\iint\limits_{D_2}(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma=\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+\iint\limits_{D_2}yd\sigma$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^{-2\cos\theta} r^2dr+0=\frac{32}{9},$$

所以 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma=\frac{16}{9}(3\pi-2)$．

第13讲 常微分方程

13.1 (B) **解** 由于 $y_1(x),y_2(x)$ 为非齐次方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的两个不同的特解，因此 $y_1(x)-y_2(x)$ 为对应的齐次方程 $y'+P(x)y=0$ 的特解，$C[y_1(x)-y_2(x)]$ 为齐次方程的通解，故所给非齐次方程的通解可以表示为 $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$，选(B).

13.2 (B) **解** 原微分方程所对应齐次方程的特征方程为 $r^2-4r+4=0$，特征根 $r_{1,2}=2$. 而 $f_1(x)=x^2,\lambda_1=0$ 非特征根，故 $y_1^*=ax^2+bx+c$. 又 $f_2(x)=8e^{2x},\lambda_2=2$ 是二重特征根，所以 $y_2^*=dx^2e^{2x}$. $y_1^*+y_2^*$ 就是特解的形式，选(B).

13.3 (B) **解** 原微分方程所对应齐次方程的特征方程为 $r^2+2r-3=0$，特征根 $r_1=1,r_2=-3$. 由于 $y''+2y'-3y=e^x\sin^2 x=e^x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$，因此自由项 $\frac{1}{2}e^x$ 所对应的特解形式 $y_1^*=Axe^x$；自由项 $-\frac{1}{2}e^x\cos 2x$ 所对应的特解形式为 $y_2^*=e^x(B\cos 2x+C\sin 2x)$. 因此原微分方程的特解形式为

$$y^*=y_1^*+y_2^*=e^x(Ax+B\cos 2x+C\sin 2x).$$

选(B).

13.4 $\ln y=C\sin x$ 或 $y=e^{C\sin x}$，其中 C 为任意常数 **解** 原方程分离变量，有 $\frac{dy}{y\ln y}=\frac{\cos x}{\sin x}dx$，积分得

$$\ln|\ln y|=\ln|\sin x|+C_1,$$

故通解为 $\ln y=C\sin x$ 或 $y=e^{C\sin x}$，其中 C 为任意常数.

13.5 **解** 将所给方程两边同乘以 x，得

$$x\int_0^1 f(tx)dt=\frac{1}{2}xf(x)+x.$$

令 $u=tx$，则上式变为 $\int_0^x f(u)du=\frac{1}{2}xf(x)+x$，两边对 x 求导得

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}xf'(x)+1,$$

即

$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-\frac{2}{x}.$$

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式计算得 $f(x)=Cx+2$，其中 C 为任意常数.

13.6 $x^2=y(\ln|y|+C)$，其中 C 为任意常数 **解** 将原方程改写为 $\frac{dx}{dy}=\frac{x^2+y}{2xy}=\frac{x}{2y}+\frac{1}{2x}$，这是一个伯努利方程，令 $z=x^2$，有

$$\frac{dz}{dy}-\frac{z}{y}=1,$$

得

$$x^2=z=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right)=y(\ln|y|+C)，其中 C 为任意常数.$$

【注】 易见，$y=0$ 也是原方程的一个解，它不包含在上述通解表达式之中.

13.7 $y=C_1+\frac{C_2}{x^2}$（C_1,C_2 为任意常数） 解 这是 $y''=f(x,y')$ 型的可降阶微分方程. 令 $p=y'$，则

$$p'+\frac{3}{x}p=0,\quad p=Cx^{-3},$$

因此，

$$y=\int Cx^{-3}\mathrm{d}x=C_1-\frac{C}{2}x^{-2}=C_1+\frac{C_2}{x^2}(C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

13.8 解 令 $y'=p$，则 $y''=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)'=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程可化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0,$$

可得 $p=0$ 或 $y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p=0$. $p=0$ 不符合初值条件 $y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$，舍去，则 $y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p=0$.

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$，两端分别积分 $\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=\int\frac{\mathrm{d}y}{y}$，得 $p=C_1y$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y$.

由初值条件 $y\Big|_{x=0}=1$，$y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$，可得 $C_1=\frac{1}{2}$，从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1}{2}\mathrm{d}x,$$

积分可得

$$\ln y=\frac{1}{2}x+C_2,$$

再由 $y\Big|_{x=0}=1$，可得 $C_2=0$，故所求特解为 $\ln y=\frac{x}{2}$ 即 $y=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

13.9 $y'-y=2x-x^2$ 解 利用线性微分方程解的性质与结构. 设所求的一阶非齐次线性微分方程为

$$y'+p(x)y=q(x),$$

显然 $y=x^2$ 和 $y=x^2-\mathrm{e}^x$ 的差 e^x 是方程 $y'+p(x)y=0$ 的解，代入方程得

$$p(x)=-1.$$

再把 $y=x^2$ 代入方程 $y'-y=q(x)$，得 $q(x)=2x-x^2$.

故所求的一阶非齐次线性微分方程为 $y'-y=2x-x^2$.

13.10 解 由于 $y_2=(x+1)\mathrm{e}^x$ 为二阶齐次线性微分方程的特解，由解的结构可知，$y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=x\mathrm{e}^x$ 都为该齐次方程的解. 故 $r=1$ 为二重特征根，特征方程为

$$(r-1)^2=r^2-2r+1=0,$$

则对应齐次方程为

$$y''-2y'+y=0.$$

又由于 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 为非齐次方程的特解，$y=x\mathrm{e}^x$ 为对应齐次方程的解，可知 $y_1-x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{-x}=y^*$ 也为该非齐次方程的特解. 设所求方程为

$$y''-2y'+y=f(x).$$

将 $y^*=\mathrm{e}^{-x}$ 代入上面的方程，可得 $f(x)=4\mathrm{e}^{-x}$. 因此所求方程为 $y''-2y'+y=4\mathrm{e}^{-x}$.

13.11 解 对应的齐次方程为 $$y''-4y=0,$$
特征方程 $$r^2-4=0,$$
特征根 $$r_1=-2,r_2=2,$$
故齐次方程的通解为 $$Y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

由于 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$，$\lambda=2$ 为特征方程的单根，可设原方程特解 $y^*=Ax\mathrm{e}^{2x}$，代入原方程可求得
$$A=\frac{1}{4},$$
因此 $$y^*=\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{2x},$$
原方程通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{2x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

13.12 解 (1)由 $r^4-r^3+r^2-r=0$，即 $r^3(r-1)+r(r-1)=0$，也即 $r(r-1)(r^2+1)=0$，得 $r_1=0$，$r_2=1$，$r_{3,4}=\pm\mathrm{i}$，于是通解 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^x+C_3\cos x+C_4\sin x$，其中 C_1,C_2,C_3,C_4 是任意常数.

(2)要想在 $x\to 0$ 时保证 y 是 x 的三阶无穷小，最简单的办法就是对 y 作泰勒展开，
$$\begin{aligned}y&=C_1+C_2\mathrm{e}^x+C_3\cos x+C_4\sin x=C_1+C_2\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]+\\&\quad C_3\left[1-\frac{1}{2}x^2+0x^3+o(x^3)\right]+C_4\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]\\&=C_1+C_2+C_3+(C_2+C_4)x+\left(\frac{C_2}{2}-\frac{C_3}{2}\right)x^2+\left(\frac{C_2}{6}-\frac{C_4}{6}\right)x^3+o(x^3),\end{aligned}$$
于是必须 $C_1+C_2+C_3=0$，$C_2+C_4=0$，$\frac{C_2}{2}-\frac{C_3}{2}=0$，$\frac{C_2}{6}-\frac{C_4}{6}\neq 0$，解得 $C_2=C_3=-C_4=-\frac{C_1}{2}$，且 $C_1\neq 0$，记 $C_1=2C$，则
$$y=2C-C\mathrm{e}^x-C\cos x+C\sin x，其中 C\neq 0.$$

第14讲 无穷级数（仅数学一、数学三要求）

14.1 (D) **解** 级数具有以下性质.

级数去掉或加上有限项,不改变级数的敛散性.可知(A)正确,应排除(A).

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 必收敛,且有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$. 可知(C)正确,应排除(C).

利用上述相加的性质及反证法可以证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 必发散.

这个性质常可用来作为判定级数发散的准则.可知(B)正确,应排除(B).

可以举反例说明(D)不正确,如 $a_n=\frac{1}{n^2}-1$,$b_n=\frac{2}{n^2}+1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散.故选(D).

14.2 (B) **解** 由级数收敛的性质可知:若加括号的级数收敛,原级数未必收敛,可知命题①不正确,即级数收敛,去括号所得级数未必收敛.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 未必收敛,可知命题④不正确.也可取反例,对于①,令 $u_n=(-1)^{n-1}$;对于④,令 $u_n=(-1)^{n-1}$,$v_n=(-1)^n$.

由级数去掉前面有限项,不改变级数收敛性的性质,可知命题②正确.

若级数满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在且大于1,则级数发散,可知命题③正确.

综上可知应选(B).

14.3 (B) **解** 因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都为正项级数且收敛,又 $|a_nb_n|=\sqrt{a_n^2\cdot b_n^2}\leqslant\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$,由比较判别法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.选(B).

14.4 **解** (1)显然,$0<\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n<\left(\frac{n}{3n}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$,又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 收敛,则由比较判别法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$ 收敛.

(2)因 $\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\frac{1}{n^{3/2}}$,又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛,则由比较判别法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

(3)因
$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}\geqslant\frac{1}{3\sqrt[3]{(n+1)^2}},$$
又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{2/3}}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ 发散,则由比较判别法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$ 发散.

14.5 (C) **解** 利用泰勒展开式

$$\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+\frac{k}{n}+\frac{k}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1+k}{n}+\frac{k}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

若级数收敛，则 $1+k=0$，即 $k=-1$，应选(C).

14.6 (A) 解 由题设知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，并且收敛，可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛.

记 $u_n=\left|n\sin\frac{\lambda}{n}\right|a_{2n}$，$v_n=a_{2n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|n\sin\frac{\lambda}{n}\right|a_{2n}}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sin\frac{\lambda}{n}\right|}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\lambda}{n}}{\frac{1}{n}}=\lambda>0,$$

由正项级数比较判别法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的收敛性相同，又知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|n\sin\frac{\lambda}{n}\right|a_{2n}$ 收敛，从而知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\sin\frac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$ 绝对收敛. 故选(A).

14.7 (C) 解 由于 $(-1)^n\frac{n^{3/2}-k}{n^{5/2}}=(-1)^n\frac{1}{n}+(-1)^{n+1}\frac{k}{n^{5/2}}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{k}{n^{5/2}}$ 都是交错级数，由莱布尼茨定理可知两个级数都收敛，从而知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{3/2}-k}{n^{5/2}}$ 收敛.

当 $n^{3/2}-k>0$ 时，可知

$$\left|(-1)^n\frac{n^{3/2}-k}{n^{5/2}}\right|=\frac{n^{3/2}-k}{n^{5/2}},$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{3/2}-k}{n^{5/2}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n^{3/2}}\right)=1,$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较判别法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3/2}-k}{n^{5/2}}$ 发散，从而知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{3/2}-k}{n^{5/2}}$ 条件收敛，故选(C).

14.8 3 解 因 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处收敛，故由阿贝尔定理知，当 $|x|<3$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛.

又因 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛，故当 $|x|>3$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散. 如若不然，必存在 x_1，使 $|x_1|>3$ 且在 $x=x_1$ 处 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛. 由阿贝尔定理便可推出 $|x|<|x_1|$ 时，特别是 $x=-3$ 时 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛. 这与题设中级数在 $x=-3$ 处条件收敛相矛盾.

综上，由收敛半径的定义知 $R=3$.

14.9 [1,3) 解 令 $y=x-2$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(x-2)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}y^n$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}y^n$ 为不缺项级数，令 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|=1$，故 $R=1$. 当 $y=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发

散(p 级数,$p=\frac{1}{2}<1$),当 $y=-1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 为收敛的交错级数.因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}y^n$ 的收敛域为$[-1,1)$,从而$-1\leqslant x-2<1$,即 $1\leqslant x<3$,故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(x-2)^n$ 的收敛域为$[1,3)$.

14.10 解 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n},\quad S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1},\quad S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n},$$

则

$$S(x)=S_1(x)-S_2(x),x\in(-1,1).$$

由于

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},$$

$$[xS_1(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},x\in(-1,1),$$

因此

$$xS_1(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

又由于

$$S_1(0)=0,$$

故

$$S_1(x)=\begin{cases}-1+\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & |x|\in(0,1),\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

因此

$$S(x)=S_1(x)-S_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}, & |x|\in(0,1),\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

14.11 解 由 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}$ 的形式,考查幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^{n-1}.$$

容易求得它的收敛半径为 $R=1$,记

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^{n-1},x\in(-1,1),$$

逐项积分,得

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)\frac{x^n}{n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n.$$

再逐项积分,得

$$\int_0^x\left[\int_0^t S(w)\mathrm{d}w\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n$$
$$=x\cdot\frac{-x}{1-(-x)}=\frac{-x^2}{1+x},$$

所以

$$S(x)=\left(\frac{-x^2}{1+x}\right)''=\frac{-2}{(1+x)^3},x\in(-1,1).$$

再将 $x=\frac{1}{2}$ 代入,得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}=-\frac{8}{27}.$$

14.12 $e^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}(-\infty<x<+\infty)$ **解** $e^x=e^{3+(x-3)}=e^3\cdot e^{x-3}$，因

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n(-\infty<x<+\infty),$$

从而

$$e^x=e^3\cdot e^{x-3}=e^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-3)^n\ (-\infty<x<+\infty).$$

14.13 解

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}},$$

由麦克劳林展开式知

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1},x\in(-1,1),$$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1},x\in(-2,2),$$

从而有

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x^{n-1},x\in(-1,1).$$

第15讲 数学一、数学二专题内容

15.1 $\dfrac{95}{6\sqrt{10}}$ cm/s 解 点 P 到原点 O 的距离 $s=\sqrt{x^2+y^2}$，于是

$$\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+x}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{5(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

当 $x=9$ 时，$\left.\dfrac{d}{dt}\sqrt{x^2+y^2}\right|_{x=9}=\left.\dfrac{5(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}\right|_{x=9}=\dfrac{95}{6\sqrt{10}}$(cm/s).

15.2 $y=-\dfrac{1}{\pi}(x-1)+\dfrac{\pi}{4}$ 解 由条件有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{\sin t}{2t},\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{\pi},$$

且 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时，对应点为 $\left(1+\dfrac{\pi^2}{4},0\right)$，故切线方程为 $y=-\dfrac{1}{\pi}(x-1)+\dfrac{\pi}{4}$.

15.3 $-\dfrac{1}{8}$ 解 由

$$y'=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\cos t}{1+e^t},$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos t}{1+e^t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t}{1+e^t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{-\sin t\cdot(1+e^t)-\cos t\cdot e^t}{(1+e^t)^2}\cdot\frac{1}{1+e^t},$$

故 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{8}$.

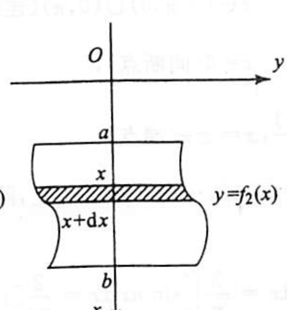
15.4 (D) 解 由图可知，在 $[x,x+dx]$ 上液体对阴影部分的压力微元为

$$rx[f_2(x)-f_1(x)]dx,$$

因此平面板所受液压力为

$$F=\int_a^b rx[f_2(x)-f_1(x)]dx,$$

故选(D).



15.5 $\frac{3}{2}\pi a$ **解** 弧长 $L=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3}+\left(3a\sin^2\frac{\theta}{3}\cdot\cos\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^2}\mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3}+a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cdot\cos^2\frac{\theta}{3}}\mathrm{d}\theta$$

$$=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi a.$$

15.6 **解** (1) $T(0)=20$，于是 $b=20$，且当 $t\to+\infty$ 时，$T\to 200$，即 $a+b=200$，则 $a=180$.

(2) $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=ak\mathrm{e}^{-kt}$，代入 $\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=2, a=180$，可求得 $k=\frac{1}{90}$.

15.7 **解** 此为欧拉方程，按解欧拉方程的办法解之.

当 $x>0$ 时，令 $x=\mathrm{e}^t$，有 $t=\ln x$，经计算化原方程为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=\mathrm{e}^{2t}$，其特征方程为 $r^2-r-2=0$，特征根 $r_1=2, r_2=-1$，则其齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{-t}$. 设特解 $y^*=At\mathrm{e}^{2t}$，可得 $A=\frac{1}{3}$. 从而得通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}t\mathrm{e}^{2t}=C_1x^2+\frac{C_2}{x}+\frac{1}{3}x^2\ln x.$$

当 $x<0$ 时，令 $x=-u$，原方程化为 y 关于 u 的方程

$$u^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}-2y=u^2,$$

得通解

$$y=C_3u^2+\frac{C_4}{u}+\frac{1}{3}u^2\ln u=C_3x^2-\frac{C_4}{x}+\frac{1}{3}x^2\ln(-x).$$

合并两种情形得原方程的通解为

$$y=C_1x^2+\frac{C_2}{|x|}+\frac{1}{3}x^2\ln|x|\text{，其中 }C_1,C_2\text{ 为任意常数.}$$

15.8 $\frac{\pi^2-5}{2}$ **解** 由狄利克雷收敛定理可知，$f(x)$ 在 $x=\pm\pi$ 处的傅里叶级数收敛于 $\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$.

因为 $f(\pi^-)=-5, f(-\pi^+)=x^2\Big|_{x=-\pi}=\pi^2$，故 $S(\pm\pi)=\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{\pi^2-5}{2}$.

15.9 $0;\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n];\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 0, & x=0,\pm\pi,\\ 1, & 0<x<\pi\end{cases}$ **解** $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足狄利克雷收敛定理条件，进行周期延拓得 $F(x)$，有 $F(x)\equiv f(x), x\in(-\pi,\pi)$. 由狄利克雷收敛定理可知：

$$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)\text{（连续区间）},\\ \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}, & x=0\text{（间断点）},\\ \frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}, & x=\pm\pi\text{（端点）}\end{cases}=\begin{cases}-1, & x\in(-\pi,0),\\ 1, & x\in(0,\pi),\\ 0, & x=0,\pm\pi,\end{cases}$$

其中傅里叶级数的系数为：$a_n=0, n=0,1,2,\cdots$（在 $[-\pi,\pi]$ 上，除去间断点 $x=0$ 外，$f(x)$ 是奇函数，所以其傅里叶级数必为正弦级数），

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\ (n=1,2,3,\cdots).$$

15.10 解　由于 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 是偶函数，因此

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5,$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2},n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=0,n=1,2,\cdots,$$

因所给函数在区间 $[-1,1]$ 上满足狄利克雷充分条件，故

$$2+|x|=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

当 $x=0$ 时，$2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$，从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. 又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

第16讲 数学三专题内容

16.1 $\frac{20}{3}-\frac{2}{3}Q$ 解 $P=\frac{20-Q}{3}$， $R=Q\cdot P=Q\cdot\frac{20-Q}{3}=\frac{20}{3}Q-\frac{1}{3}Q^2$，故

$$\frac{dR}{dQ}=\frac{20}{3}-\frac{2}{3}Q.$$

16.2 $\frac{s}{1-\varepsilon}$ 解 需求的价格弹性为$-\frac{Q'}{Q}P$，其中Q为需求量，即产量，P为价格. 依题意，$-\frac{Q'}{Q}P=\varepsilon$，即

$$PQ'=-\varepsilon Q.$$

收益函数$R=PQ$，它对价格的边际为$\frac{dR}{dP}$，由题意，

$$s=\frac{dR}{dP}=Q+PQ'=(1-\varepsilon)Q.$$

所以$Q=\frac{s}{1-\varepsilon}$.

16.3 $1\,500\cdot3^{-P}$ 解 需求量对价格的弹性

$$\eta=-\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q},$$

分离变量，有

$$\frac{dQ}{Q}=-\ln3\cdot dP,$$

两边积分，得$Q=C\cdot3^{-P}$，又$Q\Big|_{P=0}=1\,500$，可知$C=1\,500$，故需求函数为

$$Q=1\,500\cdot3^{-P}.$$

16.4 解 由题意可得，

$$\overline{R'}=\frac{1}{2\,000}\int_0^{2\,000}\left(200-\frac{a}{50}\right)da=\frac{1}{2\,000}\left(200a-\frac{a^2}{100}\right)\Big|_0^{2\,000}=180.$$

16.5 解 设产量为a时总利润最大，即$L'\Big|_{x=a}=0$，又$L=R-C$，$L'(x)=R'(x)-C'(x)=4-\frac{5}{4}x$，解得$a=\frac{16}{5}=3.2$(百台)，故

$$L\Big|_{x=3.2}=\int_0^{3.2}L'(x)dx-1=\int_0^{3.2}\left(4-\frac{5}{4}x\right)dx-1=5.4(\text{万元}).$$

16.6 解 (1)边际成本为$\frac{dC(x)}{dx}=3+x$.

(2)因收益$R=px=100\sqrt{x}$，故边际收益为$\frac{dR(x)}{dx}=\frac{50}{\sqrt{x}}$.

(3)因利润 $L=R-C$,故边际利润为$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=\frac{50}{\sqrt{x}}-3-x$.

(4)因收益 $R=px$,由 $p=\frac{100}{\sqrt{x}}$知 $x=\frac{100^2}{p^2}$,故 $R=\frac{100^2}{p}$,收益对价格的弹性为

$$\frac{\mathrm{d}R}{R}\Big/\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{p}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=\left(\frac{p}{100}\right)^2\left(-\frac{100^2}{p^2}\right)=-1.$$

16.7 解 利润函数为 $L=R-C=18x-3x^2-4x^3$.

边际收入函数为 $MR=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}=26-4x-12x^2$.

边际成本函数为 $MC=\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=8+2x$.

令$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=18-6x-12x^2=0$ 得 $x=1,x=-\frac{3}{2}$(舍去). 又$\left.\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1}=(-6-24x)\Big|_{x=1}=-30<0$,可知当 $x=1$时,L 取极大值为$L\Big|_{x=1}=(18x-3x^2-4x^3)\Big|_{x=1}=11$. 因为 $x>0$ 时,$L(x)$只有一个极大值,故此极大值就是最大值. 所以,当产量为 1 时利润最大,最大利润为 11.

16.8 解 (1)

$$\Delta y_x=y_{x+1}-y_x=1-2(x+1)^2-(1-2x^2)=-4x-2,$$

$$\Delta^2 y_x=\Delta(\Delta y_x)=-4(x+1)-2-(-4x-2)=-4.$$

(2)

$$\Delta y_x=y_{x+1}-y_x=(x+1)3^{x+1}-x\cdot 3^x=(2x+3)3^x,$$

$$\Delta^2 y_x=\Delta(\Delta y_x)=[2(x+1)+3]3^{x+1}-(2x+3)3^x=(4x+12)3^x.$$

16.9 解 因为原方程可化为 $y_{x+1}-y_x=3$,相应的齐次方程为 $y_{x+1}-y_x=0$,所以其特征方程为 $r-1=0$,特征根为 $r=1$,故相应的齐次方程的通解为 $Y_x=C$.

因为 $P_n(x)b^x=3$,即已知多项式为 $P_n(x)=3$ 是零次的,而 $b=1$ 是特征根,所以设特解为$y_x^*=Ax$,则 $y_{x+1}^*=A(x+1)$,代入原方程 $y_{x+1}-y_x=3$,得 $A=3$,所以 $y_x^*=3x$,故得原方程的通解

$$y_x=Y_x+y_x^*=C+3x,\text{其中 } C \text{ 为任意常数}.$$

将 $y_0=2$ 代入通解,得 $C=2$,故满足初始条件的特解为 $y_x=2+3x$.

第17讲 多元函数积分学的基础知识（仅数学一要求）

17.1 1 **解** 由 $\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$，可知

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3-1,-5+1,8+z)=(2,-4,8+z),$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3+1,-5-1,8-z)=(4,-6,8-z),$$
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+(8+z)^2}=\sqrt{20+(8+z)^2},$$
$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{4^2+(-6)^2+(8-z)^2}=\sqrt{52+(8-z)^2},$$

由题设可知

$$\sqrt{20+(8+z)^2}=\sqrt{52+(8-z)^2},$$

可解得 $z=1$.

17.2 $2x-y=0$ **解** 过 z 轴的平面可设为 $Ax+By=0$，平面过点 $(1,2,-1)$，将坐标代入方程，可得 $A+2B=0$，即 $A=-2B$.

从而平面方程为 $-2Bx+By=0$，即 $2x-y=0$.

17.3 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}$ **解** 已知平面 $2x-y+3z=5$ 的法线向量 $\boldsymbol{n}=(2,-1,3)$，所求直线垂直于已知平面，则直线的方向向量 $\boldsymbol{s}/\!/\boldsymbol{n}$，可取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}=(2,-1,3)$. 由直线的点向式方程可知，所求直线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

17.4 (C) **解** 先将直线

$$l:\begin{cases}x+y-z+1=0, & ①\\ x-y+3z+3=0 & ②\end{cases}$$

化为参数式方程.

由①+②可得 $\frac{x+2}{-1}=z$；

由①−②可得 $\frac{y-1}{2}=z$.

因此所给直线化为

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1},$$

其方向向量为 $\boldsymbol{s}=(-1,2,1)$.

又所给平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-2,-1)$，有 $\boldsymbol{s}/\!/\boldsymbol{n}$，因此 $l\perp\Pi$，故选(C).

17.5 **解** 欲求直线 l 在已给平面 Π 上的投影直线 l_0，应先求过 l 且与 Π 垂直的平面 Π_1. 为此先将 l 的方程化为一般式方程：

$$\begin{cases}x+z-2=0,\\ y+z-1=0,\end{cases}$$

则过 l 的平面束方程为

$$(x+z-2)+\lambda(y+z-1)=0,$$

其中与 Π 垂直的平面 Π_1 的法线向量应满足

$$3\times1+(-1)\lambda+3(1+\lambda)=0,$$

可解得 $\lambda=-3$,则 Π_1 的方程为

$$x-3y-2z+1=0,$$

因此 l 在 Π 上的投影直线 l_0 的方程为

$$\begin{cases}3x-y+3z=5,\\x-3y-2z+1=0.\end{cases}$$

17.6 $x^2+y^2-2z^2+2z-1=0$ **解** 由直线方程的两点式得直线 AB 的方程：

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}.$$

写成参数式：

$$x=1+t,\quad y=-t,\quad z=-t,$$

得旋转曲面 S 的方程：

$$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2,\text{即 } x^2+y^2-2z^2+2z-1=0.$$

17.7 (B) **解** 曲线在 t_0 处的切向量为 $\boldsymbol{\tau}=(1,-2t_0,3t_0^2)$，该切线与平面 $x+2y+z=4$ 平行$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\tau}$ 与该平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$ 垂直$\Leftrightarrow\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}=0\Leftrightarrow1-4t_0+3t_0^2=0\Leftrightarrow t_0=1$ 或 $t_0=\frac{1}{3}$.

将 $t_0=1,t_0=\frac{1}{3}$ 代入曲线方程可得点 $(1,-1,1)$ 和点 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27}\right)$，再代入平面方程知两点均不在平面上，符合题意. 故与平面平行的切线只有 2 条.

17.8 6 **解** 设向量场 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，则在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Bigg|_{M(x_0,y_0,z_0)}.$$

因为 $\frac{\partial(x^3)}{\partial x}=3x^2,\frac{\partial(y^3)}{\partial y}=3y^2,\frac{\partial(z^3)}{\partial z}=3z^2$，故

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=(3x^2+3y^2+3z^2)\Big|_{(1,0,-1)}=6.$$

17.9 2 **解**

$$\mathbf{grad}\,u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=(2x,3+z,y),$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\,u)=\frac{\partial(2x)}{\partial x}+\frac{\partial(3+z)}{\partial y}+\frac{\partial(y)}{\partial z}=2.$$

17.10 (2,1,3) **解** 设向量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，则

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

因 $P=z,Q=3x,R=2y$，则

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}=(2,1,3).$$

17.11 (C) **解** 设 P 点的坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则曲面在 P 点的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(-2x_0,-2y_0,-1),$$

又因为切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则

$$\frac{-2x_0}{2}=\frac{-2y_0}{2}=\frac{-1}{1},$$

从而可得 $x_0=1,y_0=1$，代入曲面方程解得 $z_0=2$.

故选(C).

17.12 **解** 方向导数的最大值就是 $\left|\mathbf{grad}\, u\Big|_P\right|$. 由所给方程两边对 x 求偏导数，u 视为 x,y,z 的函数，有

$$\mathrm{e}^{z+u}\frac{\partial u}{\partial x}-y-z\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{\mathrm{e}^{z+u}-z}.$$

当 $x=1,y=1,z=0$ 时 $u=0$，代入上式后，得 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=1$. 类似可得 $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=1,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=0$. 所以

$$\mathbf{grad}\, u\Big|_P=(1,1,0),\quad \left|\mathbf{grad}\, u\Big|_P\right|=\sqrt{2}.$$

第18讲 三重积分、曲线曲面积分（仅数学一要求）

18.1 (C) 解 由题设知 Ω_1 关于 yOz 坐标平面对称，选项(A)与(D)的左端积分中被积函数为 x 的奇函数，由三重积分对称性质知

$$\iiint\limits_{\Omega_1}\sin x\mathrm{d}v=0,\quad \iiint\limits_{\Omega_1}\sin xyz\mathrm{d}v=0.$$

在 Ω_2 内 $\sin x\geqslant 0$，可知 $\iiint\limits_{\Omega_2}\sin x\mathrm{d}v>0$，因此(A)不正确.

又 Ω_1 关于 xOz 坐标平面对称，选项(B)的左端积分中被积函数为 y 的奇函数，由对称性质知 $\iiint\limits_{\Omega_1}\sin y\mathrm{d}v=0$.

在 Ω_2 内 $\sin y\geqslant 0$，可知 $\iiint\limits_{\Omega_2}\sin y\mathrm{d}v>0$，因此(B)不正确.

在 Ω_2 内 $\sin xyz\geqslant 0$，可知 $\iiint\limits_{\Omega_2}\sin xyz\mathrm{d}v>0$，因此(D)不正确.

Ω_1 关于 yOz 坐标平面对称，也关于 xOz 坐标平面对称，选项(C)的左端积分中被积函数为 $\sin z$，它是 x 的偶函数，也是 y 的偶函数，两次利用三重积分对称性质知 $\iiint\limits_{\Omega_1}\sin z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}\sin z\mathrm{d}v$. 可知(C)正确. 故选(C).

18.2 $\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 解 用柱面坐标，$0\leqslant r\leqslant\sqrt{z}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\leqslant z\leqslant\sqrt{\pi}$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega}\sin z^2\mathrm{d}v=\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\sqrt{\pi}}\sin z^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}r\mathrm{d}r=\pi\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\sqrt{\pi}}z\sin z^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}(-\cos z^2)\Big|_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\sqrt{\pi}}=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

18.3 (B) 解 由轮换对称性可得，

$$\int_L(3x^2-y^2-z^2)\mathrm{d}s=\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\mathrm{d}s$$
$$=3\int_L\mathrm{d}s=3(2\pi\times 3)=18\pi.$$

18.4 (D) 解 因为 $\Sigma: x=0$ 且 $y^2+z^2\leqslant 1$，故 $D_{yz}=\{(y,z)\mid y^2+z^2\leqslant 1\}$，$\frac{\partial x}{\partial y}=0$，$\frac{\partial x}{\partial z}=0$，从而

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

所以 $$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{yz}}(y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

18.5 $37A$ 解 $(2x+3y)^2+(6z-1)^2=4x^2+9y^2+36z^2+12xy-12z+1$，由于 Σ 关于三个坐标平面都对称，因此

$$\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}S=0,\quad \iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=0.$$

又在 Σ 上有 $4x^2+9y^2+36z^2=36$，所以

$$原积分=\iint_{\Sigma}(4x^2+9y^2+36z^2+12xy-12z+1)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}37\mathrm{d}S=37A.$$

18.6 $\dfrac{16\pi}{3}$ **分析** 本题考查关于轮换对称性的判断.

(1)函数 xz 在 Σ 的 8 个卦限内,4 正 4 负,且对应点有相同的绝对值,故 $\iint_{\Sigma}xz\mathrm{d}S=0$;

(2)根据轮换对称性得到 $\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S$.

解 $$\iint_{\Sigma}x(4x-z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}4x^2\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{16\pi}{3}.$$

18.7 (A) **解** $\iint_{\Sigma}(2x+3y+z)\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}S+3\iint_{\Sigma}y\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S$,又有 $\overline{x}=\dfrac{1}{S}\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}S$,$\overline{y}=\dfrac{1}{S}\iint_{\Sigma}y\mathrm{d}S$,$\overline{z}=\dfrac{1}{S}\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S$ 是球面 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1$ 的形心坐标公式,而球面的形心在球心 $(1,0,-1)$ 处,故

$$\iint_{\Sigma}(2x+3y+z)\mathrm{d}S=(2\overline{x}+3\overline{y}+\overline{z})S=(2+0-1)4\pi=4\pi.$$

18.8 **解** **方法一** 补线,用格林公式.

$$\begin{aligned}I&=\oint_{L+\overline{AO}}-\int_{\overline{AO}}=-\iint_{D}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{0}(\mathrm{e}^x+2x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}\mathrm{d}y-(\mathrm{e}^x+x^2)\Big|_{\pi}^{0}\\&=\frac{1}{2}\times2-[1-(\mathrm{e}^{\pi}+\pi^2)]=\mathrm{e}^{\pi}+\pi^2.\end{aligned}$$

方法二 令 $I=\int_L\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}y+\int_L2(x+y)\mathrm{d}x+\frac{3}{2}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$,而

$$I_1=\int_L\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\cos y)=\mathrm{e}^x\cos y\Big|_{(0,0)}^{(\pi,0)}=\mathrm{e}^{\pi}-1,$$

$$\begin{aligned}I_2&=\int_L2(x+y)\mathrm{d}x+\frac{3}{2}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\left[2(x+\sin x)+\frac{3}{2}x\cos x\right]\mathrm{d}x\\&=\left(x^2-2\cos x+\frac{3}{2}x\sin x+\frac{3}{2}\cos x\right)\Big|_0^{\pi}=\pi^2+1,\end{aligned}$$

所以 $I=I_1+I_2=\mathrm{e}^{\pi}+\pi^2$.

18.9 **解** 以 Σ_1 表示法向量指向 z 轴负向的有向平面 $z=1(x^2+y^2\leqslant1)$,D 为 Σ_1 在 xOy 平面上的投影区域,则

$$\iint_{\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.$$

设 Ω 表示由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间区域,则由高斯公式知

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=-\iiint_{\Omega}(2+1)\mathrm{d}v=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z\\&=-6\pi\int_0^1(r-r^3)\mathrm{d}r=-6\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

因此,$\iint_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\dfrac{3}{2}\pi-(-\pi)=-\dfrac{1}{2}\pi$.

18.10 解 先以$(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=a$代入被积函数，得

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

补一块有向平面$S^-:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2,\\ z=0,\end{cases}$其法向量与$z$轴正向相反，从而得到

$$I=\frac{1}{a}\left[\oiint_{\Sigma+S^-}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{S^-}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[-\iiint_{\Omega}(3a+2z)\mathrm{d}v+\iint_{D}a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right],$$

其中Ω为$\Sigma+S^-$围成的空间区域，D为$z=0$上的平面区域$x^2+y^2\leqslant a^2$，于是

$$I=\frac{1}{a}\left(-2\pi a^4-2\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v+\pi a^4\right)$$

$$=\frac{1}{a}\left(-\pi a^4-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{0}z\mathrm{d}z\right)$$

$$=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

18.11 解 **方法一** 降维化为平面第二型曲线积分.

曲线$C:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x-y+z=2\end{cases}$在$xOy$面上的投影曲线为$l:x^2+y^2=1$，顺时针方向，$l$围成的闭区域记为$D:x^2+y^2\leqslant 1$，由$x-y+z=2$得$z=2-x+y$，于是

$$\oint_C(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\oint_l(2-x)\mathrm{d}x+(2x-y-2)\mathrm{d}y+(x-y)(-\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$$

$$=\oint_l(2-2x+y)\mathrm{d}x+(3x-2y-2)\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D(3-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\times\pi\times 1^2=-2\pi.$$

方法二 直接法.

令$x=\cos\theta,y=\sin\theta$，则

$$z=2-x+y=2-\cos\theta+\sin\theta,$$

于是

$$\oint_C(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=-\int_{2\pi}^{0}[2(\sin\theta+\cos\theta)-2\cos 2\theta-1]\mathrm{d}\theta$$

$$=-[2(-\cos\theta+\sin\theta)-\sin 2\theta-\theta]\Big|_{2\pi}^{0}=-2\pi.$$

18.12 解 **方法一** 降维化为平面第二型曲线积分.

$L:\begin{cases}x+y+z=2,\\ |x|+|y|=1\end{cases}$在$xOy$面上的投影曲线为$l:|x|+|y|=1$，逆时针方向，$l$围成的闭区域记为$D:|x|+|y|\leqslant 1$，由$x+y+z=2$，得$z=2-x-y$，于是

$$I=\oint_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\oint_l[y^2-(2-x-y)^2]\mathrm{d}x+[2(2-x-y)^2-x^2]\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)(-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$$

$$=\oint_{l}(-4-4x^{2}+y^{2}+4x+4y-2xy)\mathrm{d}x+(8-2x^{2}+3y^{2}-8x-8y+4xy)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}(-2x+2y-12)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-24.$$

方法二 斯托克斯公式.

记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围部分的上侧，D 为 S 在 xOy 坐标面上的投影. 由斯托克斯公式得

$$I=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{S}(4x+2y+3z)\mathrm{d}S$$

$$=-2\iint_{D}(x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-12\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-24.$$

张宇

博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《张宇考研数学基础30讲》《张宇考研数学题源探析经典1000题》《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》《张宇考研数学真题大全解》《考研数学命题人终极预测8套卷》《张宇考研数学最后4套卷》《张宇经济类综合能力数学通关优题库》作者，高等教育出版社原《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》及《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》编者之一，北京、上海、广州、西安等全国著名考研数学辅导班首席主讲。

张宇考研数学系列丛书

教材类

张宇考研数学基础30讲・高等数学分册 书课包
张宇考研数学基础30讲・线性代数分册 书课包
张宇考研数学基础30讲・概率论与数理统计分册 书课包
张宇高等数学18讲 书课包
张宇线性代数9讲 书课包
张宇概率论与数理统计9讲 书课包

题集类

张宇考研数学题源探析经典1000题（分数学一、数学二、数学三）书课包
张宇考研数学真题大全解（分数学一、数学二、数学三）书课包
考研数学命题人终极预测8套卷（分数学一、数学二、数学三）书课包
张宇考研数学最后4套卷（分数学一、数学二、数学三）书课包

宇哥考研
新浪微博二维码

张宇考研数学
微信公众号

启航教育
微信公众号