启航教育 云图 YUN TU 2024版

张宇考研数学系列丛书·一

书课包

张宇考研数学基础30讲

【高等数学分册】

主编 张宇
副主编 高昆轮

北京理工大学出版社

张宇考研数学系列丛书·一

启航教育 云图 YUN TU

张宇考研数学基础30讲

书课包

○ 主编 张宇 ○ 副主编 高昆轮

【高等数学分册】

张宇考研数学系列丛书编委（按姓氏拼音排序）

蔡燧林 曹泽祺 陈静静 方春贤 高昆轮 胡金德 贾建厂 李家隆
刘硕 吕倩 马丁 秦艳鱼 沈利英 石臻东 史明洁 仝雨晨 王国娟
王慧珍 王爽 王燕星 卫鹿琳 徐兵 严守权 杨若昕 亦一（笔名）
曾凡（笔名） 张翀 张乐 张雷 张青云 张勇利 张宇 郑利娜 朱杰

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

北京理工大学出版社

启航教育 云图 YUN TU

张宇考研数学系列丛书·一

张宇考研数学基础30讲

书课包

【高等数学分册】

○ 主编 张宇 ○ 副主编 高昆轮

张宇考研数学系列丛书编委（按姓氏拼音排序）

蔡燧林 曹泽祺 陈静静 方春贤 高昆轮 胡金德 贾建厂 李家隆
刘硕 吕倩 马丁 秦艳鱼 沈利英 石臻东 史明洁 仝雨晨 王国娟
王慧珍 王爽 王燕星 卫鹿琳 徐兵 严守权 杨若昕 亦一（笔名）
曾凡（笔名） 张翀 张乐 张雷 张青云 张勇利 张宇 郑利娜 朱杰

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

北京理工大学出版社

版权专有　侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学基础30讲. 高等数学分册 / 张宇主编. —
北京 : 北京理工大学出版社, 2022.6
ISBN 978-7-5763-0941-6

Ⅰ.①张… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第108125号

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
　　(010)82562903(教材售后服务热线)
　　(010)68944723(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 19.0
字　　数 / 611千字
版　　次 / 2022年6月第1版　2022年6月第1次印刷
定　　价 / 139.90元

责任编辑 / 多海鹏
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 李志强

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

前言

《张宇考研数学基础30讲》严格按照最新《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》编写，是真正意义上的考研数学基础阶段辅导用书，旨在帮助考生建立完整科学的考研数学基础知识结构体系，打下坚实的考研数学基础。

本书分成三个分册：高等数学分册、线性代数分册、概率论与数理统计分册。其中高等数学分册分为18讲、线性代数分册分为6讲、概率论与数理统计分册分为6讲，共30讲。每一讲由基础知识结构、基础内容精讲、基础例题精解、基础习题精练四大模块组成。此外，每个分册附赠对应的《张宇考研数学基础30讲——基础300题》(简称《基础300题》)分册和基础阶段测试卷，作为习题的一个补充，以及学完一学科后对自我水平的一个测评。

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

《张宇考研数学基础30讲》书课包是一套完整的考研数学基础阶段备考方案。为帮助考生更好地理解每一个知识点，我对本书做了系统讲解，同学们扫描书中二维码即可快速定位对应知识点的视频讲解。本书的内容是根据基础课程讲解整理出来的学习笔记，我几乎把要说的话一句一句写出来了，只需要集中精力认真听即可，帮助考生节省了做笔记的时间，真正做到了书和课的完美结合。值得指出的是，我和我的教学团队会不定期以直播的形式对《基础300题》和基础阶段测试卷进行讲评，更利于督促和检验考生的复习进度，查漏补缺，巩固所学，以便于切实解决考生在基础阶段遇到的问题和困惑。

我建议考生结合课程反复研读本书直至字字搞懂、句句通透并熟稔于心，达到基础阶段的知识、思路、题型和方法皆会以清晰的结构呈现眼前的效果。本书是我多年基础阶段教学经验的总结，愿助潜心研读者打好地基、夯实基础，勇攀考研数学高峰。

感谢命题专家们给予的支持、帮助与指导，感谢编辑老师们的辛勤工作和无私奉献，感谢学生们的努力和信任。

本书自出版以来，承蒙考生厚爱，在考研数学基础阶段起到了一定的积极作用。望各位不吝赐教，多提意见与建议，特此致谢！

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

张宇

2022年6月　于北京

目 录

第 1 讲　高等数学预备知识 …… 1
第 2 讲　数列极限 …… 25
第 3 讲　函数极限与连续性 …… 33
第 4 讲　一元函数微分学的概念与计算 …… 54
第 5 讲　一元函数微分学的几何应用 …… 75
第 6 讲　中值定理 …… 90
第 7 讲　零点问题与微分不等式 …… 100
第 8 讲　一元函数积分学的概念与计算 …… 109
第 9 讲　一元函数积分学的几何应用 …… 148
第 10 讲　积分等式与积分不等式 …… 156
第 11 讲　多元函数微分学 …… 164
第 12 讲　二重积分 …… 184
第 13 讲　常微分方程 …… 194
第 14 讲　无穷级数(仅数学一、数学三要求) …… 207
第 15 讲　数学一、数学二专题内容 …… 229
第 16 讲　数学三专题内容 …… 250
第 17 讲　多元函数积分学的基础知识(仅数学一要求) …… 259
第 18 讲　三重积分、曲线曲面积分(仅数学一要求) …… 271

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第1讲 高等数学预备知识

基础知识结构

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

基础内容精讲

微信公众号：djky66
(预尖考研祝您上岸)

一、函数的概念与特性

1. 函数

设 x 与 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，若对于每一个 $x\in D$，按照一定的法则 f，有一个确定的值 y 与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 称 x 为**自变量**，y 为**因变量**. 称数集 D 为此函数的**定义域**，定义域一般由实际背景中变量的具体意义或者函数对应法则的要求确定.

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R. 如果对于每一个 $y\in R$，必存在唯一的 $x\in D$ 使得 $y=f(x)$ 成立，则由此定义了一个新的函数 $x=\varphi(y)$. 这个函数就称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，一般记作 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域为 R，值域为 D. 相对于反函数来说，原来的函数也称为**直接函数**. 以下两点需要说明.

第一，严格单调函数必有反函数，比如函数 $y=x^2(x\in[0,+\infty))$ 是严格单调函数，故它有反函数 $x=\sqrt{y}$.

第二，若把 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图形画在同一坐标系中，则它们完全重合. 只有把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$ 后，它们的图形才关于 $y=x$ 对称，事实上这也是字母 x 与 y 互换的结果.

【注】 有反函数的函数不一定是单调函数. 比如 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x<0,\end{cases}$ 其图像如图 1-1 所示，其反函数即为 $f(x)$ 本身，但 $f(x)$ 不是单调函数.

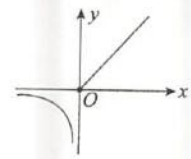


图 1-1

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则由

$$y=f[g(x)](x\in D)$$

确定的函数，称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**，它的定义域为 D，u 称为**中间变量**，要掌握复合的方法，具体见例 1.4.

4. 函数的四种特性及重要结论

(1)有界性.

设 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$. 如果存在某个正数 M，使对任一 $x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上**有界**；如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上**无界**.

【注】 (1)从几何上看，如果在给定的区间，函数 $y=f(x)$ 的图形能够被直线 $y=-M$ 和 $y=M$ "完全包起来"，则为有界；从解析上说，找到某个正数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$，则为有界.

(2)有界还是无界的讨论首先需**指明区间** I，不知区间，无法谈论有界性. 比如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(2,+\infty)$ 内有界，但在 $(0,2)$ 内无界.

(3)事实上，只要在区间 I 上或其端点处存在点 x_0，使得 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 的值为无穷大，则没有任何两条直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 可以把 I 上的 $f(x)$ "包起来"，这就叫无界. 考研中常出这样的题目，比如例 3.3.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(2)单调性.

设 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**.

【注】 后面会看到，在考研试题中常常用求导的方法来讨论函数在某个区间上的单调性，但是定义法不可以忘记. 试题中也常用到如下定义法的判别形式，请读者留意.

对任意 $x_1,x_2\in D$，$x_1\neq x_2$，有

$$f(x)\text{是单调增函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0;$$

$$f(x)\text{是单调减函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0;$$

$$f(x)\text{是单调不减函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\geqslant 0;$$

$$f(x)\text{是单调不增函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\leqslant 0.$$

(3)奇偶性.

设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则 $-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 我们熟知的是，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

【注】 设 $f(x)$ 是定义在 $[-l,l]$ 上的任意函数，则

$F_1(x)=f(x)-f(-x)$ 必为**奇函数**；$F_2(x)=f(x)+f(-x)$ 必为**偶函数**.

显然 $u(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 是偶函数，$v(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 是奇函数，而

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=u(x)+v(x).$$

(1)奇函数 $y=f(x)$ 的图形关于坐标原点对称，当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义时，必有 $f(0)=0$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(2)偶函数 $y=f(x)$ 的图形关于 y 轴对称，且当 $f'(0)$ 存在时，必有 $f'(0)=0$.

(3)函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 的图形关于 x 轴对称；函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的图形关于 y 轴对称；函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f(-x)$ 的图形关于原点对称.

(4)函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $x=T$ 对称的充分必要条件是

$$f(x)=f(2T-x) \text{ 或 } f(x+T)=f(T-x).$$

(4)周期性.

设 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 从几何图形上看，在周期函数的定义域内，相邻两个长度为 T 的区间上，函数的图形完全一样.

(5)重要结论.

事实上，关于 $f'(x)$ 和 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的性质才是这部分知识的重点，先提前总结在这里：

① 若 $f(x)$ 是可导的偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数，见例 4.4(1)；

② 若 $f(x)$ 是可导的奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数，见例 4.4(2)；

③ 若 $f(x)$ 是可导的周期为 T 的周期函数，则 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数，见例 4.5；

④ 连续的奇函数的一切原函数都是偶函数，见例 8.3；

⑤ 连续的偶函数的原函数中仅有一个原函数是奇函数，见例 8.3；

⑥ 若连续函数 $f(x)$ 以 T 为周期且 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)$ 的一切原函数也以 T 为周期，见例 8.6；

⑦ 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $f'(x)$ 有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

【注】 证明 因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，所以 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，因此对任意 $x_0\in(a,b)$，$f(x_0)$ 存在. 对任意 $x\in(a,b)$，不妨设 $x<x_0$，对 $f(x)$ 在 $[x,x_0]$ 上应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0),\xi\in(x,x_0),$$

则 $|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+|f'(\xi)||x-x_0|$，由于 $f'(x)$ 有界，故存在 $k>0$，使得对任意 $x\in(a,b)$，有 $|f'(x)|\leqslant k$，则 $|f'(\xi)|\leqslant k$，故

$$|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+k|x-x_0|<|f(x_0)|+k(b-a)\xlongequal{\text{记}}M,$$

即 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

二、函数的图像

(一)直角坐标系下的图像($f(x,y)=0$)

1. 常见图像

(1)基本初等函数与初等函数.

基本初等函数：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

①常数函数.

$y=A$，A 为常数，其图形为平行于 x 轴的水平直线(见图 1-2).

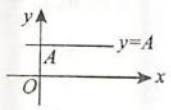


图 1-2

②幂函数.

$y=x^{\mu}$(μ是实数).

【注】 (1)$y=x^{\mu}$的定义域和值域取决于μ的值.当$x>0$时,$y=x^{\mu}$都有定义.

(2)常用的幂函数(见图1-3(a)－(c)).

$$y=x,\quad y=x^2,\quad y=\sqrt{x},\quad y=x^3,\quad y=\sqrt[3]{x},\quad y=\frac{1}{x}.$$

(3)当$x>0$时,由$y=x$与$y=\sqrt{x}$,$y=\sqrt[3]{x}$,$y=\ln x$(见图1-5(b))具有相同的单调性且与$y=\frac{1}{x}$具有相反的单调性,故

①见到$\sqrt{u}$,$\sqrt[3]{u}$时,可用u来研究最值;

②见到$|u|$时,由$|u|=\sqrt{u^2}$,可用u^2来研究最值;

③见到$u_1u_2u_3$时,可用$\ln(u_1u_2u_3)=\ln u_1+\ln u_2+\ln u_3$来研究最值;

④见到$\frac{1}{u}$时,可用u来研究最值(结论相反,即$\frac{1}{u}$与u的最大值点、最小值点相反).

以上①～④,可使得计算简单方便.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

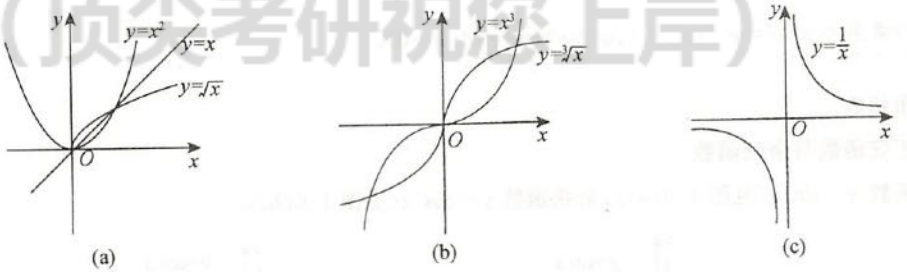


图1-3

③指数函数.

$y=a^x$($a>0$,$a\neq1$)(见图1-4(a)).

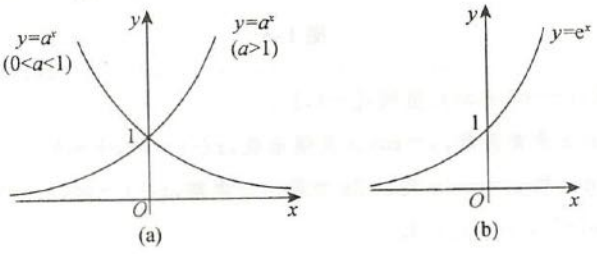


图1-4

【注】 (1)定义域:$(-\infty,+\infty)$.值域:$(0,+\infty)$.

(2)单调性:当$a>1$时,$y=a^x$单调增加;当$0<a<1$时,$y=a^x$单调减少.

(3)常用的指数函数:$y=e^x$(见图1-4(b)).

(4)极限:$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

(5)特殊函数值:$a^0=1$,$e^0=1$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

④对数函数.

$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$(见图 1-5(a))是 $y=a^x$ 的反函数.

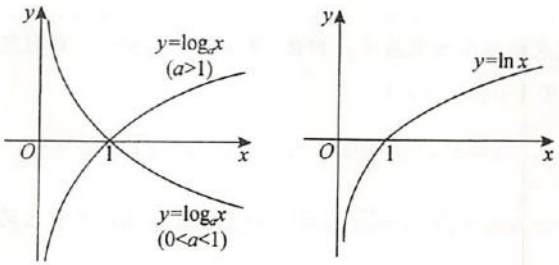


图 1-5

【注】 (1)定义域:$(0,+\infty)$. 值域:$(-\infty,+\infty)$.

(2)单调性:当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 单调增加;当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调减少.

(3)常用的对数函数:$y=\ln x$(自然对数:$\ln x=\log_e x$,$e=2.718\,28\cdots$)(见图 1-5(b)).

(4)特殊函数值:$\log_a 1=0$,$\log_a a=1$,$\ln 1=0$,$\ln e=1$.

(5)极限:$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

(6)常用公式:$x=e^{\ln x}(x>0)$,$u^v=e^{\ln u^v}=e^{v\ln u}(u>0)$.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝你上岸)

⑤三角函数.

(ⅰ)正弦函数与余弦函数.

正弦函数 $y=\sin x$(见图 1-6(a)),余弦函数 $y=\cos x$(见图 1-6(b)).

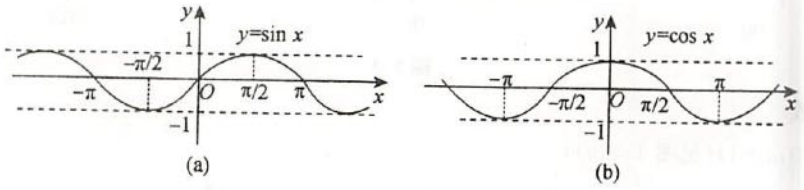


图 1-6

【注】 (1)定义域:$(-\infty,+\infty)$. 值域:$[-1,1]$.

(2)奇偶性:$y=\sin x$ 是奇函数,$y=\cos x$ 是偶函数,$x\in(-\infty,+\infty)$.

(3)周期性:$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 均以 2π 为最小正周期,$x\in(-\infty,+\infty)$.

(4)有界性:$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$.

(5)特殊函数值:$\sin 0=0$,$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin\frac{\pi}{2}=1$,$\sin\pi=0$,$\sin\frac{3\pi}{2}=-1$,$\sin 2\pi=0$,

$\cos 0=1$,$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,

$\cos\frac{\pi}{2}=0$,$\cos\pi=-1$,$\cos\frac{3\pi}{2}=0$,$\cos 2\pi=1$.

(ⅱ)正切函数与余切函数.

正切函数 $y=\tan x$(见图 1-7(a)),余切函数 $y=\cot x$(见图 1-7(b)).

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x}.$$

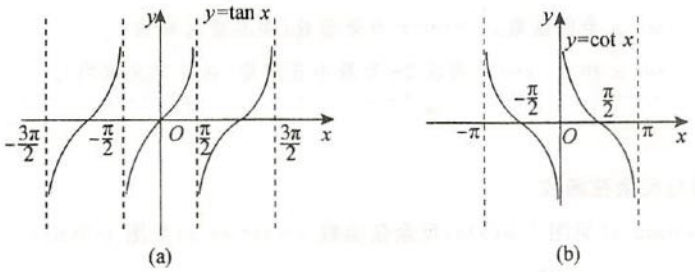


图 1-7

【注】 (1)定义域:$y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 的一切实数 x;

$y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的一切实数 x.

值域:$(-\infty,+\infty)$.

(2)奇偶性:$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 均为奇函数(在其定义域内).

(3)周期性:$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 均以 π 为最小正周期(在其定义域内).

(4)特殊函数值:$\tan 0=0$,$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\tan\frac{\pi}{4}=1$,$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$,$\tan\pi=0$,$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}\tan x=\infty$,$\tan 2\pi=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}\cot x=\infty$,$\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$,$\cot\frac{\pi}{4}=1$,$\cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\cot\frac{\pi}{2}=0$,$\lim\limits_{x\to\pi}\cot x=\infty$,$\cot\frac{3\pi}{2}=0$,$\lim\limits_{x\to 2\pi}\cot x=\infty$.

(ⅲ)正割函数与余割函数.

正割函数 $y=\sec x$(见图 1-8(a)),余割函数 $y=\csc x$(见图 1-8(b)).

$$\sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \csc x=\frac{1}{\sin x}.$$

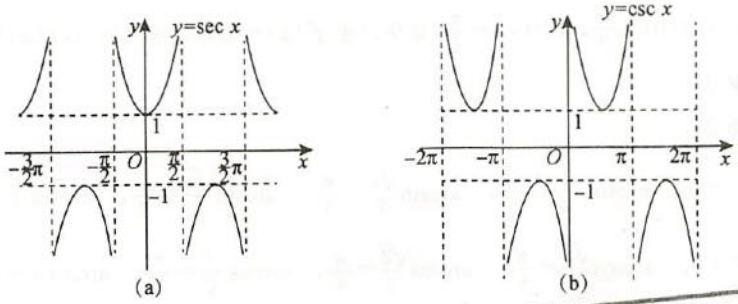


图 1-8

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 (1)定义域：$y=\sec x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 的一切实数 x；

$y=\csc x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的一切实数 x.

值域：$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(2)奇偶性：$y=\sec x$ 为偶函数，$y=\csc x$ 为奇函数(在其定义域内).

(3)周期性：$y=\sec x$ 和 $y=\csc x$ 均以 2π 为最小正周期(在其定义域内).

⑥反三角函数.

(ⅰ)反正弦函数与反余弦函数.

反正弦函数 $y=\arcsin x$(见图 1-9(a))，反余弦函数 $y=\arccos x$(见图 1-9(b)).

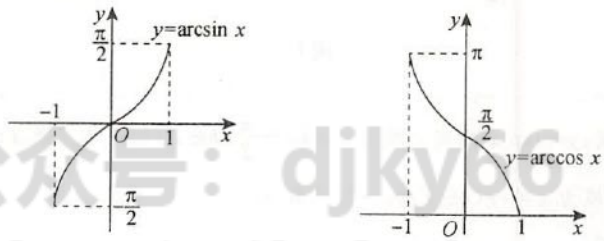


图 1-9

$y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数，$y=\arccos x$ 是 $y=\cos x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 的反函数.

【注】 (1)定义域：$[-1,1]$.

值域：$y=\arcsin x$ 的值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$y=\arccos x$ 的值域为 $[0,\pi]$.

(2)单调性：$y=\arcsin x$ 单调增加，$y=\arccos x$ 单调减少.

(3)奇偶性：$y=\arcsin x$ 为奇函数(在其定义域内).

(4)有界性：两个函数在其定义域内有界，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$.

(5)性质：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

证明 令 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，则 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$，于是 $f(x)=C$(常数)，又 $f(0)=\frac{\pi}{2}$，故 $f(x)=\frac{\pi}{2}$，证毕.(由 $f'(x)=0$，即变化率为 0，$f(x)$ 不变化，即为常数，这就易于理解了)

(6)特殊函数值：

$$\arcsin 0=0,\quad \arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6},\quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},\quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3},\quad \arcsin 1=\frac{\pi}{2},$$

$$\arccos 1=0,\quad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6},\quad \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},\quad \arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3},\quad \arccos 0=\frac{\pi}{2}.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(ⅱ)反正切函数与反余切函数.

反正切函数 $y=\arctan x$(见图 1-10(a)),反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$(见图 1-10(b)).

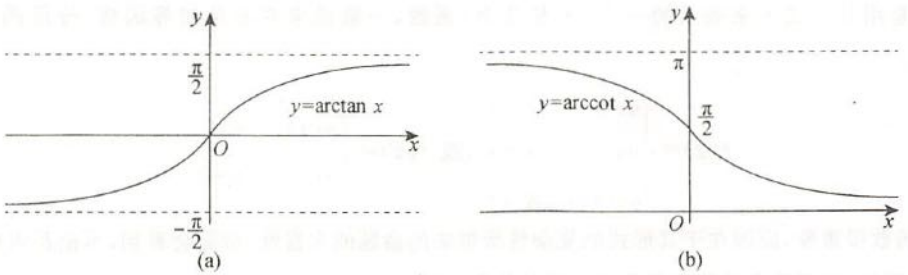


图 1-10

$y=\arctan x$ 是 $y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数,$y=\operatorname{arccot} x$ 是 $y=\cot x(0<x<\pi)$ 的反函数.

【注】 (1)定义域:$(-\infty,+\infty)$.

值域:$y=\arctan x$ 的值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,$y=\operatorname{arccot} x$ 的值域为 $(0,\pi)$.

(2)单调性:$y=\arctan x$ 单调增加,$y=\operatorname{arccot} x$ 单调减少.

(3)奇偶性:$y=\arctan x$ 为奇函数(在其定义域内).

(4)有界性:两个函数在其定义域内有界,$-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$,$0<\operatorname{arccot} x<\pi$.

(5)性质:$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}(-\infty<x<+\infty)$.

证明 令 $f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x$,$-\infty<x<+\infty$,则 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$,于是 $f(x)=C$(常数),又 $f(0)=\frac{\pi}{2}$,故 $f(x)=\frac{\pi}{2}$,证毕.(由 $f'(x)=0$,即变化率为 0,$f(x)$ 不变化,即为常数,这就易于理解了)

(6)特殊函数值:$\arctan 0=0$,$\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$,$\arctan 1=\frac{\pi}{4}$,$\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$,

$\operatorname{arccot} 0=\frac{\pi}{2}$,$\operatorname{arccot}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$,$\operatorname{arccot} 1=\frac{\pi}{4}$,$\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$.

(7)极限:$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0$.

⑦初等函数.

由基本初等函数经有限次的四则运算,以及有限次的复合步骤所构成的并且可以由一个式子所表示的函数称为**初等函数**.

【注】 (1)初等函数的定义域可以是一个区间,也可以是几个区间的并集,甚至可以是一些孤立的点.例如,$y=\sqrt{\cos\pi x-1}$ 的定义域是 $x=0,\pm2,\pm4,\cdots$.

(2)幂指函数 $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$ 也是初等函数.如 $x>0$ 时,$f(x)=x^x=e^{x\ln x}$ 是初等函数,其图形如图 1-11 所示.

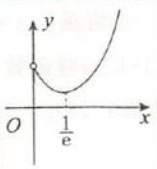


图 1-11

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(2)分段函数.

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数称为**分段函数**. 需要强调一句，分段函数是用几个式子来表示的一个(不是几个)函数，一般说来它不是初等函数. 分段函数的典型形式如下：

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & x>x_0,\\ a, & x=x_0,\\ \varphi_2(x), & x<x_0\end{cases}\text{或 } f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\neq x_0,\\ a, & x=x_0.\end{cases}$$

分段函数很重要，原因在于其形式的复杂性所带来的命题的丰富性. 后面会看到，不论是求极限、求导数，还是求积分，出现最多的研究对象之一便是分段函数.

下面列出三个重要的分段函数.

①$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 称为**绝对值函数**，如图 1-12 所示.

②$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为**符号函数**，如图 1-13 所示. 对于任何实数 x，有 $x=|x|\operatorname{sgn}x$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

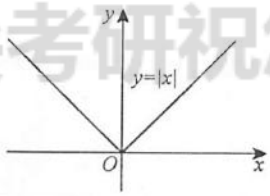


图 1-12

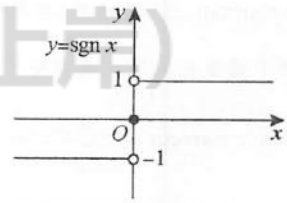


图 1-13

③$y=[x]$称为**取整函数**. 先给出定义：设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作$[x]$. 如

$$[0.99]=0,\quad [\pi]=3,\quad [-1]=-1,\quad [-1.99]=-2.$$

因此，取整函数$y=[x]$的定义域为 **R**，值域为 **Z**. 它的图形如图 1-14 所示，在 x 为整数值处图形发生跳跃.

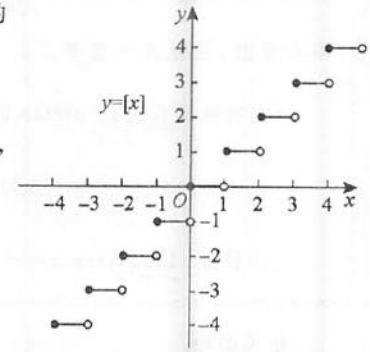


图 1-14

从定义出发，以下两点需要读者注意.

(ⅰ)$x-1<[x]\leqslant x$.

(ⅱ)$\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0$；$\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-1$.

2. 图像变换

图像变换方式一般有如下三种.

(1)平移变换.

①将函数 $y=f(x)$ 的图像沿 x 轴向左平移 $x_0(x_0>0)$ 个单位长度，得到函数 $y=f(x+x_0)$ 的图像(见图 1-15)；将函数 $y=f(x)$ 的图像沿 x 轴向右平移 $x_0(x_0>0)$ 个单位长度，得到函数 $y=f(x-x_0)$ 的图像(见图 1-16).

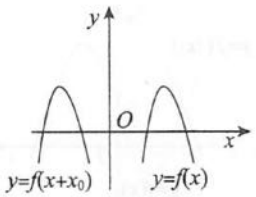


图 1-15

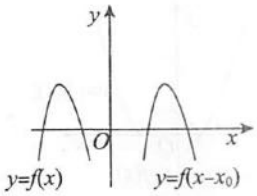


图 1-16

②将函数 $y=f(x)$ 的图像沿 y 轴向上平移 $y_0(y_0>0)$ 个单位长度，得到函数 $y=f(x)+y_0$ 的图像（见图 1-17）；将 $y=f(x)$ 的图像沿 y 轴向下平移 $y_0(y_0>0)$ 个单位长度，得到函数 $y=f(x)-y_0$ 的图像（见图 1-18）.

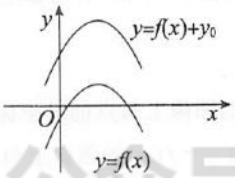


图 1-17

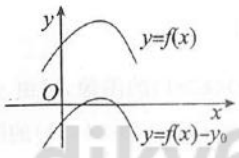


图 1-18

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

(2)对称变换.

①将函数 $y=f(x)$ 的图像关于 x 轴对称，得到函数 $y=-f(x)$ 的图像（见图 1-19）.

②将函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，得到函数 $y=f(-x)$ 的图像（见图 1-20）.

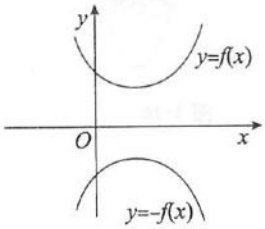


图 1-19

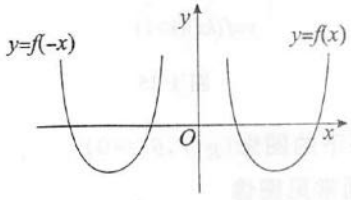


图 1-20

③将函数 $y=f(x)$ 的图像关于原点对称，得到函数 $y=-f(-x)$ 的图像（见图 1-21）.

④将函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，得到函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像（见图 1-22）.

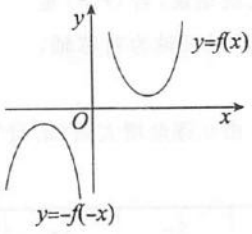


图 1-21

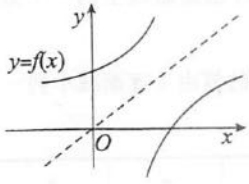


图 1-22

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

⑤保留函数 $y=f(x)$ 在 x 轴及 x 轴上方的部分，把 x 轴下方的部分关于 x 轴对称到 x 轴上方并去掉原来下方的部分，得到函数 $y=|f(x)|$ 的图像（见图 1-23）.

⑥保留函数 $y=f(x)$ 在 y 轴及 y 轴右侧的部分，去掉 y 轴左侧的部分，再将 y 轴右侧图像对称到 y 轴左侧，得到函数 $y=f(|x|)$ 的图像（见图 1-24）.

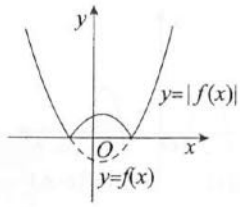


图 1-23

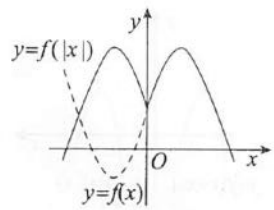


图 1-24

(3)伸缩变换.

①水平伸缩:$y=f(kx)(k>1)$的图像,可由 $y=f(x)$的图像上每点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{k}$倍且纵坐标不变得到(见图 1-25);$y=f(kx)(0<k<1)$的图像,可由 $y=f(x)$的图像上每点的横坐标伸长到原来的$\frac{1}{k}$倍且纵坐标不变得到.

②垂直伸缩:$y=kf(x)(k>1)$的图像,可由 $y=f(x)$的图像上每点的纵坐标伸长到原来的 k 倍且横坐标不变得到(见图 1-26);$y=kf(x)(0<k<1)$的图像,可由 $y=f(x)$的图像上每点的纵坐标缩短到原来的 k 倍且横坐标不变得到.

微信公众号: djky66
(顶尖考研祝您上岸)

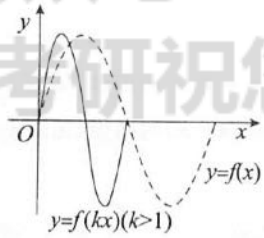


图 1-25

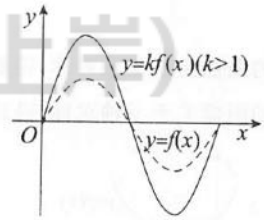


图 1-26

(二)极坐标系下的图像($g(r,\theta)=0$)

1. 用描点法画常见图像

(1)心形线.

下面画出心形线 $r=a(1-\cos\theta)(a>0)$的图形.

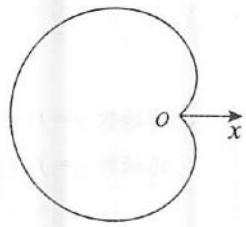


图 1-27

其表达式的右端是以 2π 为周期的周期函数,作图时只要考虑 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 就可以了.并且,对于方程的右端,θ 换作 $(2\pi-\theta)$时,其值不变,也就是说,若 (r,θ)是曲线上的一个点,则 $(r,2\pi-\theta)$也是曲线上的一个点,因此图形以极轴为对称轴,从而只需先考虑$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

当 θ 由 0 增大到 π,$\cos\theta$ 的值由 1 逐渐减小到 -1,从而,r 由 0 逐渐增大到 $2a$.计算出曲线上的若干个点,列表如下:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	a	$\frac{3}{2}a$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{2+\sqrt{3}}{2}a$	$2a$

描出这些点,连接成一条光滑曲线,然后利用它对极轴的对称性画出全部图形.这条封闭曲线叫作心形线(见图 1-27).

(2)玫瑰线.

下面画出三叶玫瑰线 $r=a\sin 3\theta(a>0)$ 的图形.

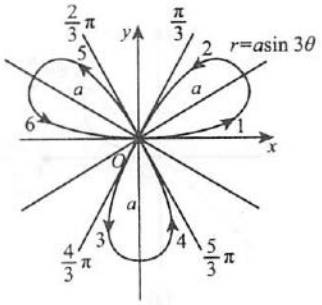


图 1-28

其表达式的右端是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的周期函数，作图时应先考虑 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$，然后仿照在这一范围内曲线上的点的变化规律，画出 $\frac{2\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{4\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 范围内的曲线. 对于在 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$ 范围内的作图方法，仍是采用描点法. 计算出曲线上若干个点，列表如下：

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$
r	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	a	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$-a$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$	0

描出这些点，连接成一条光滑曲线. 这段曲线由弧段 1,2,3,4 构成(见图 1-28). 在 $\frac{2\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{4\pi}{3}$ 的范围内，可以按照同样的规律画出由弧段 5,6,1,2 所构成的曲线，在 $\frac{4\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 的范围内，同样可画出由弧段 3,4,5,6 所构成的曲线. 这样就得到了曲线的全部. 这条曲线叫作三叶玫瑰线.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(3)阿基米德螺线.

下面画出 $r=a\theta(a>0,\theta\geqslant 0)$ 的图形.

当 $\theta(\theta\geqslant 0)$ 由 0 增大时，r 亦逐渐增大，这条曲线称为阿基米德螺线(见图 1-29).

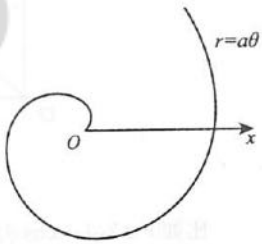


图 1-29

(4)伯努利双纽线.

在极坐标系中，伯努利双纽线的极坐标方程常写成 $r^2=a^2\cos 2\theta(a>0)$(见图1-30)，或 $r^2=a^2\sin 2\theta(a>0)$(见图 1-31).

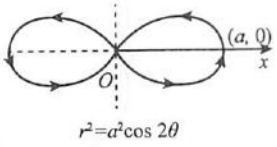


图 1-30

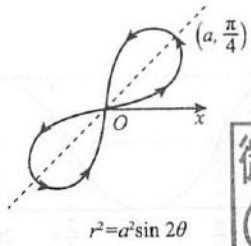


图 1-31

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

下面画出 $r^2=a^2\sin 2\theta(a>0)$ 的图像，由 $r=a\sqrt{\sin 2\theta}$ 知，θ 的取值范围是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.

当 θ 从 0 增加到 $\frac{\pi}{4}$ 时，r 从 0 增加到 a，故在图 1-32(a)中画出相应的部分；当 θ 从 $\frac{\pi}{4}$ 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时，r 从 a 减少到 0，在图 1-32(b)中画出相应的部分；当 θ 从 π 增加到 $\frac{5\pi}{4}$ 时，r 从 0 增加到 a，在图 1-32(c)中画出相应的部分；当 θ 从 $\frac{5\pi}{4}$ 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，r 从 a 减少到 0，在图 1-32(d)中画出相应的部分. 最后形成一个“∞”形图像，这条曲线称为伯努利双纽线.

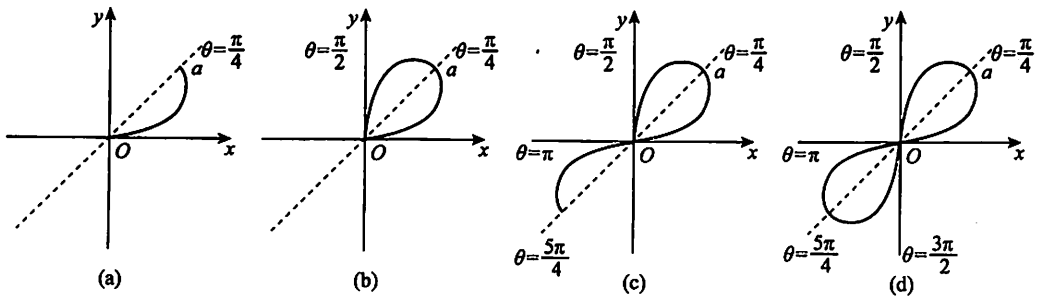


图 1-32

2. 用直角坐标系观点画极坐标系下图像

直角坐标方程 $y=x$ 表示平面上的一条直线，而极坐标方程 $r=\theta$ 表示螺线. 以方程的角度看问题，两个方程的形式相同，只是表示变量的字母不同而已，但是由于坐标系不同，它们表示的曲线完全不同(见图 1-33，图 1-34). 这里启发我们，若较易画出直角坐标系观点下 $r=f(\theta)$ 的图像，可转化为极坐标系下的曲线图像.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

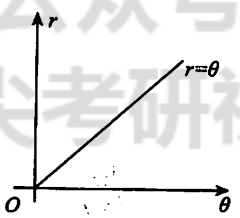


图 1-33

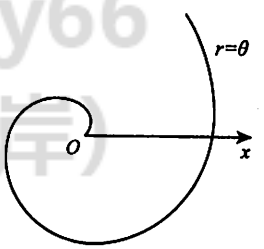


图 1-34

比如 $r=2(1+\cos\theta)$，较易画出其在直角坐标系观点下 $r=f(\theta)$ 的图像，如图 1-35 所示，可转化为极坐标系下的图像，如图 1-36 所示，若读者掌握此种方法，不失为一个妙招.

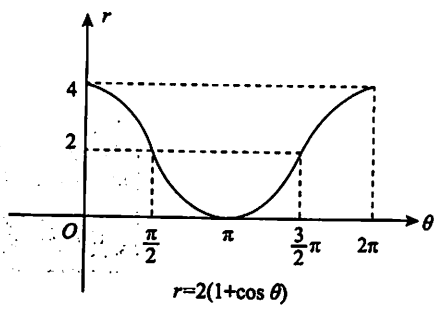


图 1-35

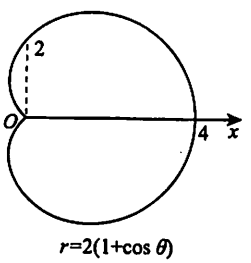


图 1-36

(三)参数法——参数方程 $\left\{\begin{array}{l}x=x(t)\\y=y(t)\end{array}\right.$

前面的(一)与(二)介绍了如何在直角坐标系或极坐标系内用动点坐标 (x,y) 或 (r,θ) 来表示平面内一些曲线的方程. 但在实际问题中，有些曲线用以上的方法来表示比较困难，也就是说很难找到曲线所满足的 $f(x,y)=0$ 或 $g(r,\theta)=0$ 的式子. 这一节我们将引入一个新变量(叫作参数)来表示曲线方程，即参数方程.

(1)摆线.

设自行车外胎上粘了一点红色的油漆,当你骑车向前直行时,这个油漆红点就在平面上形成一条轨迹,这条轨迹就是摆线.用数学语言描述如下:

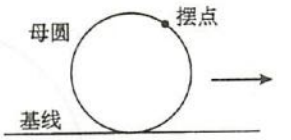


图 1-37

当一个圆沿一条定直线作纯滚动时,动圆圆周上一个定点的轨迹叫作摆线(见图 1-37).

现取已给的这条定直线为 x 轴,其正方向就是圆滚动的方向,当圆与直线在圆上的定点 A 处相切时,就取该点为原点 O.取半径 $|CO|$ 旋转的角度 t 为参数.对于所求运动轨迹上的任意一定点 $A(x,y)$,由图 1-38容易看出

$$x=|OP|=|OQ|-|PQ|,$$
$$|OQ|=\text{圆弧}\overset{\frown}{QA}\text{的长度}=rt,$$
$$|PQ|=|AC'|\sin t=r\sin t,$$

故得

$$x=rt-r\sin t.$$

由图 1-38 也容易看出

$$y=|PA|=|QC'|-|DC'|=r-r\cos t.$$

因此,所求定点 A 的运动轨迹的参数方程为

$$\begin{cases}x=r(t-\sin t),\\ y=r(1-\cos t).\end{cases}\qquad(*)$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

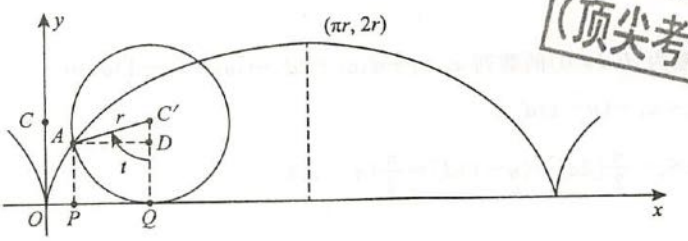


图 1-38

【注】 上面的推导过程只适用于 $0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$ 的情况,当 t 取其他任意值时,推导的方法是相仿的,所得结果与(*)式完全一样.因此(*)式中没有写出 t 的变化范围,这就意味着 t 可取任意实数值.

摆线的图形具有周期性,当 t 增加 2π 时,也就是说,圆滚动一周时,摆线上的点的横坐标增加了 $2\pi r$,纵坐标不变.圆继续滚动,圆上的定点 A 就描绘出一拱接一拱的图形.容易看出,从原点开始的第一拱以直线 $x=\pi r$ 为对称轴,拱顶的坐标是 $(\pi r,2r)$.

要从(*)式消去参数 t 并不困难,但所得 x,y 间的函数表达式较复杂.因此我们常通过(*)式来直接研究摆线.

(2)星形线.

如图 1-39(a)所示,一个小圆在一个固定的大圆内部作纯滚动,如果大圆半径是小圆半径的 4 倍,那么小圆圆周上任一点 M 的轨迹称为星形线,如图 1-39(b)所示.

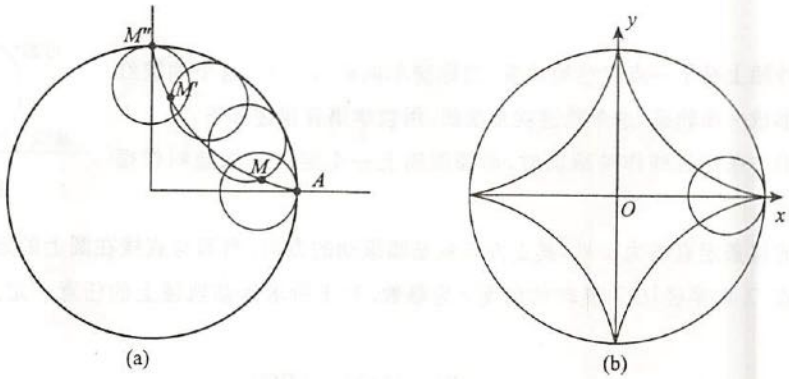


图 1-39

此轨迹方程的推导过程要用到繁杂的几何知识与三角公式，不作要求，读者记住它的参数方程表达式即可，其表达式为

$$\begin{cases} x=r\cos^3 t, \\ y=r\sin^3 t, \end{cases}$$

若消去 t，可得 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=r^{\frac{2}{3}}$，此为直角坐标方程.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

三、常用基础知识

1. 数列

(1)等差数列.

首项为 a_1，公差为 $d(d\neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1+d, a_1+2d, \cdots, a_1+(n-1)d, \cdots$.

①通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$.

②前 n 项的和 $S_n=\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$.

(2)等比数列.

首项为 a_1，公比为 $r(r\neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1r, a_1r^2, \cdots, a_1r^{n-1}, \cdots$.

①通项公式 $a_n=a_1r^{n-1}$.

②前 n 项的和 $S_n=\begin{cases} na_1, & r=1, \\ \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & r\neq 1. \end{cases}$

③常用 $1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=\dfrac{1-r^n}{1-r}(r\neq 1)$.

(3)一些常见数列前 n 项的和.

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

2. 三角函数

(1)三角函数基本关系.

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha},\quad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha,\quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha.$$

(2)诱导公式.

函数 \ 角θ	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$
$\sin\theta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\theta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\tan\theta$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$\cot\theta$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 如上表所示，奇变偶不变，符号看象限(因任一角度均可表示为$\frac{k\pi}{2}+\alpha,k\in\mathbf{Z},|\alpha|\leqslant\frac{\pi}{4}$，故$k$为奇数时得角$\alpha$的异名函数值，$k$为偶数时得角$\alpha$的同名函数值，然后在前面加上一个把角$\alpha$看作锐角时原来函数值的符号).

三角函数在四个象限中的符号如下表所示.

函数 \ 角θ所在象限	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(3)特殊的三角函数值如下表所示.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	−1	$-\sqrt{3}$	∞	0	∞

【注】 (1)$\sec\alpha$ 和 $\csc\alpha$ 的函数值可由 $\frac{1}{\cos\alpha}$ 和 $\frac{1}{\sin\alpha}$ 得出.

(2)表格中的“∞”均是指极限结果,如 $\tan 90°$ 为“∞”,是指 $\lim\limits_{\alpha\to 90°}\tan\alpha=\infty$.

(4)重要公式.

①倍角公式.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

$$\sin 3\alpha=-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha,\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\quad \cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}.$$

②半角公式.

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha),\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha),(\text{降幂公式})$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

③和差公式.

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},\quad \cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.$$

④积化和差与和差化积公式.

(ⅰ)积化和差公式.

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\quad \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],\quad \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

(ⅱ)和差化积公式.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

⑤万能公式.

若 $u=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$,则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$.

3. 指数运算法则

$$a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta},\quad \frac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta},\quad (a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta},\quad (ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha},$$

其中 a,b 是正实数,α,β 是任意实数.

微信公众号：dky66
(顶尖考研祝您上岸)

4. 对数运算法则

①$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$(积的对数=对数的和).

②$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$(商的对数=对数的差).

③$\log_a M^n=n\log_a M$(幂的对数=对数的倍数).

④$\log_a\sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_a M$.

【注】 常考:

①$\ln\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\ln x$;

②$\ln\dfrac{1}{x}=-\ln x$;

③$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\ln\dfrac{x+1}{x}=\ln(x+1)-\ln x$.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

5. 一元二次方程基础

①一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$.

②根的公式 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

③根与系数的关系(韦达定理)$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$,$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

④判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

$\Delta>0$,方程有两个不等的实根;$\Delta=0$,方程有两个相等的实根;$\Delta<0$,方程有两个共轭的复根.

⑤抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点 $\left(-\dfrac{b}{2a},c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$.

6. 因式分解公式

①$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

②$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

③$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

④$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

⑤$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

⑥$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

⑦$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

⑧$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$($n$ 是正整数).

⑨n 是正奇数时,$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$.

⑩二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+nab^{n-1}+b^n.$$

7. 阶乘与双阶乘

①$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$,规定 $0!=1$.

②$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n\cdot n!$.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

③$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)$.

8. 常用不等式

(1)设a,b为实数,则①$|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$;②$||a|-|b||\leqslant|a-b|$.

【注】 可以将上述不等式①推广为

离散情况:设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为实数,则

$$|a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

连续情况:设$f(x)$在$[a,b](a<b)$上可积,则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(2)①$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}(a,b>0)$;

【注】 还有$|ab|\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$,在考研中考过:若$u_n>0$,则$\dfrac{u_n}{n}=u_n\cdot\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{u_n^2+\dfrac{1}{n^2}}{2}$.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

②$\sqrt[3]{abc}\leqslant\dfrac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}(a,b,c>0)$.

(3)设$a>b>0$,则$\begin{cases}\text{当 }n>0\text{ 时},a^n>b^n,\\ \text{当 }n<0\text{ 时},a^n<b^n.\end{cases}$

(4)若$0<a<x<b,0<c<y<d$,则$\dfrac{c}{b}<\dfrac{y}{x}<\dfrac{d}{a}$.

【注】 考研中考过:当$n\pi<x<(n+1)\pi,2n<S(x)<2(n+1)$时,$\dfrac{2n}{(n+1)\pi}<\dfrac{S(x)}{x}<\dfrac{2(n+1)}{n\pi}$.

(5)$\sin x<x<\tan x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(6)$\sin x<x(x>0)$.

【注】 考研中考过:当$x_n>0$时,$x_{n+1}=\sin x_n<x_n$,故$\{x_n\}$单调减少.

(7)$\arctan x\leqslant x\leqslant\arcsin x(0\leqslant x\leqslant1)$.

(8)$\mathrm{e}^x\geqslant x+1(\forall x)$.

【注】 可考:当$x_{n+1}=\mathrm{e}^{x_n}-1$时,由$\mathrm{e}^{x_n}-1\geqslant x_n$,得$x_{n+1}\geqslant x_n$,即$\{x_n\}$单调不减.

(9)$x-1\geqslant\ln x(x>0)$.

【注】 可考:当$x_n>0$时,若$x_{n+1}=\ln x_n+1$,由$\ln x_n+1\leqslant x_n$,得$x_{n+1}\leqslant x_n$,即$\{x_n\}$单调不增.

(10)$\dfrac{1}{1+x}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}(x>0)$.

【注】 **证明** 令 $f(x)=\ln x$，并在区间$[x,x+1]$上对其应用拉格朗日中值定理，有

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi},$$

其中 $0<x<\xi<x+1$. 因此，对任意的 $x>0$，有 $\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x}$.

基础例题精解

例 1.1 当 $x>0$ 时，$f(e^x)=1+x$，$f[g(x)]=1+x+\ln x$，则 $g(x)=$（　　）.

(A) $\frac{1}{2}xe^x$　　(B) xe^x　　(C) $2xe^x$　　(D) $\frac{1}{2}x^2e^x$

解 应选(B).

将 $g(x)$ 用 $e^{\ln g(x)}$ 代换，再由已知的 $f(e^x)$ 与 $f[g(x)]$ 的表达式解出 $g(x)$. 由于 $f(e^x)=1+x$，因此

$$f[g(x)]=f[e^{\ln g(x)}]=1+\ln g(x).$$

又由于 $f[g(x)]=1+x+\ln x$，从而有

$$1+\ln g(x)=1+x+\ln x,$$

$$\ln g(x)-\ln x=\ln\frac{g(x)}{x}=x,$$

可得 $g(x)=xe^x$. 故选(B).

例 1.2 设 $f(x)=x^2$，$f[\varphi(x)]=-x^2+2x+3$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域与值域.

解 由题设条件知，$f[\varphi(x)]=\varphi^2(x)=-x^2+2x+3$，于是 $\varphi(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$.

由 $-x^2+2x+3\geqslant 0$，即 $(x-3)(x+1)\leqslant 0$，知 $\varphi(x)$ 的定义域为$[-1,3]$.

又 $\sqrt{-x^2+2x+3}=\sqrt{-(x-1)^2+4}$，当 $x=1$ 时，$\varphi(x)=2$ 为最大值，显然 $\varphi(-1)=\varphi(3)=0$ 为最小值，故 $\varphi(x)$ 的值域为$[0,2]$.

例 1.3 求函数 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的表达式及其定义域.

解 直接由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 解出 $x=f^{-1}(y)$ 会很麻烦，现采用下述方法.

$$-y=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}=\ln(\sqrt{x^2+1}-x),$$

所以　　$e^{-y}=\sqrt{x^2+1}-x,$　　①

再由 $y=f(x)$ 的表达式有　　$e^{y}=\sqrt{x^2+1}+x,$　　②

②－①，得　　$x=\frac{1}{2}(e^y-e^{-y}),$

交换上式中 x,y 的位置后就是 $y=f(x)$ 的反函数，即

$$y=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\ -\infty<x<+\infty.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 (1)函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 叫作反双曲正弦函数，其图像如图 1-40 所示. 函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 叫作双曲正弦函数，其图像如图 1-41 所示. 考生应记住这两个函数的图像.

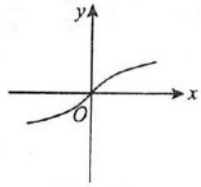


图 1-40

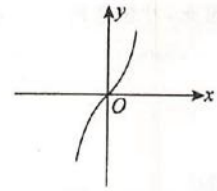


图 1-41

它们都是奇函数，于是 $\int_{-1}^{1}[\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x^2]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.

(2) 考生还应知道，$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，于是 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$.

(3) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 叫作双曲余弦函数，其图像如图 1-42 所示，它是偶函数，是一种特殊的悬链线. 达·芬奇在画《抱银貂的女人》时，曾仔细思索过女人的脖子上戴的项链的形状是什么函数，可惜他一生都未能明白，在他去世后近 200 年，约翰·伯努利解决了这个问题. 那不是抛物线 $y=x^2$，而是悬链线 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$，取 $a=1$，就是双曲余弦函数.

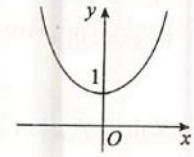


图 1-42

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 1.4 设 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1.\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解 第 1 步，广义化：$f[f(x)]=\begin{cases}\ln\sqrt{f(x)}, & f(x)\geqslant 1,\\ 2f(x)-1, & f(x)<1.\end{cases}$

第 2 步，画图(见图 1-43)并分析：①当 $f(x)\geqslant 1$ 时，$x\geqslant e^2$，此时 $f(x)=\ln\sqrt{x}$；

②当 $f(x)<1$ 时，或者 $1\leqslant x<e^2$，此时 $f(x)=\ln\sqrt{x}$，或者 $x<1$，此时 $f(x)=2x-1$.

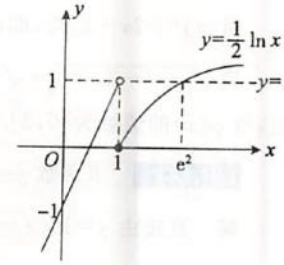


图 1-43

第 3 步，写答案：

$$f[f(x)]=\begin{cases}\ln\sqrt{\ln\sqrt{x}}, & x\geqslant e^2,\\ 2\ln\sqrt{x}-1, & 1\leqslant x<e^2,\\ 2(2x-1)-1, & x<1\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(\ln\sqrt{x}), & x\geqslant e^2,\\ \ln x-1, & 1\leqslant x<e^2,\\ 4x-3, & x<1.\end{cases}$$

例 1.5 证明函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证明 当 $x\neq 0$ 时，

$$|f(x)|=\frac{|x|}{1+x^2}=\frac{1}{\frac{1}{|x|}+|x|},$$

由不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a,b>0)$，有$\frac{1}{|x|}+|x|\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{|x|}|x|}=2$，即$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}$.

当$x=0$时，$f(0)=0$. 综上，函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有界.

基础习题精练

习题

1.1　设$f(x)=\frac{x}{x-1}$，验证$f\{f[f(f(x))]\}=x$，并求$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$，这里$x\neq 0,x\neq 1$.

1.2　求函数$y=2x+|2-x|,x\in(-\infty,+\infty)$的反函数.

1.3　画出$r=ae^{k\theta}(a>0,k>0)$的图形.（这里e是以后常要用到的一个常数，以e为底的对数称为自然对数，e≈2.718 28.）

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

解答

1.1　**解**　令$f_1(x)=f(x),f_2(x)=f[f_1(x)],\cdots,f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$. 现只需验证$f_4(x)=x$即可.

由于$f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$，故$\frac{1}{f(x)}=1-\frac{1}{x}$. 而

$$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{1}{1-\frac{1}{f(x)}}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)}=x.$$

又$f_3(x)=f[f_2(x)]=f(x)$，则$f_4(x)=f[f_3(x)]=f[f(x)]=x$.

下面求$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$. 由$\frac{1}{f(x)}=1-\frac{1}{x}$，则

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f\left(1-\frac{1}{x}\right)=1-x,x\neq 0,x\neq 1.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

1.2　**解**　去掉绝对值，将方程改写为

$$y=\begin{cases}x+2, & x\leqslant 2,\\ 3x-2, & x>2.\end{cases}$$

当$x\leqslant 2$时，$y=x+2\Rightarrow x=y-2,y\leqslant 4$；当$x>2$时，$y=3x-2\Rightarrow x=\frac{y+2}{3},y>4$.

综上所述，得
$$x=\begin{cases}y-2, & y\leqslant 4,\\ \frac{y+2}{3}, & y>4\end{cases}\xrightarrow{x,y\text{互换}}y=\begin{cases}x-2, & x\leqslant 4,\\ \frac{x+2}{3}, & x>4.\end{cases}$$

于是，若记$f(x)=2x+|2-x|,x\in(-\infty,+\infty)$，则有$f^{-1}(x)=\begin{cases}x-2, & x\leqslant 4,\\ \frac{x+2}{3}, & x>4.\end{cases}$

1.3 解 当θ由0逐渐增大时，r由a逐渐增大，当θ无限制地增大，r也随之无限制地增大. 当θ由0逐渐减小，r由a逐渐减小，但r却永远保持正值，当θ由0无限制地减小，r也随之无限制地接近于0. 如图1-44所示，是取$a=2,k=0.2$时画出来的. 该曲线叫作对数螺线(见图1-44).

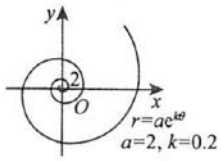
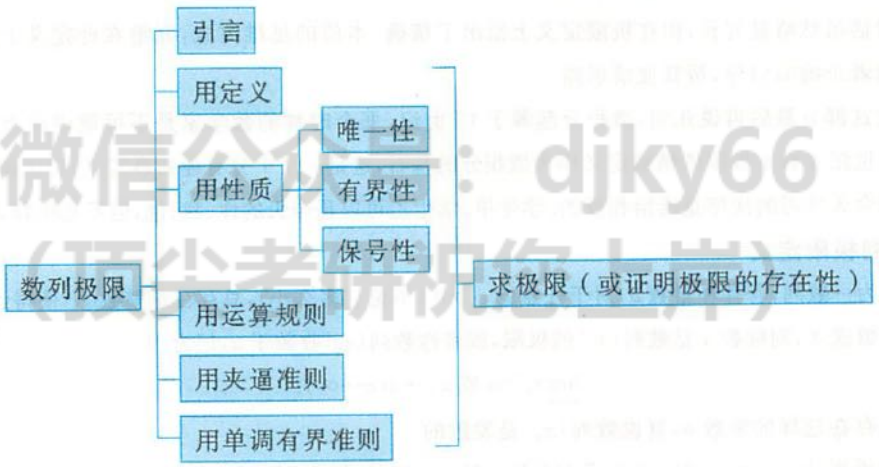


图 1-44

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第2讲 数列极限

基础知识结构



微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

基础内容精讲

1. 引言

极限，从通俗、直观的意义上讲，是一个“**无限趋近的过程**”.

给一个简单的数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$，若从第1项开始一直写下去，那就是$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$，不难发现，随着$n$无限增大，$n$与$n+1$的比值无限趋近于1，这就写成了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

但若从专业角度讲，可没这么简单，不妨通过下面这段两个学生之间的对话来琢磨.

学生甲：给出一个数列$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$，其通项$u_n=\frac{n}{n+1}$，当$n$无限增大时，这个数列趋向于一个值1，这叫作极限值，可写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

学生乙：嗯，当n充分大时，我可以理解$\frac{n}{n+1}$与1会非常非常接近，此数列应该会趋向于常数1，但数学是讲究精确的学科，你能给我指出一个数$N>0$，使得这个数列中下标大于N的项与你说的极限值1之间的距离始终保持在$(0,\varepsilon)$之内吗？

学生甲：好，我来尝试一下，这个数列的第 n 项与数 1 之间的距离是 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$，让此距离最终保持在 $(0,\varepsilon)$ 之内，也就是 $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$，反解出 n 来，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$，这样一来，随便你给我什么正数 ε，只要我从数列的第 N 项开始，其中 $N>\frac{1}{\varepsilon}-1$，在此之后的所有项都会有 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ 成立，即保持与 1 之间的距离小于 ε.

学生乙：我明白了，数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 一定会出现这样的局面 —— 不论我指定多么小的正数 ε，你总可以找到某项，从此项开始往后，所有项都与 1“亲密无间”地保持着距离始终小于那个要多小有多小的尺度 ε. 于是，我们可以理直气壮地认为数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 在某项之后的所有项会**更接近**数“1”，而不是除了 1 之外的任何其他数. 因此必须承认，此数列趋向于极限值 1.

这段对话虽然略显冗长，但在极限定义上给出了精确、本质的思维方式，能给在此定义上偶尔陷入思维混乱的读者正确的引导，帮其厘清思路.

我想在这部分最后再说几句，微积分起源于 17 世纪，那个时候的数学家是不可能讲出上面这段对话的，直到 19 世纪才有了极限的精确定义作为微积分的基石，这是一个十分有趣的事实：历史上微积分知识的出现与我们今天学习的次序是恰恰相反的. 学生甲、学生乙可以是今天的你、我、他，但不是牛顿、莱布尼茨.

微信公众号：zhangyu（张宇考研和你上岸）

2. 数列极限定义

设 $\{x_n\}$ 为一数列，若存在常数 a，对于任意的 $\varepsilon>0$（不论它多么小），总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，则称数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

如果不存在这样的常数 a，就说数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

常用的语言：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

【注 1】 这是用“$\varepsilon-N$ 语言”来描述数列极限. 符号“$\forall$”是英文 Arbitrary（任意的）的首字母上下方向倒着写出来的；符号“$\exists$”是英文 Exist（存在）的首字母左右方向倒着写出来的.

【注 2】 数列收敛与其子列收敛的关系.

定义 从数列 $\{a_n\}:a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 中选取无穷多项，并按原来的先后顺序组成新的数列，称新数列为原数列的**子列**，记为

$$\{a_{n_k}\}:a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots,$$

其中下标 $n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots$ 为正整数.

例如，若 $n_k(k=1,2,\cdots)$ 分别取为 $2k$ 和 $2k-1$，则得到数列 $\{a_n\}$ 的两个子列

$$\{a_{2k}\}:a_2,a_4,\cdots,a_{2k},\cdots;\{a_{2k-1}\}:a_1,a_3,\cdots,a_{2k-1},\cdots,$$

这两个子列的项在原数列中交错出现.

定理 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则其任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛，且 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

此定理为我们提供了一个判断数列发散的方法：对于一个数列 $\{a_n\}$，如果能找到一个发散的子列，则原数列一定发散；如果能找到两个收敛的子列 $\{a_{n_k}\}$ 和 $\{a_{n'_k}\}$，但它们收敛到不同极限，则原数列也一定发散.

例如，对于数列$\{(-1)^n\}$：$-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$，我们找到其收敛的子列

$$\{(-1)^{2k}\}:1,1,\cdots,1,\cdots;\{(-1)^{2k-1}\}:-1,-1,\cdots,-1,\cdots,$$

它们的极限分别为1和-1，所以原数列发散.

由定理可得一个重要推论：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a$，且$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=a$.

3. 收敛数列的性质

定理1(唯一性) 给出数列$\{x_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$(存在)，则$a$是唯一的.

定理2(有界性) 若数列$\{x_n\}$极限存在，则数列$\{x_n\}$有界.

定理3(保号性) 设数列$\{a_n\}$存在极限a，且$a>0$(或$a<0$)，则存在正整数N，当$n>N$时，有$a_n>0$(或$a_n<0$).

推论 如果数列$\{a_n\}$从某项起有$a_n\geqslant 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$a\geqslant 0$.

4. 极限运算规则

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

①$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$；

②$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=ab$；

③若$b\neq 0$，$y_n\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$.

运算规则可以推广至有限个数列情形.

5. 夹逼准则

如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件

①$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$；②$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

则数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

6. 单调有界准则

单调有界数列必有极限，即若数列$\{x_n\}$单调增加(减少)且有上界(下界)，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

基础例题精解

例2.1 用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$($q$为常数且$|q|<1$).

证明 对任意正数ε，不妨设$\varepsilon<1$，欲使$|q^n-0|<\varepsilon$成立，只要

$$n\ln|q|<\ln\varepsilon,$$

即

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

取$N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]+1$，则当$n>N$时，就有$n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，则

$$|q^n|<\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$($q$为常数且$|q|<1$).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 (1)当$\{a_n\}$是首项为a_1,公比为$q(q\neq 1)$的等比数列时,其前n项和为

$$S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

当$|q|<1$时,$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a_1}{1-q}$.

(2)要强调q为常数且$|q|<1$,若没有q为常数这个条件,如$q=1-\dfrac{1}{n}$,$n=2,3,\cdots$,则$|q|<1$,但

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n}\right)}=e^{-1}\neq 0.$$

例 2.2 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$.

证明 因$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,对任意正数$\varepsilon$,存在正整数$N$,当$n>N$时,有

$$|a_n-A|<\varepsilon.$$

又由不等式$||a|-|b||\leqslant|a-b|$,有

$$||a_n|-|A||\leqslant|a_n-A|<\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$.

微信公众号:djky66
(顶尖考研领跑上岸)

【注】 在本题中若$A=0$,则$||a_n|-|A||=||a_n|-0|=|a_n-0|$,即有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}|a_n|=0,$$

这结论常用,即若要证$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,可转化为证$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$,由于$|a_n|\geqslant 0$,若使用夹逼准则,便省了一半的气力,只需证$|a_n|\leqslant 0$即可.

例 2.3 证明数列$\{n^{(-1)^n}\}$极限不存在.

证明 从数列

$$\{n^{(-1)^n}\}:\frac{1}{1},2,\frac{1}{3},4,\frac{1}{5},6,\cdots,\frac{1}{2n-1},2n,\cdots$$

中选取一个子列$\{2n\}$:$2,4,\cdots,2n,\cdots$,该数列不是有界数列,由定理2的逆否命题知该子列发散,因此,由"收敛数列的任何子列也收敛"的逆否命题知,原数列极限不存在.

【注】 该数列存在收敛的子列$\left\{\dfrac{1}{2n-1}\right\}$:$1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5},\cdots,\dfrac{1}{2n-1},\cdots$,但原数列发散.这说明一个数列的某个子列收敛并不能保证原数列收敛.

例 2.4 设$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n\text{为正奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{为正偶数},\end{cases}$ 则当$n\to\infty$时,变量x_n为(　　).

(A)无穷大量　　(B)无穷小量

(C)有界变量但不是无穷小量　　(D)无界变量但不是无穷大量

解 应选(D).

本题给出$\{x_{2n}\}$,$\{x_{2n+1}\}$的表达式,欲考查$\{x_n\}$的极限,自然要考查两个子列的极限,且需要区分选项中

无界变量与无穷大量的概念. 由题设可知

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2+\sqrt{2n+1}}{2n+1}=+\infty,$$

可知$\lim_{n\to\infty}x_{2n}\neq\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}$，因此$\lim_{n\to\infty}x_n$不存在，且$\{x_n\}$既不是无穷大量，也不是无穷小量，故选(D).

例 2.5 设$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1$，$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$，证明$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的极限存在，并求出它们的极限值.

证明 令$u_n=a_n+b_n$，$v_n=a_n-b_n$，则$\lim_{n\to\infty}u_n=1$，$\lim_{n\to\infty}v_n=3$. 由极限运算规则①知，$\{u_n+v_n\}$和$\{u_n-v_n\}$均存在极限，且有

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to\infty}u_n+\lim_{n\to\infty}v_n=1+3=4,$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)=\lim_{n\to\infty}u_n-\lim_{n\to\infty}v_n=1-3=-2.$$

另一方面，$a_n=\frac{1}{2}(u_n+v_n)$，$b_n=\frac{1}{2}(u_n-v_n)$，所以$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的极限存在，且有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\times4=2,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}\times(-2)=-1.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 2.6 极限$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$(　　).

(A)2　　(B)$\frac{3}{2}$　　(C)1　　(D)$\frac{2}{3}$

解 应选(A).

所求极限中$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+3\sqrt{n}}$与$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n-\sqrt{n}}$都不存在，不能利用极限运算规则，这时通常应考虑代数恒等变形，化为可以利用极限运算规则的情形.

所给极限为“$\infty-\infty$”型，不能直接利用极限运算规则，需先变形.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2.$$

故选(A).

例 2.7 求极限$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

解 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i}$，对和式$\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i}$作适当的放缩有

$$n\cdot\frac{n}{n^2+n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i}\leqslant n\cdot\frac{n}{n^2+1},$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

由于$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$，因此根据夹逼准则，原式=1.

例 2.8 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=a(a>0)$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$，证明极限$\lim_{n\to\infty}a_n$存在，并求其值.

证明 由题设可知$a_n>0$，由不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a,b>0)$，有

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\frac{2}{a_n}}=\sqrt{2},$$

即数列$\{a_n\}$有下界. 又

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)-a_n=\frac{2-a_n^2}{2a_n}\leqslant 0(n\geqslant 2),$$

故数列$\{a_n\}$单调减少.

由单调有界准则,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\xlongequal[\text{记为}]{\text{存在}}A$,由保号性,有$A\geqslant\sqrt{2}$.

在等式$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$两端取极限,得

$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{2}{A}\right),$$

解得$A=\sqrt{2}$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$.

例 2.9 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求该极限.

证明 由于当$0<x<\pi$时,$0<\sin x<x$,所以当$0<x_n<\pi$时,$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi$. 已知$0<x_1<\pi$,故由数学归纳法知对一切$n=1,2,\cdots$,有

$$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n,$$

即$\{x_n\}$单调减少且$x_n>0$.

由单调有界准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,记为$a$,则$a\geqslant 0$. 令$n\to\infty$,将$x_{n+1}=\sin x_n$两边取极限,得$a=\sin a$,易见$a=0$是它的解. 故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

例 2.10 设数列$\{a_n\}$满足$a_0=0,a_1=1,2a_{n+1}=a_n+a_{n-1},n=1,2,\cdots$.

(1)证明$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n,n=1,2,\cdots$;

(2)求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(1)**证明** 由$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}$,则

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}-a_n=\frac{-a_n+a_{n-1}}{2}\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(a_n-a_{n-1})=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot(a_{n-1}-a_{n-2})\\&=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a_1-a_0)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n,n=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

(2)**解**

$$\begin{aligned}a_n&=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_1-a_0)+a_0\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\cdots+1\\&=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)},\end{aligned}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$.

微信公众号：diky66
(预祝考研祝您上岸)

基础习题精练

习题

2.1 用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1$.

2.2 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

2.3 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

2.4 设$a_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$. 证明数列$\{a_n\}$收敛.

2.5 设$x_1=2, x_n+(x_n-4)x_{n-1}=3(n=2,3,\cdots)$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

解答

2.1 证明 按照本讲"基础内容精讲"中"1. 引言"的思路，不难写出证明过程. 因$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$，则对任意正数$\varepsilon$，欲使

$$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

即

$$\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只要

$$n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

取N为$\frac{1}{\varepsilon}$的整数部分加1，即$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，就有$n>\frac{1}{\varepsilon}$，从而有

$$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1$.

2.2 解 由题设得，

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，根据夹逼准则，原式$=1$.

2.3 解 分子不动，将分母改成相同的，则

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)},$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\frac{1}{2}$，所以根据夹逼准则，原式$=\frac{1}{2}$.

2.4 证明 因

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0,$$

故数列$\{a_n\}$单调增加.

当$n>1$时，因为

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\&<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\\&=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=2-\frac{1}{n}<2,\end{aligned}$$

故数列$\{a_n\}$有上界. 由单调有界准则，数列$\{a_n\}$收敛.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

2.5 解 先证单调性. 由$x_n+(x_n-4)x_{n-1}=3$，得$x_n=\frac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，又$x_1=2$，所以$x_2=\frac{3+4\times 2}{1+2}=\frac{11}{3}>x_1>0$，假设$x_k>x_{k-1}>0$成立，则

$$x_{k+1}-x_k=\frac{3+4x_k}{1+x_k}-\frac{3+4x_{k-1}}{1+x_{k-1}}=\frac{x_k-x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})}>0,$$

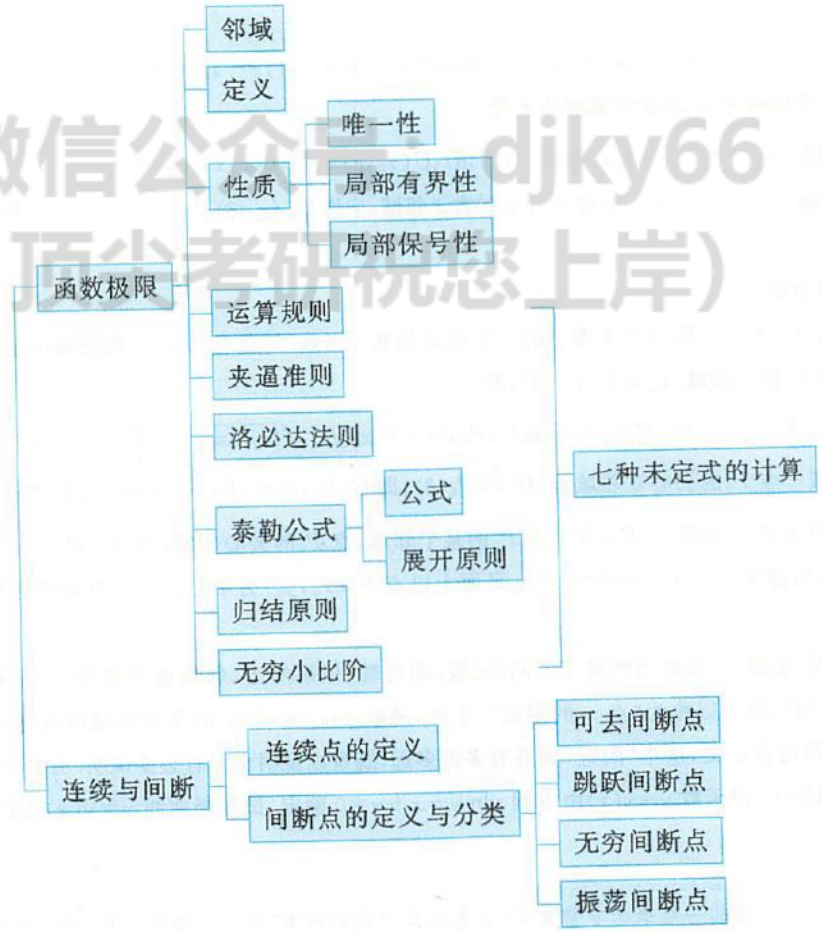
故$x_{k+1}>x_k$，即数列$\{x_n\}$单调增加.

再证明其有界. 又$x_n=\frac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=3+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}<3+1=4$，所以数列$\{x_n\}$有上界.

由单调有界准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，令$n\to\infty$，由$x_n=\frac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，得$A=\frac{3+4A}{1+A}$，解得$A=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$，由题设，$x_n>0$，根据极限保号性可知$A>0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

第3讲 函数极限与连续性

基础知识结构



微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础内容精讲

一、函数极限

1. 邻域

(1)一维的情形.

邻域 数轴上以点 x_0 为中心的任何开区间称为**点 x_0 的邻域**，记作 $U(x_0)$.

δ 邻域 设 x_0 是数轴上一个点，δ 是某一正数，则称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为**点 x_0 的 δ 邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x\mid |x-x_0|<\delta\},$$

其中点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

去心 δ 邻域 定义点 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$：$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$.

左、右 δ 邻域 $\{x\mid 0<x-x_0<\delta\}$ 称为点 x_0 的**右 δ 邻域**，记作 $U^+(x_0,\delta)$；$\{x\mid 0<x_0-x<\delta\}$ 称为点 x_0 的**左 δ 邻域**，记作 $U^-(x_0,\delta)$.

(2)二维的情形.

δ 邻域 设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数. 与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}\text{或}U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

去心 δ 邻域 点 P_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}$. 特别指出，如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，点 P_0 的去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$.

δ 邻域的几何意义 $U(P_0,\delta)$ 表示 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$ 的全体.

邻域与区间(区域) 邻域当然属于区间(区域)的范畴，但事实上，邻域通常表示“一个局部位置”，比如“点 x_0 的 δ 邻域”，就可以称为“点 x_0 的附近”. 于是，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某 δ 邻域内有定义也就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，这个“附近”到底有多近多远，既难以说明也没有必要说明. 有例为证，2007 年有一道考研数学题如下：设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点(1,1)附近的凹凸性.

> 【注】 关于邻域的一组概念非常重要，因为这涉及我们将要“在一个局部位置”细致地研究问题.

2. 函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 若存在常数 A，对于任意给定的 $\varepsilon>0$(不论它多么小)，总存在正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{ 或 }f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

写成“$\varepsilon-\delta$ 语言”：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

微信公众号：djky66
(助考研祝您上岸)

【注 1】 这里 x 的趋向方式要比数列问题多得多，对于 $x\to x_0$，既要考虑 x 从 x_0 的左侧（小于 x_0）无限接近 x_0，即 $x\to x_0^-$，也要考虑 x 从 x_0 的右侧（大于 x_0）无限接近 x_0，即 $x\to x_0^+$；对于 $x\to\infty$，既包括 $x\to-\infty$，也包括 $x\to+\infty$，不再一一列出. 读者应学会写出函数极限的精确定义，提示一下：对于 $x\to\infty$ 时的极限，其“$\varepsilon-X$ 语言”为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\text{当}|x|>X\text{时，有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

【注 2】 (1)函数的单侧极限.

若当 $x\to x_0^-$ 时，$f(x)$ 无限接近于某常数 A，则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\text{ 或 }f(x_0^-)=A.$$

若当 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)$ 无限接近于某常数 A，则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\text{ 或 }f(x_0^+)=A.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(2)函数极限存在的充要条件.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A,\text{且}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A,$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

3. 函数极限的性质

唯一性 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么极限唯一.

局部有界性 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在正常数 M 和 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

局部保号性 如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

【注】 **推论** 如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant0$（或 $\leqslant0$）且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant0$（或 $\leqslant0$）.

4. 极限运算规则

若 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，那么

①$\lim[kf(x)\pm lg(x)]=k\lim f(x)\pm l\lim g(x)=kA\pm lB$，其中 k,l 为常数；

②$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$，特别地，若 $\lim f(x)$ 存在，n 为正整数，则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n;$$

③$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

5. 夹逼准则

如果函数 $f(x),g(x)$ 及 $h(x)$ 满足下列条件：

①$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

②$\lim g(x)=A,\lim h(x)=A$.

则 $\lim f(x)$ 存在，且 $\lim f(x)=A$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 常见的一个问题：设任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim f(x)$ 是否一定存在？答案是否定的. $\lim[g(x)-\varphi(x)]$ 存在并不能说明 $\lim g(x)$，$\lim\varphi(x)$ 都存在，从而也不能保证 $\lim f(x)$ 存在.

例如，当 $x>0$ 时，取 $\varphi(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$，$f(x)=x+\dfrac{2}{x+1}$，$g(x)=x+\dfrac{3}{x+1}$，则 $\varphi(x)<f(x)<g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在.

6. 洛必达法则

洛必达
(1661－1704)

法则一 设①当 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零；

②$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 在点 a 的某去心邻域内(或当 $|x|>X$，此时 X 为充分大的正数)存在，且 $F'(x)\neq0$；

③$\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$(或 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$)存在或无穷大，

则 $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$(或 $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$).

微信公众号：djky66
(倒头考研祝您上岸)

法则二 设①当 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于无穷大；

②$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 在点 a 的某去心邻域内(或当 $|x|>X$，此时 X 为充分大的正数)存在，且 $F'(x)\neq0$；

③$\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$(或 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$)存在或无穷大，

则 $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$(或 $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$).

【注】 (1)一般说来，洛必达法则是用来计算“$\dfrac{0}{0}$”型或者“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式极限的，不是“$\dfrac{0}{0}$”型或者“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型，就不能用洛必达法则.

(2)如果极限 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属于“$\dfrac{0}{0}$”型或者“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型，且 $f'(x)$，$F'(x)$ 继续满足洛必达法则的条件，则可以继续使用洛必达法则，即 $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\dfrac{f''(x)}{F''(x)}$.

(3)如果 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在也不为 ∞，不能推出 $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 不存在也不为 ∞，简单一点说就是：

对于 $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$，**“右存在，则左存在；但左存在，并不意味着右一定存在”**. 比如说，极限

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$$

存在，而如果使用洛必达法则，会有

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\left(2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right),$$

这个极限显然不存在. 这是一个很细致、很隐蔽的问题，稍不注意就可能出错.

7. 泰勒公式

泰勒公式是极限计算的重要工具(其来源见第6讲"基础内容精讲"的定理9).

泰勒
(1685—1731)

第一,要将以下几个重要函数的泰勒公式熟稔于心($x\to 0$):

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),$$

$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\qquad \tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),\qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\qquad (1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2).$$

【注】 从数学命题的角度,对以上公式进行处理,可得到一组"差函数"的等价无穷小代换式:如 $x-\sin x=\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$,则 $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3(x\to 0)$,同理有 $\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^3(x\to 0)$,$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3(x\to 0)$,$x-\arctan x\sim\frac{x^3}{3}(x\to 0)$等.并可将这些公式广义化,如第一个公式广义化为狗$-\sin$狗$\sim\frac{1}{6}$(狗)^3(狗$\to 0$),其余类似.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第二,要掌握高阶无穷小的计算规则,详见下面的"9. 无穷小比阶".

第三,也是最关键的一点,用泰勒公式求极限时,函数应展开到 x 的几次幂?

(1)$\frac{A}{B}$型,适用"上下同阶"原则.

具体说来,如果分母(或分子)是 x 的 k 次幂,则应把分子(或分母)展开到 x 的 k 次幂,可称为"上下同阶"原则.

例如,为了计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$,把 $\sin x$ 泰勒展开,一般可写成如下三种形式:

①$\sin x=x+o(x)$;②$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$;③$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)$.

根据"上下同阶"原则,①式展开得"不够",③式展开得"过多",②式正符合要求.于是,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

(2)$A-B$ 型,适用"幂次最低"原则.

具体说来,即将 A,B 分别展开到它们的系数不相等的 x 的最低次幂为止.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例如,已知当 $x\to 0$ 时,$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 ax^b 为等价无穷小,求 a,b.

用泰勒公式,$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$,$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)$.

显然,将 $\cos x$,$e^{-\frac{x^2}{2}}$ 展开到 x^4 时,其系数就不一样了,使用"幂次最低"原则,展开到此项后,进行运算,得

$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right]=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4),$$

于是可知 $\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}\sim-\frac{1}{12}x^4(x\to0)$，故 $a=-\frac{1}{12}$，$b=4$.

8. 海涅定理(归结原则)

设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，则

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在$\Leftrightarrow$对任何 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}(x_n\neq x_0)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 存在.

【注】 众所周知，数列极限与函数极限是分别独立定义的，但是海涅定理是联系数列极限与函数极限的桥梁. 它指出：在极限存在的条件下，函数极限和数列极限可以相互转化. 虽然有些读者可能没有听说过这个定理，但是我们都在不知不觉地使用它，比如，证明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. 证明如下：

设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，若取 $x_n=\frac{1}{n\pi}\to0,n\to\infty$，则有 $f(x_n)=0$；若取 $x_n'=\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\to0,n\to\infty$，则有 $f(x_n')=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\to\infty,n\to\infty$，根据海涅定理，极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. 证毕.

事实上，$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是当 $x\to0$ 时的无界量，但不是无穷大量.

微信公众号：djky66
(预祝考研祝您上岸)

9. 无穷小比阶

(1)无穷小定义.

如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷小**，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0\left(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=0\right).$$

特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n\to\infty$ 时的无穷小.

【注】 (1)无穷大定义.

如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，函数 $|f(x)|$ 无限增大，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷大**，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\left(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\right).$$

(2)无穷小与无穷大的关系.

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(2)无穷小的比阶.

设在自变量的同一变化过程中，$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=0$，且 $\beta(x)\neq0$，则

①若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **高阶的无穷小**，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；

②若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **低阶的无穷小**；

③若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**同阶无穷小**；

④若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**等价无穷小**，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

⑤若 $\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq0,k>0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k **阶无穷小**.

【注】 **并不是任意两个无穷小都可进行比阶的.** 例如，当 $x\to0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小，但是却不可以比阶，也就是说既无高低阶之分，也无同阶可言，因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

(3)无穷小运算规则.

①**有限个**无穷小的和是无穷小.

②有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

③**有限个**无穷小的乘积是无穷小.

④无穷小的运算.

设 m,n 为正整数，则

a. $o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l),l=\min\{m,n\}$(加减法时低阶"吸收"高阶)；

b. $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n}),x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$(乘法时阶数"累加")；

c. $o(x^m)=o(kx^m)=k\cdot o(x^m),k\neq0$ 且为常数(非零常数相乘不影响阶数).

【注】 在后面泰勒公式的应用中，会对上述高阶无穷小的运算提出要求，请读者学会正确书写.

(4)常用的等价无穷小.

当 $x\to0$ 时，常用的等价无穷小有：

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,$$

$$a^x-1\sim x\ln a,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x.$$

【注】 (1)使用时一般都要做广义化：可将 x 替换为趋向于 0 的函数，请灵活使用.

(2)两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

二、函数的连续与间断

1. 连续点的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，且有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

2. 间断点的定义与分类

以下设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义.

(1)可去间断点.

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq f(x_0)$($f(x_0)$甚至可以无定义),则这类间断点称为**可去间断点**.

【注】 只要修改或者补充$f(x_0)$,使得$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A=f(x_0)$,就会使得函数在点$x_0$处连续,于是,这个点叫作可去间断点,也叫作**可补间断点**.

(2)跳跃间断点.

若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在,但$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,则这类间断点称为**跳跃间断点**.

可去间断点和跳跃间断点统称为**第一类间断点**.

(3)无穷间断点.

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则这类间断点称为**无穷间断点**,如点$x=0$为函数$y=\dfrac{1}{x}$的无穷间断点.

(4)振荡间断点.

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$振荡不存在,则这类间断点称为**振荡间断点**,如函数$y=\sin\dfrac{1}{x}$在点$x=0$处没有定义,且当$x\to0$时,函数值在-1与1这两个数之间交替振荡取值,极限不存在,故点$x=0$为函数$y=\sin\dfrac{1}{x}$的振荡间断点.

微信公众号:dky60
(顶尖考研祝您上岸)

无穷间断点和振荡间断点都属于**第二类间断点**,除此之外,还有不属于上述定义的第二类间断点,比如图3-2的情形.

【注】 (1)大学教材(如同济大学《高等数学》第七版)中一般均写明"在点x_0的某去心邻域有定义"的前提下,才讨论间断点.如图3-1所示,显然,$f(x)$在点$x=x_0$处只有右侧邻域有定义,故不讨论点$x=x_0$是否为间断点.(但直线$x=x_0$是$f(x)$的铅垂渐近线)

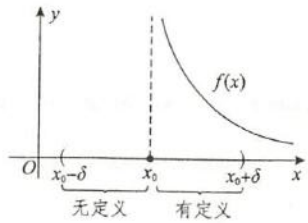


图3-1

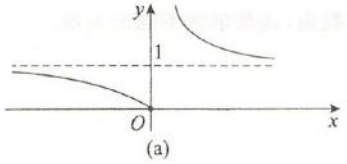
(2)进一步地,"在点x_0的某去心邻域有定义"的函数$f(x)$,如图3-2所示.

如图3-2所示的情形从未考过,因为一般的数学教材中没有单侧间断的定义,这种定义可参见国际上的一些教材,如菲氏《微积分学教程》有如下定义.

函数$f(x)$在点x_0处是右(或左)连续的,只需满足极限关系式

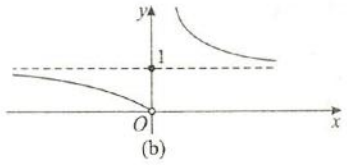
$$f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)\text{(或 }f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)\text{)}.$$

若这关系式不成立,则称函数$f(x)$在点x_0处有**右间断(或左间断)**,如此说来,对于图3-2(a),$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$,故$x=0$处左连续,但$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$,故$x=0$处右侧无穷间断,读者可类似分析图3-2(b)的情形.



(a)

$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 说 $\begin{cases}x=0\text{ 处右侧无穷间断},\\ x=0\text{ 处左侧连续}.\end{cases}$



(b)

$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 说 $\begin{cases}x=0\text{ 处右侧无穷间断},\\ x=0\text{ 处左侧跳跃间断}.\end{cases}$

图 3-2

基础例题精解

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

1. 函数极限的性质

本部分主要考查函数极限的唯一性、局部有界性和局部保号性.

(1)对于唯一性,

①对于 $x\to\infty$,意味着 $x\to+\infty$,且 $x\to-\infty$;

②对于 $x\to x_0$,意味着 $x\to x_0^+$,且 $x\to x_0^-$.

我们称这个细节的问题为自变量取值的“双向性(有正有负)”,基于此,我们看几个重要的函数极限问题.

$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$不存在,因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$,根据“极限若存在,必唯一”,得原极限不存在;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$不存在,因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{-x}=-1$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在,因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$;

$\lim\limits_{x\to 0}[x]$不存在,因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-1$.

(2)对于局部有界性,

①设 $\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)$存在,则当 $x\to\cdot$ 时,$f(x)$有界. 其中“$x\to\cdot$”是指 $x\to x_0$, $x\to x_0^-$, $x\to x_0^+$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$六种情形. 值得注意的是,极限存在只是函数局部有界的充分条件,并非必要条件;

②设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界;

③有界函数与有界函数的和、差、积仍为有界函数;

④若 $f'(x)$在有限区间(a,b)内有界,则 $f(x)$在该区间内有界.

(3)对于局部保号性,主要和导数的几何应用结合来命题,参见第 5 讲的例题.

例 3.1 已知 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$存在,且函数 $f(x)=x^2+x-2\lim\limits_{x\to 1}f(x)$,则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$(　　).

(A) $\dfrac{3}{2}$　　(B) $-\dfrac{2}{3}$　　(C) $-\dfrac{3}{2}$　　(D) $\dfrac{2}{3}$

解 应选(D).

本题考查极限的概念，如果极限存在，则它表示一个确定的数值，这是求解本题的关键.

设$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=A$，于是

$$f(x)=x^2+x-2A,$$

两端同时取 $x\to 1$ 时的极限，有

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+x-2A)=2-2A,$$

于是 $A=2-2A$，解得 $A=\dfrac{2}{3}$. 故选(D).

例 3.2 当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　).

(A)等于 1　　(B)等于 0

(C)为∞　　(D)不存在且不为∞

解 应选(D).

函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 在 $x=1$ 处没有定义，在 $x=1$ 的两侧表达式虽然相同，但是注意到当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{1}{x-1}$ 左、右极限不相等，因此应该考虑单侧极限.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

可知当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限不存在且不为∞，故选(D).

【注】 对于上述$\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$的情形，由于$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}$与$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}$不相等，因此不能忽视左极限与右极限，否则会导致错误，这是这类问题经常出现错误的原因.

例 3.3 在下列区间内，函数 $f(x)=\dfrac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$ 有界的是(　　).

(A)$(-2,1)$　　(B)$(-1,0)$　　(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$

解 应选(B).

所给选项皆为开区间，因此不能直接利用连续函数在闭区间上的有界性定理. 可以考虑在开区间两个端点处函数的极限是否存在.

由于 $f(x)$ 在 $x_1=1,x_2=3$ 处没有定义，因此当 $x\neq 1,x\neq 3$ 时，$f(x)$ 为初等函数且为连续函数. 又由

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}=\infty,$$

可知在区间端点为 1 或 3 的开区间内，$f(x)$ 均为无界函数，故选(B).

【注】 (1)若 $y=f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上为连续函数，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上必定有界.

(2)若 $f(x)$ 在(a,b)内为连续函数，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$都存在，则 $f(x)$ 在(a,b)内必定有界.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

2. 七种未定式的计算

本节内容极其重要，它是高等数学计算的基础，读者要高度重视，充分训练.

对于$\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)$，自变量$x$的变化趋势共有六种情形：$x\to x_0^+(x>x_0)$，$x\to x_0^-(x<x_0)$，$x\to x_0$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$及$x\to\infty$. 在没必要对其进行区别时，统一记成$x\to\cdot$.

(1)化简是第一步，切记.

化简的方法：①提出极限不为0的因式；②等价无穷小代换；③恒等变形(基本的恒等变形法如提公因式、拆项、合并、分子分母同除变量的最高次幂等，高级的恒等变形法如变量代换，也叫换元法等). 需要强调的是，很多问题如果不化简就计算，可能计算会很复杂，甚至可能计算不出结果.

(2)判断类型，七种："$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$""$0\cdot\infty$""$\infty-\infty$""∞^0""0^0""1^∞".

(3)选择相应的方法进行计算(包括运算规则、夹逼准则、洛必达法则、泰勒公式、归结原则等).

(1)"$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$""$0\cdot\infty$".

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 3.4 极限$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{x-e^{2\sqrt{x}}+1}=$(　　).

(A)∞　　(B)2　　(C)1　　(D)$-\frac{1}{2}$

解 应选(D).

这是"$\frac{0}{0}$"型未定式，注意到函数表达式中含有根式，若直接利用洛必达法则，求导比较复杂，考虑到分子与分母中均含有$\sqrt{x}$，可先设$t=\sqrt{x}$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{x-e^{2\sqrt{x}}+1}\xlongequal{t=\sqrt{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{t}{t^2-e^{2t}+1}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2t-2e^{2t}}=-\frac{1}{2}.$$

故选(D).

例 3.5 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

解 这是"$\frac{0}{0}$"型未定式，分子是根号差"$\sqrt{a}-\sqrt{b}$"的形式，请记住一句话，一般说来，"见根号差，用有理化"，这是一种重要的化简手段，则

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{x[\ln(1+x)-x]}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{-\frac{x}{1+x}}=-\frac{1}{2}.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 3.6 求极限$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解 这是"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式，注意到$x\to-\infty$，也就意味着$x<0$，并且$\sqrt{4x^2+x-1}+x+1$是根号差"$\sqrt{a}-\sqrt{b}$"的形式，于是先用有理化做化简，再用$t=-x$代换化为我们熟悉的式子，然后进行计算.

$$\text{原式}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x-2}{\sqrt{x^2+\sin x}\left(\sqrt{4x^2+x-1}-x-1\right)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{3t^2+t-2}{\sqrt{t^2-\sin t}\left(\sqrt{4t^2-t-1}+t-1\right)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}}{\sqrt{1-\frac{\sin t}{t^2}}\left(\sqrt{4-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}+1-\frac{1}{t}\right)}=1.$$

例 3.7 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$.

解 这是“$\infty\cdot0$”型未定式，理由同上，则有

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}\xlongequal{\text{令}t=-x}\lim_{t\to+\infty}\frac{-100}{\sqrt{1+\frac{100}{t^2}}+1}=-50.$$

【注】 顺便指出，本题和上题都有一个要注意的细节，就是当 $x<0$ 时，要使用代换 $t=-x$ 化为常见的情况，或用 $-x$ 同时除分子、分母，这样才不会出现正负上的错误.

例 3.8 求极限 $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)$.

解 这是“$\infty\cdot0$”型未定式，注意一个事实：当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，将其广义化，得

$$\ln(1+u)\sim u\ (u\to0),$$

于是在考研中常考的一个式子是 $\ln x=\ln(1+x-1)\sim x-1\ (x\to1)$，则

$$\lim_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x-1)\ln(1-x)$$

$$=\lim_{x\to1^-}(x-1)\ln(1-x)$$

$$\xlongequal{1-x=t}-\lim_{t\to0^+}t\ln t=0.$$

【注】 在实考中，很多考生对于这种问题处理得不理想，事实上，读者一定要明白一个道理：不能只是简单地记住那几个基本的等价无穷小代换公式，而应该把它们广义化，并通过好的题目载体灵活应用，像本题一样. 这再一次说明：数学解题能力必须在做题实践中才能提高.

例 3.9 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$.

解 当 $x\to0$ 时，由于 $\arcsin x-\arctan x=\left[\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]x^3+o(x^3)=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$，故 $\arcsin x-\arctan x\sim\frac{1}{2}x^3$；同理，当 $x\to0$ 时，由于 $\sin x-\tan x=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3)=-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$，故 $\sin x-\tan x\sim-\frac{1}{2}x^3$，所以原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{-\frac{1}{2}x^3}=-1$.

【注】 如果用洛必达法则，计算起来会相当麻烦.

例 3.10 求 $I=\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{10}{x}\right]$，其中 $[\cdot]$ 为取整符号.

解 当 $x\to0$ 时，$\frac{10}{x}\to\infty$，对于 $[\infty]$，此时想到极限计算的利器——夹逼准则（当常规求极限的方法，比

如等价无穷小代换、泰勒公式、洛必达法则无法使用时，一定要能够想得起这个“两边夹击”的重要方法).

根据 $x-1<[x]\leqslant x$，有

$$\frac{10}{x}-1<\left[\frac{10}{x}\right]\leqslant\frac{10}{x},$$

于是

$$\begin{cases}x>0\Rightarrow 10-x<x\cdot\left[\dfrac{10}{x}\right]\leqslant 10,\\ x<0\Rightarrow 10-x>x\cdot\left[\dfrac{10}{x}\right]\geqslant 10.\end{cases}$$

可见，无论 $x>0$，还是 $x<0$，不等式两边均可趋于同一极限，故 $I=\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{10}{x}\right]=10$.

(2)“$\infty-\infty$”.

对于“$\infty-\infty$”型未定式，一般有两种思路.

(1)如果函数中有分母，则通分，将加减法变形为乘除法，以便于使用其他计算工具(比如洛必达法则)，见例 3.11.

(2)如果函数中没有分母，则可以通过提取公因式，或者作倒代换，出现分母后，再利用通分等恒等变形的方法，将加减法变形为乘除法，见例 3.12.

微信公众号：dikv66
(顶尖考研祝您上岸)

例 3.11 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]=$(　　).

(A)2　　(B)$\dfrac{3}{2}$　　(C)1　　(D)$\dfrac{1}{2}$

解 应选(D).

所给极限为“$\infty-\infty$”型，先变形，化为“$\dfrac{0}{0}$”型.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

故选(D).

例 3.12 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$.

解 原式 $\xrightarrow{\text{令 } u=\frac{1}{x}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{e^u-1-u}{u^2}=\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{e^u-1}{2u}=\dfrac{1}{2}$.

(3)“∞^0”“0^0”“1^∞”.

例 3.13 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

解 这是“∞^0”型未定式，是幂指函数的极限，对于“∞^0”和“0^0”型这两种未定式，一般说来，我们都用恒等变形

$$\lim u^v=e^{\lim v\ln u}\xrightarrow{\text{记}}\exp\{\lim v\ln u\},$$

将其化成“$\frac{0}{0}$”“$\frac{\infty}{\infty}$”“$0\cdot\infty$”这三种类型，然后计算. 故原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right\}$.

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

例 3.14 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{e}{x}}$.

解 这是“1^∞”型未定式，是幂指函数的极限，如果$\lim u^v$属于“1^∞”型，则有一个重要且简单的计算方法：$\lim u^v=e^{\lim(u-1)v}$.

推导如下：利用第二重要极限公式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，得

$$\lim u^v=\lim\{[1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\}^{(u-1)v}=e^{\lim(u-1)v},$$

故
$$\text{原式}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{e}{x}\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{e}{3}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}+\frac{e^{3x}-1}{x}\right)\right\}$$
$$=\exp\left\{\frac{e}{3}\left(\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x}\right)\right\}=e^{\frac{e}{3}(1+2+3)}=e^{2e}.$$

微信公众号：dky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 3.15 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$（$n$为正整数）.

解 这是“1^∞”型未定式，解法同上，于是

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x-x}{x}\right)\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}\right\}=e^{\frac{1}{3}}.$$

根据归结原则，取$x=\frac{1}{n}$，则原式$=e^{\frac{1}{3}}$.

3. 已知某一极限，求另一极限

此类问题是考研的常考题，关键要抓住已知极限与未知极限的联系，实现问题的转化.

例 3.16 已知极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x+xf(x)}{\sin x^3}=0$，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x^2}=$（　　）.

(A)$\frac{13}{9}$　　(B)4　　(C)$\frac{10}{3}$　　(D)$-\frac{8}{3}$

解 应选(D).

由所给极限可知当$x\to0$时，$\tan 2x+xf(x)$是比$\sin x^3$高阶的无穷小. 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x^2}$可考虑将已知极限的函数转化为含$\frac{2+f(x)}{x^2}$的形式.

由于
$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x+xf(x)}{\sin x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x+xf(x)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x-2x+x[2+f(x)]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan 2x-2x}{x^3}+\frac{2+f(x)}{x^2}\right]=0,$$

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2-2}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\cos^2 2x}{x^2\cos^2 2x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$$

$$=\frac{8}{3}.$$

则所求极限$=0-\frac{8}{3}=-\frac{8}{3}$,故选(D).

4. 已知极限反求参数

此类问题也是考研的常考题,事实上就是带着参数求极限,只是由于表达式中含着未知参数,要注意慎用洛必达法则(详见"基础内容精讲""一"中的"6").

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 3.17 设$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$,求常数 a,b.

解 原极限$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-ax-bx^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x-\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+o(x^2)}{x^2}=2$,从而

$$1-a=0,-\left(\frac{1}{2}+b\right)=2\Rightarrow a=1,b=-\frac{5}{2}.$$

【注】 本题还有一个值得借鉴的解法.

根据泰勒公式容易得:$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2(x\to 0)$(请读者记住此式),故想办法把分子凑出这种形式.

$$2=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)-x+(ax+bx^2)}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{(a-1)x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{bx^2}{x^2}=-\frac{1}{2}-b-\lim_{x\to 0}\frac{(a-1)x}{x^2},$$

故 $a-1=0\Rightarrow a=1$. 因而$-\frac{1}{2}-b=2\Rightarrow b=-\frac{5}{2}$.

5. 无穷小比阶

例 3.18 设当 $x\to 0$ 时,$e^x-(ax^2+bx+1)$是比 x^2 高阶的无穷小,则(　　).

(A)$a=\frac{1}{2},b=1$　　(B)$a=1,b=1$　　(C)$a=-\frac{1}{2},b=-1$　　(D)$a=-1,b=1$

解 应选(A).

方法一 由泰勒公式可知　　$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$.

由题设可知　　$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=0$,

即　　$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+(1-b)x+o(x^2)}{x^2}=0$,

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

则 $a=\frac{1}{2}$，$b=1$.

方法二 由洛必达法则可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x},$$

若 $b\neq 1$，上式右端趋于无穷，从而左端也趋于无穷，与原题设矛盾，所以 $b=1$. 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}-a=\frac{1}{2}-a=0,$$

故 $a=\frac{1}{2}$，所以应选(A).

例 3.19 设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

解 应选(C).

当 $x\to 0$ 时，

$$e^{\tan x}-e^x=e^x(e^{\tan x-x}-1)\sim e^x(\tan x-x)\sim\tan x-x,$$

而

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

所以

$$\tan x-x=\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

因此选(C).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 可以仿照本方法来验证如下结论：

当 $x\to x_0$ 时，若 $f(x)\to 0$，$g(x)\to 0$，则 $e^{f(x)}-e^{g(x)}\sim f(x)-g(x)$.

例 3.20 设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$，$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$. 当 $x\to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是(　　).

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(B)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$　　(C)$\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$　　(D)$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

解 应选(B).

当 $x\to 0^+$ 时，

$$\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)\sim-\frac{1}{2}x^2,$$

$$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim x^{\frac{5}{6}},$$

$$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1\sim\frac{1}{3}x,$$

则从低阶到高阶的排序是 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$，故选(B).

6. 函数的连续与间断

例 3.21 设 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\leqslant 0,\\ e^x(\sin x+\cos x), & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $a=$_____.

解 应填 1.

由于

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(2x+a)=a,\quad f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1,$$

因此要使 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，只需 $a=1=f(0)$，即 $a=1$.

例 3.22 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$有(　　).

(A)1 个可去间断点，1 个跳跃间断点　　(B)1 个可去间断点，1 个无穷间断点

(C)2 个跳跃间断点　　(D)2 个无穷间断点

解 应选(A).

由表达式可知，$x=0,x=1$ 是间断点. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\csc x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cdot\cot x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x}=0,$$

所以 $x=0$ 是可去间断点；而

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln[1+(x-1)]}{1-x}=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{1-x}=-\sin 1,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=\sin 1,$$

故 $x=1$ 是跳跃间断点.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 在 $x=0$ 时，也可以这样做：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim\limits_{x\to 0}x\ln|x|=0$.

例 3.23 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$的无穷间断点的个数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

解 应选(B).

$f(x)$为非分段函数，只需讨论函数的无定义点：$x=0,1,-1$. 又

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)=-1,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1,$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\left(-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)=\infty.$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$的跳跃间断点，$x=1$ 是 $f(x)$的可去间断点，$x=-1$ 是 $f(x)$的无穷间断点，故选择(B).

例 3.24 求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$的间断点并指出其类型.

解 此极限是“1^∞”型未定式，用公式 $\lim u^v=e^{\lim(u-1)v}$，有

$$f(x)=\exp\left\{\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right\}=e^{\frac{x}{\sin x}}.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

函数为非分段函数，只讨论无定义点即可：

①$x=0$ 是函数的无定义点，由于$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$，因此 $x=0$ 是 $f(x)$的第一类间断点；

②$x=k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$也是函数的无定义点，由于 $f(x)$在 $x=k\pi$ 时的左极限和右极限中总有一个为$+\infty$，因此$x=k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$是第二类间断点(详见“基础内容精讲”“二”中的“2”).

基础习题精练

习题

3.1 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

3.2 已知$I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)$存在,$[\cdot]$为取整函数,求$I,a$.

3.3 已知$a>0,b>0$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}})=$_____.

3.4 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

3.5 设$a\neq\dfrac{1}{2}$,计算$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$.

3.6 求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$.

3.7 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$,其中$a_i>0,i=1,2,\cdots,n$.

3.8 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{2^x-1}=2$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

3.9 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$则(　　).

(A)$x=0$必是$g(x)$的第一类间断点　　(B)$x=0$必是$g(x)$的第二类间断点

(C)$x=0$必是$g(x)$的连续点　　(D)$g(x)$在点$x=0$处的连续性与a的取值有关

3.10 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,讨论函数的间断点,其结论为(　　).

(A)不存在间断点　　(B)存在间断点$x=1$　　(C)存在间断点$x=0$　　(D)存在间断点$x=-1$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

解答

3.1 分析　这是"$\dfrac{0}{0}$"型未定式,看起来好像很简单,很多读者拿到这样一个问题,就直接用洛必达法则求导了,试试看?

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot 2x^{-3}}{100x^{99}}=\frac{1}{50}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{102}}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\cdots.$$

我们看到,越求导反而越复杂了,为什么?问题出在"$\dfrac{1}{x^2}$"这个形式上,注意,我们可以将"$\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^0}{x^2}$"称为"头轻

脚重”的“正三角形状△”，常识告诉我们，“正三角形状△”是稳定的. 生活和工程中我们喜欢这种稳定吗？当然，金字塔就是很好的例子. 可在数学上，这种稳定就不妙了——稳定就意味着不能动，不能动就做不下去了！比如 $\int \frac{1}{x^3+2x^2+x+1}\mathrm{d}x$，你怎么积分？而 $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{1}\mathrm{d}x$，积分多么简单！这个例子很极端，但很能说明问题. 所以此题的正确做法是先作“倒代换”，将“正三角形状△”改成“倒三角形状▽”，头重脚轻根底浅，垮了……搞定！

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x^2}=t}\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{-50}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{\mathrm{e}^t}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{\mathrm{e}^t}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{t\to+\infty}\frac{50\cdot 49\cdot t^{48}}{\mathrm{e}^t}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{\mathrm{e}^t}=0.$$

【注】 本题给我们的启示：①有些极限问题看起来很简单，但事实上如果不化简就计算，可能根本算不出结果；②可以通过变量倒代换将“正三角形状△”改成“倒三角形状▽”进行化简，这是一个经典思路，在后面的积分学和微分方程各章中，我们都会再次提到，请读者留心总结.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

3.2 解 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to-\infty}\frac{\frac{2\mathrm{e}^{2u}}{1+\mathrm{e}^{2u}}}{\frac{\mathrm{e}^u}{1+\mathrm{e}^u}}=0,\quad \lim_{x\to 0^-}a[x]=-a,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to+\infty}\frac{\frac{2\mathrm{e}^{2u}}{1+\mathrm{e}^{2u}}}{\frac{\mathrm{e}^u}{1+\mathrm{e}^u}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{2u})}{1+\mathrm{e}^{2u}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2(\mathrm{e}^{-u}+1)}{1+\mathrm{e}^{-2u}}=2,\quad \lim_{x\to 0^+}a[x]=0,$$

所以当且仅当 $a=-2$ 时，原极限存在，此时 $I=2$.

3.3 $\ln\frac{a}{b}$ **解** 利用变量代换. 令 $\frac{1}{x}=t$，则

$$\lim_{x\to+\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}})=\lim_{t\to 0^+}\frac{a^t-b^t}{t}=\lim_{t\to 0^+}(a^t\ln a-b^t\ln b)=\ln\frac{a}{b}(a>0,b>0).$$

3.4 解 方法一 这是“$\infty-\infty$”型未定式极限，首先通分变成“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式，然后使用洛必达法则求极限.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^x(1+x)+1-\mathrm{e}^x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\mathrm{e}^x+5x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}=\frac{3}{2}.$$

方法二 利用等价无穷小量代换，$\mathrm{e}^x-1\sim x$（当 $x\to 0$ 时），则

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^x(1+x)+1-\mathrm{e}^x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^x(1+x)+1-\mathrm{e}^x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}{2}=\frac{3}{2}$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 下面的做法是错误的：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}{x}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}(2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x)=2.$$

3.5 **分析** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$ 是“1^∞”型未定式极限，可以使用洛必达法则，也可以凑成第二个重要极限，还可以利用等价无穷小量代换.

解 **方法一**

$$\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left[\frac{x-2ax+1}{x(1-2a)}\right]^x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{x(1-2a)}\right]$$

$$\xlongequal{令\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\ln\left(1+\dfrac{t}{1-2a}\right)}{t}\xlongequal{洛必达法则}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{1+\dfrac{t}{1-2a}}\cdot\frac{1}{1-2a}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法二

$$\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n\right\}$$

$$=\ln\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\frac{1}{1-2a}}\right\}=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法三 因为 $\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\dfrac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty)$，所以

$$\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

微信公众号 dky66
(顶尖考研祝您上岸)

3.6 **解** 原式 $=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x\left[\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x-1\right]}{x^3}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1}{x^3}(\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1)$

$$=-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2}=-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)}{x^2}$$

$$=-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)-x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

3.7 **解** 因为 $\lim\limits_{x\to0}a_i^x=1$，所以原极限为“$1^\infty$”型未定式.

方法一 使用洛必达法则求极限.

$$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\frac{n}{x}\ln\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}n\cdot\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\right\}=a_1a_2\cdots a_n.$$

方法二 凑成第二个重要极限(“1^∞”型未定式极限都可以凑成第二个重要极限)，在计算过程中使用洛必达法则.

$$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}\cdot\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x}},$$

其中

$$\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x}=\ln(a_1a_2\cdots a_n),\quad\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}}=e,$$

所以原式 $=a_1a_2\cdots a_n$.

3.8 **解** $\lim\limits_{x\to0}(2^x-1)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=0\Rightarrow\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]\sim\dfrac{f(x)}{\sin x}\sim\dfrac{f(x)}{x}$(当 $x\to0$ 时).

又 $2^x-1=e^{x\ln2}-1\sim x\ln2$(当 $x\to0$ 时)，所以原式变为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2\ln2}=2$，故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\ln4$.

3.9 (D) **解** 因为 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，而 $g(0)=0$，所以，当 $a=0$ 时，函数 $g(x)$ 在

点 $x=0$ 处连续；当 $a\neq 0$ 时，函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续，故选(D).

3.10 (B)　**分析**　函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 是以 x 为自变量的函数，但是，在 $n\to\infty$ 求极限时，x 则被看成一个常数(参数)，根据 x 的不同取值求出极限，求极限完成后 x 又恢复变量的本来身份.

因为分式中有 x^{2n}，所以应该把 $x=-1$ 和 $x=1$ 作为分段点将函数写成分段函数，然后讨论函数的间断点.

解　当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$，所以 $f(x)=1+x$；当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=0$.

又 $f(1)=1$，$f(-1)=0$，所以

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ 1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

由此可知 $x=1$ 为间断点，故选(B).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第4讲 一元函数微分学的概念与计算

基础知识结构

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础内容精讲

一、概念

1. 引例

让我们进入一个普通教室，注意，“普通”二字意味着这不是一个特殊的(比如恒温)教室. 假设 $t=9:00$ 时教室里的温度 $u=20\ ℃$，$\tilde{t}=9:05$ 时教室里的温度 $\tilde{u}=25\ ℃$，问教室里的温度在这 5 min 里的**平均变化率**是多少?

这是一个极其简单的问题，其平均变化率为

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\tilde{u}-u}{\tilde{t}-t}=1(℃/\min).$$

不过，若只研究“平均”变化率，有时会出现意外. 再次回到刚才的教室，假设现在这个时刻 t，教室里的温度 $u=20\ ℃$，一年之前的这个时刻 $\tilde{t}$，教室里的温度 $\tilde{u}=20\ ℃$，则其平均变化率为

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\tilde{u}-u}{\tilde{t}-t}=0(℃/\min).$$

显然，这是一个令人失望的结果. 一般来说，普通教室里的温度随时间变化而不断变化，试图研究教室温度变化的这个目的落空了. 究其原因，是因为平均变化率这个概念是“粗糙”的——只研究起点和终点的信息，完全没有考虑其过程，当然达不到精确研究温度变化率的目的，如何补救? 这时，我们让 $\Delta t\to 0$，也就是让时间差成为无穷小的数，写成

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}\xlongequal{\text{记}}u'(t),$$

这里的 t 被抽象为某一时刻，$u'(t)$ 这个符号所表达的极限 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ 称为教室温度 u 在 t 时刻的**瞬时变化率**. 由于 t 为泛指的时刻点，则 $u'(t)$ 即可表达“时时刻刻”教室温度的(瞬时)变化率. 这就达到了精确研究温度在不同时刻的变化率的目的.

按照上面这个思路，我们还可以研究质点在直线运动中的速度问题，给出质点的运动方程 $S=S(t)$，我们要求出质点位移在任意时刻 t 的瞬时变化率(这就是读者熟知的速度)，也即

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}\xlongequal{\text{记}}S'(t)=v(t).$$

历史上，以牛顿为代表的数学家们饶有兴趣地研究了上面的速度问题，虽然他们的表述方式与符号记法与今天已大相径庭，但是对数学的发展做出了巨大贡献. 不过，相对于牛顿，莱布尼茨对几何问题更感兴趣.

接下来我们就进入莱布尼茨的领域——作曲线的切线——给定曲线 l 及其上一点 P(见图 4-1)，建立曲线 l 上点 P 处的切线的概念.

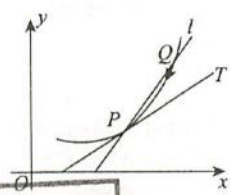


图 4-1

在曲线 l 上另取一个异于点 P 的点 Q，作割线 PQ，如图 4-1 所示. 当点 Q 沿着曲线 l 移动时，割线 PQ 将绕点 P 旋转，现让点 Q 沿曲线 l 趋向于点 P，则割线 PQ 绕点 P 旋转而趋向于**极限位置** PT. 直线 PT 称为曲线 l 在点 P 处的切线，此处的极限位置的含义为只要弦长 $|PQ|\to 0$，则 $\angle QPT\to 0$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

进一步地，记曲线 l 为 $y=f(x)$，设 $P(x_0,y_0)$，$Q(x,y)$，割线 PQ 的斜率为

$$\tan\theta=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

其中 θ 为割线 PQ 的倾角.

当点 Q 沿曲线 $y=f(x)$ 趋向于点 P 时，自然有 $x\to x_0$，于是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\text{记}}k,$$

即为割线斜率的极限，即**切线的斜率**. 如图 4-2 所示，$k=\tan\alpha$，其中 α 为切线 PT 的倾角.

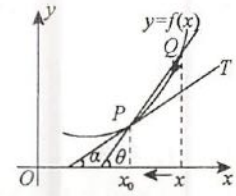


图 4-2

【注】 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 并不一定存在，图 4-2 当然是为方便读者理解而画出的.

2. 导数的概念

数学工作者们总希望透过形形色色的具体问题看到数学本质，这在技术上通常的做法是撇开问题中各种变量的具体意义，归纳出抽象化、统一化的数学表述，从而建立相应的数学概念.

事实上，上面的引例本质上是做了一件事：计算“$\dfrac{\text{函数的增量}}{\text{自变量的增量}}$”的极限，这就会得出导数的概念.

设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上，让自变量在 $x=x_0$ 处加一个增量 Δx（可正可负），其中 $x_0\in I$，$x_0+\Delta x\in I$，则可得函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 若函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 的比值在 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，并称这个极限为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**，记作 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{4-1}$$

当然，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}[f(x)]}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$y'(x_0)$ 或 $\left.y'\right|_{x=x_0}$ 这些符号记法与 $f'(x_0)$ 等价. 顺便交代一下，“导数”这个名词被认为是拉格朗日最先使用的，记号 $f'(x_0)$，$\left.y'\right|_{x=x_0}$ 多次出现在拉格朗日的文章中，而莱布尼茨则喜欢写作 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}[f(x)]}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

【注】 这里有几点需要说明.

(1) 在考题中，增量 Δx 一般会被命题人广义化为“狗”：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\xlongequal{\text{广义化}}\lim_{\text{狗}\to 0}\frac{f(x_0+\text{狗})-f(x_0)}{\text{狗}}. \tag{4-2}$$

(2) 若在 (4-1) 式中，令 $x_0+\Delta x=x$，则可将导数定义式写成

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{4-3}$$

(4-1)，(4-3) 两式等价，读者将会在各种场合见到这两种等价写法.

(3)下面这三种提法是等价的.

①$y=f(x)$在点 x_0 处可导;

②$y=f(x)$在点 x_0 处导数存在;

③$f'(x_0)=A(A$ 为有限数$)$.

(4)让我们回顾引例中的例子.定义 $u=u(t)$为教室的温度函数,则

$$u'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}$$

表示 u 在 t 时刻的瞬时变化率.再仔细一些,当 t 取为 9:00 时,读者是否想到这样一个问题:对于 9 点整温度的瞬时变化率,这个"瞬时"到底是 **9 点整之前**的瞬时,**还是 9 点整之后**的瞬时呢?请读者放心,这在数学上,是有概念上的完美对应的:

若 $\Delta t<0$,则 $t+\Delta t$ 在 $\Delta t\to 0^-$ 时,表达了 t 时刻之前的瞬时;

若 $\Delta t>0$,则 $t+\Delta t$ 在 $\Delta t\to 0^+$ 时,表达了 t 时刻之后的瞬时.

于是便有了**单侧导数**的概念,

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\xlongequal{记}f'_-(x_0),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\xlongequal{记}f'_+(x_0),$$

这里,$f'_-(x_0)$,$f'_+(x_0)$分别是 $f(x)$在点 x_0 处的**左导数**、**右导数**,统称为**单侧导数**.

我们要说,函数 $f(x)$在点 x_0 处可导的**充分必要条件**是其左导数 $f'_-(x_0)$与右导数 $f'_+(x_0)$均存在且相等,这一点当然是与极限存在的充分必要条件(左、右极限均存在且相等)对应.因为从本质上来说,导数的定义就是一个极限问题.有了上面这些说法,读者就会回答刚才提出的关于引例的更为细致的问题了.

$u'_-(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0^-}\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$表示 t 时刻之前的温度瞬时变化率;

$u'_+(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0^+}\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$表示 t 时刻之后的温度瞬时变化率.

而温度 u 在时刻 t 的瞬时变化率存在的充要条件为 $u'_-(t)=u'_+(t)=A(A$ 为有限数$)$.

下面的例子将从几何上进一步加深我们对导数的理解.

注例 1　研究 $y=f(x)=|x|$在 $x=0$ 处的切线问题.

解　从 $x=0$ 出发,取增量 Δx,有 $\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|\Delta x|$.

当 $\Delta x>0$ 时,$\Delta y=\Delta x$,则 $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1\xlongequal{记}k_+$;

当 $\Delta x<0$ 时,$\Delta y=-\Delta x$,则 $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-1\xlongequal{记}k_-$.

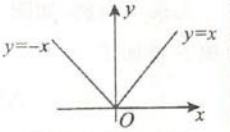


图 4-3

如图 4-3 所示,曲线 $y=f(x)=|x|$在原点 O 处出现了两条**单侧切线**,这两条单侧切线形成了一个角,数学上称这里的原点 O 为一个**角点**.不过,虽然此曲线在角点 O 处有两条单侧切线,但按照前面讲到的 $f(x)$在点 x_0 处可导的充要条件,这里的 $f'_+(0)=k_+\neq k_-=f'_-(0)$,显然 $f'(0)$不存在,所以我们说 $y=f(x)=|x|$在原点 O 处不可导,也就没有切线.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

注例 2 研究 $y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处的切线问题.

解 显然，在 $x=0$ 处 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}$.

当 $\Delta x>0$ 时，$f'_{+}(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^{+}}\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=+\infty$；

当 $\Delta x<0$ 时，$f'_{-}(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^{-}}\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=+\infty$.

这样的结果称为**无穷导数**. 又±∞被叫作广义的数，所以无穷导数在有些数学场合也可被视为导数存在的特殊情形. 不过要强调的是，学习“高等数学”这门课程的读者，还是将无穷导数视为导数不存在为好，因为这是“高等数学”里的“规矩”.

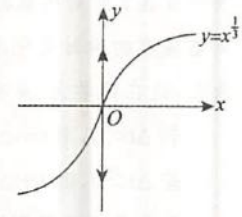


图 4-4

还要指出，如图 4-4 所示，$y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处是有垂直于 x 轴的切线 $x=0$. 我们说，若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处有垂直于 x 轴的切线，则等价于

$$f'(x_0)=+\infty\text{或}-\infty\text{(为无穷导数)},$$

在“高等数学”中，±∞被视为不存在的情形下，读者就不要把“可导”与“光滑”完全对等起来了. 因为这个例子中，显然曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在点 $x=0$ 处有切线，且为“光滑”的，但在这一点处却不可导.

(5)导数的几何意义.

$y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数值 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处切线的斜率 k，即 $k=f'(x_0)$，于是曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$；

法线方程为 $$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)(f'(x_0)\neq 0).$$

(6)高阶导数的概念.

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x},$$

其中 $n\geqslant 2$，为整数，且 $f^{(n-1)}(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，$x_0+\Delta x$ 也在该邻域内.

3. 微分的概念

先说个引例. 如图 4-5 所示，设正方形边长为 x，当其边长增加 Δx 时，它的面积 S 增加了

$$\Delta S=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

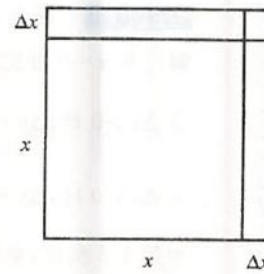


图 4-5

上述面积的增量 ΔS 由两部分组成，一部分是 $2x\Delta x$(图 4-5 中两个小长方形面积)，它是 Δx 的一次项；另一部分是 $(\Delta x)^2$(图 4-5 中右上角小正方形的面积)，它满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=0$，即 $(\Delta x)^2=o(\Delta x)$. 故 $\Delta S=2x\Delta x+o(\Delta x)$，$2x\Delta x$ 为增量的主要部分，$o(\Delta x)$ 为 $\Delta x\to 0$ 时 Δx 的高阶无穷小，是误差，当 Δx 足够小时，有 $\Delta S\approx 2x\Delta x$. 下面给出微分的定义.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且 $x_0+\Delta x$ 在该邻域内，对于函数增量

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

若存在与 Δx 无关的常数 A，使得　　$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，　　(4-4)

其中 $o(\Delta x)$ 是在 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 更高阶的无穷小，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**可微**，并称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**微分**，记作 $\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=A\Delta x$ 或者 $\mathrm{d}[f(x)]\Big|_{x=x_0}=A\Delta x$. 又由于 $\Delta x=1\cdot\Delta x+0$，于是一元函数微分学中规定 $\Delta x=\mathrm{d}x$，故

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=A\mathrm{d}x.\tag{4-5}$$

【注】 (1)可微的判别.

①写增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

②写线性增量 $A\Delta x=f'(x_0)\Delta x$；

③作极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-A\Delta x}{\Delta x}$.

若该极限等于 0，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，否则不可微.

(2)从上述判别步骤可以看出，用形式简单的“线性增量 $A\Delta x$”去代替形式复杂的“增量 Δy”，且其误差“$\Delta y-A\Delta x$”是 $o(\Delta x)$，这就是说，用“简单的量”代替了“复杂的量”，且产生的误差又可以忽略不计，这就是可微的含义.

(3)由于“$f(x)$ 在点 x_0 处可微”与“$f(x)$ 在点 x_0 处可导”互为充要条件，因此判别 $f(x)$ 在点 x_0 处是否可微可以转化为判别其在点 x_0 处是否可导，这样的话考生会比较熟悉.

(4)可微的几何意义.

若 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，则在点 (x_0,y_0) 附近可以用切线段近似代替曲线段，这是可微的几何意义.

(5)图 4-6 可以较好地帮助读者理解以上论述.

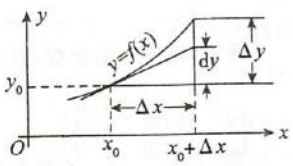


图 4-6

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

二、导数与微分的计算

1. 四则运算

若以下函数均可导，则

和、差的导数(微分)　$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$，　$\mathrm{d}[u(x)\pm v(x)]=\mathrm{d}[u(x)]\pm\mathrm{d}[v(x)]$.

积的导数(微分)　$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$，　$\mathrm{d}[u(x)v(x)]=u(x)\mathrm{d}[v(x)]+v(x)\mathrm{d}[u(x)]$.

【注】　$[u(x)v(x)w(x)]'=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x)$，如果遇到因式超过三个的式子，一般不要直接求导，而要另谋他法，见例 4.9.

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty.$$

$$\text{(vii)}\ (1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\begin{cases}x\in(-1,1), & \text{当 }\alpha\leqslant-1,\\ x\in(-1,1], & \text{当 }-1<\alpha<0,\\ x\in[-1,1], & \text{当 }\alpha>0\text{ 且 }\alpha\notin\mathbf{N}_+,\\ x\in\mathbf{R}, & \text{当 }\alpha\in\mathbf{N}_+.\end{cases}$$

③根据函数展开式的唯一性，比较①，②中$(x-x_0)^n$或x^n的系数，就可以获得$f^{(n)}(x_0)$或者$f^{(n)}(0)$.

需要指出，数学二的考生虽然不考无穷级数，但是却必须要掌握这个内容，因为数学二对于高阶导数的考查频率较高.

【注】 除上述情形，下面两个内容也是很重要的.

(1)由参数方程确定的函数的二阶导数.

设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$确定，其中$t$是参数，且$\varphi(t),\psi(t)$均二阶可导，$\varphi'(t)\neq0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

(2)反函数的二阶导数.

在$y=f(x)$单调，且二阶可导的情况下，若$f'(x)\neq0$，则存在反函数$x=\varphi(y)$，记$f'(x)=y'_x$，$\varphi'(y)=x'_y$，则有

$$y'_x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{x'_y},\quad y''_{xx}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{1}{x'_y}=\frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}.$$

反过来，则有

$$x'_y=\frac{1}{y'_x},\quad x''_{yy}=\frac{-y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

10. 变限积分求导公式

设$F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)\mathrm{d}t$，其中$f(x)$在$[a,b]$上连续，可导函数$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$的值域在$[a,b]$上，则在函数$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$的公共定义域上，有

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)\mathrm{d}t\right]=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

11. 基本求导公式

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$为常数)，$(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq1)$，$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$，$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq1)$，

$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$，$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\tan x)'=\sec^2x$，$(\cot x)'=-\csc^2x$，$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，

微信公众号：djky66
(顶尖考研态上岸)

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

若存在与 Δx 无关的常数 A，使得　　$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$　　(4-4)

其中 $o(\Delta x)$ 是在 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 更高阶的无穷小，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，并称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记作 $\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=A\Delta x$ 或者 $\mathrm{d}[f(x)]\Big|_{x=x_0}=A\Delta x$. 又由于 $\Delta x=1\cdot\Delta x+0$，于是一元函数微分学中规定 $\Delta x=\mathrm{d}x$，故

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=A\mathrm{d}x.\tag{4-5}$$

【注】 (1)可微的判别.

①写增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

②写线性增量 $A\Delta x=f'(x_0)\Delta x$；

③作极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-A\Delta x}{\Delta x}$.

若该极限等于 0，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，否则不可微.

(2)从上述判别步骤可以看出，用形式简单的“线性增量 $A\Delta x$”去代替形式复杂的“增量 Δy”，且其误差“$\Delta y-A\Delta x$”是 $o(\Delta x)$，这就是说，用“简单的量”代替了“复杂的量”，且产生的误差又可以忽略不计，这就是可微的含义.

(3)由于“$f(x)$ 在点 x_0 处可微”与“$f(x)$ 在点 x_0 处可导”互为充要条件，因此判别 $f(x)$ 在点 x_0 处是否可微可以转化为判别其在点 x_0 处是否可导，这样的话考生会比较熟悉.

(4)可微的几何意义.

若 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，则在点 (x_0,y_0) 附近可以用切线段近似代替曲线段，这是可微的几何意义.

(5)图 4-6 可以较好地帮助读者理解以上论述.

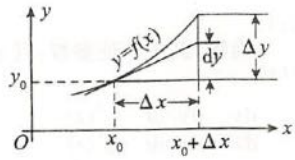


图 4-6

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

二、导数与微分的计算

1. 四则运算

若以下函数均可导，则

和、差的导数(微分)　$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$，　$\mathrm{d}[u(x)\pm v(x)]=\mathrm{d}[u(x)]\pm\mathrm{d}[v(x)]$.

积的导数(微分)　$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$，　$\mathrm{d}[u(x)v(x)]=u(x)\mathrm{d}[v(x)]+v(x)\mathrm{d}[u(x)]$.

【注】　$[u(x)v(x)w(x)]'=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x)$，如果遇到因式超过三个的式子，一般不要直接求导，而要另谋他法，见例 4.9.

商的导数(微分) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$，$v(x)\neq 0$，

$$\mathrm{d}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\frac{v(x)\mathrm{d}[u(x)]-u(x)\mathrm{d}[v(x)]}{[v(x)]^2},v(x)\neq 0.$$

2. 分段函数的导数

设 $f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\geqslant x_0,\\ f_2(x), & x<x_0,\end{cases}$ 其中 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 可导，则①在分段点 x_0 处用导数定义求导：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f_2(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 根据 $f'_+(x_0)\overset{?}{=\!=}f'_-(x_0)$ 来判定 $f'(x_0)$；②在非分段点用导数公式求导，即 $x>x_0$ 时，$f'(x)=f'_1(x)$；$x<x_0$ 时，$f'(x)=f'_2(x)$.

3. 复合函数的导数与微分形式不变性

设 $u=g(x)$ 在点 x(没有下标是泛指的点，下同)处可导，$y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 处可导，则

$$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]g'(x),$$

$$\mathrm{d}\{f[g(x)]\}=f'[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x=f'[g(x)]\mathrm{d}[g(x)]. \tag{4-6}$$

(4-6)式就是微分形式的不变性——无论 u 是中间变量还是自变量，$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 都成立.

微信公众号：shuxy66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 $\{f[g(x)]\}'=\dfrac{\mathrm{d}\{f[g(x)]\}}{\mathrm{d}x}$，而 $f'[g(x)]=\dfrac{\mathrm{d}\{f[g(x)]\}}{\mathrm{d}[g(x)]}$，要看清楚求导符号的位置，不要弄错了.

4. 反函数的导数

设 $y=f(x)$ 可导，且 $f'(x)\neq 0$，则存在反函数 $x=\varphi(y)$，且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$，即 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

5. 参数方程所确定的函数的导数

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定，其中 t 是参数，且 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 均对 t 可导，$\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

6. 隐函数求导法

设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的可导函数，则

①方程 $F(x,y)=0$ 两边对自变量 x 求导，注意 $y=y(x)$，即将 y 看作中间变量，得到一个关于 y' 的方程；

②解该方程便可求出 y'.

7. 对数求导法

对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子，一般先取对数再求导. 设 $y=f(x)(f(x)>0)$，则

①等式两边取对数，得 $\ln y=\ln f(x)$；

②两边对自变量 x 求导(同样注意 $y=f(x)$，即将 y 看作中间变量)，得

$$\frac{1}{y}y'=[\ln f(x)]'\Rightarrow y'=\frac{yf'(x)}{f(x)}.$$

8. 幂指函数求导法

对于 $u(x)^{v(x)}(u(x)>0$，且 $u(x)$ 不恒为 1)，除了用上面的对数求导法外，还可以先化成指数函数

$$u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)},$$

然后求导，得

$$[u(x)^{v(x)}]'=[e^{v(x)\ln u(x)}]'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

9. 高阶导数

求高阶导数主要有三种方法.

(1)用归纳法.

逐次求导，探索规律，得出通式.

比如，设 $y=2^x$，则

$$y'=2^x\ln 2,\quad y''=2^x(\ln 2)^2,\quad \cdots.$$

得出通式

$$y^{(n)}=2^x(\ln 2)^n,n=0,1,2,\cdots.$$

(2)用高阶求导公式.

设 $u=u(x),v=v(x)$，均 n 阶可导，则

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}.\tag{4-7}$$

(4-7)式就是求函数乘积的高阶导数的**莱布尼茨公式**，其中 $u^{(0)}=u,v^{(0)}=v$.

见到两个函数乘积的高阶导数，一般用莱布尼茨公式即可.

(3)用泰勒公式.

先写出 $y=f(x)$ 的泰勒公式或者麦克劳林公式，再通过比较系数来获得 $f^{(n)}(x_0)$. 具体说来，一般步骤如下.

① 任何一个无穷阶可导的函数(在收敛的条件下)都可写成 $y=f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，

或者

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

②题目给出一个具体的无穷阶可导函数 $y=f(x)$，可以通过已知公式展开成幂级数. 这些已知公式为

(ⅰ) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.$

(ⅱ) $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,-1<x<1.$

(ⅲ) $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,-1<x<1.$

(ⅳ) $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots,-1<x\leqslant 1.$

(ⅴ) $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.$$

(ⅵ) $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty.$$

$$\text{(vii)}\ (1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\begin{cases}x\in(-1,1), & \text{当}\ \alpha\leqslant-1,\\ x\in(-1,1], & \text{当}-1<\alpha<0,\\ x\in[-1,1], & \text{当}\ \alpha>0\ \text{且}\ \alpha\notin\mathbf{N}_+,\\ x\in\mathbf{R}, & \text{当}\ \alpha\in\mathbf{N}_+.\end{cases}$$

③根据函数展开式的唯一性，比较①，②中$(x-x_0)^n$或x^n的系数，就可以获得$f^{(n)}(x_0)$或者$f^{(n)}(0)$.

需要指出，数学二的考生虽然不考无穷级数，但是却必须要掌握这个内容，因为数学二对于高阶导数的考查频率较高.

【注】 除上述情形，下面两个内容也是很重要的.

(1)由参数方程确定的函数的二阶导数.

设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$确定，其中$t$是参数，且$\varphi(t),\psi(t)$均二阶可导，$\varphi'(t)\neq0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

(2)反函数的二阶导数.

在$y=f(x)$单调，且二阶可导的情况下，若$f'(x)\neq0$，则存在反函数$x=\varphi(y)$，记$f'(x)=y'_x$，$\varphi'(y)=x'_y$，则有

$$y'_x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{x'_y},\quad y''_{xx}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{1}{x'_y}=\frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}.$$

反过来，则有

$$x'_y=\frac{1}{y'_x},\quad x''_{yy}=\frac{-y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

10. 变限积分求导公式

设$F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)\,\mathrm{d}t$，其中$f(x)$在$[a,b]$上连续，可导函数$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$的值域在$[a,b]$上，则在函数$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$的公共定义域上，有

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)\,\mathrm{d}t\right]=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

11. 基本求导公式

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$为常数)，$(a^x)'=a^x\ln a\,(a>0,a\neq1)$，$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$，$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\,(a>0,a\neq1)$，

$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$，$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\tan x)'=\sec^2x$，$(\cot x)'=-\csc^2x$，$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，

微信公众号：djky66
(顶尖考研悦读工作室)

$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$，　$(\sec x)'=\sec x\tan x$，　$(\csc x)'=-\csc x\cot x$，

$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，　$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

基础例题精解

一、概念

例 4.1　设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-f(x^3)}{x^3}=$(　　).

(A)$-2f'(0)$　　(B)$-f'(0)$　　(C)$f'(0)$　　(D)0

解　应选(D).

由选项可以得到启示，只需将所给极限转化为导数定义的形式.

由于 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{f(x^3)}{x^3}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\right]=f'(0)-f'(0)=0.$$

故选(D).

例 4.2　设函数 $y=f(x)$在 $x=0$ 处可导，$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}xf\left(\dfrac{1}{2x+3}\right)=1$，则 $f'(0)=$(　　).

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)5

解　应选(A).

函数为抽象函数，已知 $y=f(x)$在 $x=0$ 处可导，可考虑将极限转化为 $f(x)$在点 $x=0$ 极限形式的导数定义.

设 $t=\dfrac{1}{2x+3}$，则当 $x\to\infty$时，$t\to 0$，且可解得$\dfrac{1}{x}=\dfrac{2t}{1-3t}$，因此

$$\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{2x+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{2x+3}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{\frac{2t}{1-3t}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot\frac{1-3t}{2}=\frac{1}{2}f'(0)=1,$$

从而 $f'(0)=2$. 故选(A).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 4.3　设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，则下列命题错误的是(　　).

(A)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在，则 $f(0)=0$

(B)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，则 $f(0)=0$

(C)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在，则 $f'(0)$存在

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(D)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$存在，则$f'(0)$存在

解 应选(D).

对于选项(A)，(C)，事实上有如下命题：设$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$存在，则

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0,\quad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A,$$

故(A)，(C)均正确.

对于选项(B)，由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，则$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=0$，即$2f(0)=0$，故$f(0)=0$，(B)正确.

对于选项(D)，可取反例$f(x)=|x|$，则$f(x)$在$x=0$处连续，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0$$

存在，但是$f(x)$在$x=0$处不可导，故选择(D).

例 4.4 证明：(1)若$f(x)$是可导的偶函数，则$f'(x)$是奇函数；

(2)若$f(x)$是可导的奇函数，则$f'(x)$是偶函数.

证明 (1)设x是定义域中任意指定的一点(也叫泛指的点)，由导数定义，得

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=(-1)\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x),$$

故$f'(x)$是奇函数.

(2)同理可证，若$f(x)$是可导的奇函数，则$f'(x)$是偶函数.

例 4.5 证明：若$f(x)$是可导的周期为T的周期函数，则$f'(x)$也是以T为周期的周期函数.

证明 由导数定义，得

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}$$

$$\xlongequal{f(x+T)=f(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=f'(x).$$

故$f'(x)$也是以T为周期的周期函数.

例 4.6 设$f(x)$是二阶可导的以2为周期的奇函数，且$f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，记$M=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$N=f'\left(\dfrac{3}{2}\right)$，$K=f''(0)$.则(　　).

(A)$M<N<K$　　(B)$M>N>K$　　(C)$M<K<N$　　(D)$M>K>N$

解 应选(C).

由$f(x)$为奇函数，则$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$.根据例4.4(2)，知$f'(x)$为偶函数，再用一次例4.4(1)的结论，则$f''(x)$为奇函数(事实上，若$f(x)$无穷阶可导，则求导一次，奇偶性即互换一次)，由$f''(x)$存在，故$f''(0)=0$.

又$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，由例4.5的结论，知$f'(x)$也是以2为周期的周期函数，则$f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=f'\left(\dfrac{3}{2}-2\right)=$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$，故 $f\left(-\frac{1}{2}\right)<f''(0)<f'\left(\frac{3}{2}\right)$，即 $M<K<N$，选(C).

例 4.7 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$. 当自变量有增量 Δx 时，函数 $y=f(x)$ 的增量为 Δy，则极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$ 为(　　).

(A)-1　　(B)0　　(C)1　　(D)2

解 应选(B).

题目给出 $f(x)$ 在 x_0 处可导，考查 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$，注意，如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则必定可微分. 因此可以由微分的性质入手.

由微分的定义可知 $\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x)$，而 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$.

由题设知 $f'(x_0)\neq 0$，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{f'(x_0)}\cdot\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0,$$

故选(B).

例 4.8 设函数 $f(u)$ 可导，且 $y=f(x^2)$，当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$(　　).

(A)-1　　(B)0.1　　(C)0.5　　(D)1

解 应选(C).

本题依然是考查微分的定义. 函数的微分是函数增量的线性主部，且 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=y'\Delta x$，而

$$\mathrm{d}y=f'(x^2)\mathrm{d}(x^2)=2xf'(x^2)\mathrm{d}x=2xf'(x^2)\Delta x,$$

因此，由 $0.1=-2f'(1)\cdot(-0.1)$，可得 $f'(1)=0.5$，故选(C).

二、计算

例 4.9 设 $f(x)=\prod\limits_{n=1}^{100}\left(\tan\frac{\pi x^n}{4}-n\right)$，则 $f'(1)=$_____.

解 应填 $-\frac{\pi\cdot 99!}{2}$.

本题考查一元函数微分学的基本计算，是一道比较新颖的试题.

本题的研究对象 $f(x)$ 是多因式相乘，如果直接对其使用导数定义或者先求导再代值，都比较麻烦. 本题希望考生发现，当把 $x=1$ 代入每个因式后，只有第一项 $\tan\frac{\pi}{4}-1=0$，而其余所有项都不等于 0，抓住第一项这个“特立独行”的主要条件，记 $g(x)=\prod\limits_{n=2}^{100}\left(\tan\frac{\pi x^n}{4}-n\right)$，于是

$$f(x)=\left(\tan\frac{\pi x}{4}-1\right)\cdot g(x),$$

故

$$f'(1)=\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi x}{4}\Big|_{x=1}\cdot g(1)=-\frac{\pi\cdot 99!}{2}$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 4.10 设 $y=\ln|x|, x\neq 0$，求 y'.

解
$$y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ \ln(-x), & x<0.\end{cases}$$

当 $x>0$ 时，
$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x};$$

当 $x<0$ 时，
$$y'=[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}.$$

因此
$$y'=(\ln|x|)'=\frac{1}{x}(x\neq 0).$$

【注】 $\ln|x|$ 求导时，可视“绝对值符号”而不见.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 4.11 设函数
$$f(x)=\begin{cases}e^{ax}, & x\leqslant 0,\\ b(1-x^2), & x>0\end{cases}$$
在 $x=0$ 处可导，则 a 与 b 的值分别为(　　).

(A) $a=0,b=0$　　(B) $a=1,b=0$　　(C) $a=0,b=1$　　(D) $a=1,b=1$

解 应选(C).

所给函数 $f(x)$ 为分段函数，$x=0$ 为其分段点，题设条件为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，可以考虑由左导数与右导数定义求解，但是如果利用函数在某点可导则必定连续的性质，可以简化运算.

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处必定连续，
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}e^{ax}=1,$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}b(1-x^2)=b.$$
$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必定存在极限，从而有 $b=1$. 因此
$$f(x)=\begin{cases}e^{ax}, & x\leqslant 0,\\ 1-x^2, & x>0.\end{cases}$$

由于
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a,$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x^2-1}{x}=0,$$
又 $f'_-(0)=f'_+(0)$，因此 $a=0$. 故选(C).

例 4.12 求函数 $f(x)=2^{|x-a|}$ 的导数.

解 因为
$$f(x)=\begin{cases}2^{-(x-a)}, & x<a,\\ 1, & x=a,\\ 2^{x-a}, & x>a,\end{cases}$$
所以，当 $x<a$ 时，

$$f'(x)=[2^{-(x-a)}]'=-2^{a-x}\ln 2,$$

当 $x>a$ 时，

$$f'(x)=(2^{x-a})'=2^{x-a}\ln 2,$$

当 $x=a$ 时，由于

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{2^{-(x-a)}-1}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a^-}\frac{-(x-a)\ln 2}{x-a}=-\ln 2,$$

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{2^{x-a}-1}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)\ln 2}{x-a}=\ln 2,$$

因此 $f'_-(a)\neq f'_+(a)$，故 $f'(a)$ 不存在.

因此

$$f'(x)=\begin{cases}-2^{a-x}\ln 2, & x<a,\\ 2^{x-a}\ln 2, & x>a.\end{cases}$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 4.13 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})(a\neq 0)$，求 $y'\big|_{x=0}$.

解 因为

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot(x+\sqrt{x^2+a^2})'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot(x^2+a^2)'\right]$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

所以

$$y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\Big|_{x=0}=\frac{1}{|a|}(a\neq 0).$$

例 4.14 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ 且 $y=f[f(x)]$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\mathrm{e}}=$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

解 应填 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\mathrm{e}}=f'[f(x)]f'(x)\Big|_{x=\mathrm{e}}=f'[f(\mathrm{e})]f'(\mathrm{e}),$$

其中 $f(\mathrm{e})=\ln\sqrt{x}\Big|_{x=\mathrm{e}}=\dfrac{1}{2}$，$f'[f(\mathrm{e})]=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=(2x-1)'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2$，$f'(\mathrm{e})=(\ln\sqrt{x})'\Big|_{x=\mathrm{e}}=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$，

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\mathrm{e}}=2\cdot\frac{1}{2\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 4.15 设 $y=\mathrm{e}^{\sin(\ln x)}$，求 $\mathrm{d}y$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 由一阶微分形式的不变性，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[\mathrm{e}^{\sin(\ln x)}] &= \mathrm{e}^{\sin(\ln x)}\mathrm{d}[\sin(\ln x)]\\ &= \mathrm{e}^{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)\\ &= \mathrm{e}^{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)\frac{1}{x}.$$

例 4.16 求下列函数的导数.

(1) $y=\arcsin x, -1<x<1$;

(2) $y=\arctan x$.

解 (1) 由 $y=\arcsin x$,得反函数 $x=\sin y, y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. 根据反函数求导公式,得

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1<x<1).$$

(2) 由 $y=\arctan x$,得反函数 $x=\tan y, y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. 根据反函数求导公式,得

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 类似地,可以求得 $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

例 4.17 设 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=\varphi(y)$,且 $f(x)=\int_1^{2x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+1$,则 $\varphi''(1)=$_____.

解 应填 $-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

由题设可得

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)},$$

$$\varphi''(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$

由 $f(x)=\int_1^{2x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+1$ 知,$x=\frac{1}{2}$ 时 $y=1$,且

$$f'(x)=2\mathrm{e}^{4x^2},\quad f''(x)=16x\mathrm{e}^{4x^2},$$

则

$$\varphi''(1)=-\frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{\left[f'\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}=-\frac{8\mathrm{e}}{8\mathrm{e}^3}=-\frac{1}{\mathrm{e}^2}.$$

例 4.18 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$ 确定,则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$_____.

解 应填 $\sqrt{2}$.

因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos t},$$

所以 $$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.$$

例 4.19　设 $y=y(x)$ 是由方程 $\sin(xy)=\ln\frac{x+\mathrm{e}}{y}+1$ 确定的隐函数，求 $y'(0)$ 的值.

解　在方程中令 $x=0$ 可得 $0=\ln\frac{\mathrm{e}}{y(0)}+1$，故 $y(0)=\mathrm{e}^2$. 将方程两边对 x 求导，得

$$\cos(xy)(y+xy')=\frac{1}{x+\mathrm{e}}-\frac{y'}{y}.$$

将 $x=0, y(0)=\mathrm{e}^2$ 代入，有 $\mathrm{e}^2=\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{y'(0)}{\mathrm{e}^2}$，即 $y'(0)=\mathrm{e}-\mathrm{e}^4$.

例 4.20　设 $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^3}$，则 $\left.y'\right|_{x=2}=$(　　).

(A)$\frac{13}{36}$　　(B)$\frac{11}{36}$　　(C)$\frac{7}{36}$　　(D)$-\frac{13}{36}$

解　应选(D).

所给函数为连乘除形式，应先利用对数性质将函数变形，即利用对数求导法.

由于要求的是 $x=2$ 时函数 $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^3}$ 的导数值，故只在 $x=2$ 的邻域内展开讨论，方程两端取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+2)+4\ln(3-x)-3\ln(x+1),$$

方程两端对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2(x+2)}\cdot(x+2)'+\frac{4}{3-x}\cdot(3-x)'-\frac{3}{x+1}\cdot(x+1)',$$

$$y'=y\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{3}{x+1}\right],$$

从而 $$\left.y'\right|_{x=2}=\left.y\right|_{x=2}\cdot\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{3}{x+1}\right]\Big|_{x=2}=-\frac{13}{36}.$$

故选(D).

例 4.21　求函数 $y=x^x(x>0)$ 的导数.

解　两边取对数得

$$\ln y=x\ln x.$$

两边关于变量 x 求导，将 y 看作是中间变量，得

$$\frac{1}{y}y'=\ln x+1,$$

所以 $y'=x^x(\ln x+1)(x>0)$.

例 4.22　求函数 $y=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$ 的导数.

解　两边取对数得

$$\ln y=\frac{\ln x}{x}.$$

两边关于变量 x 求导，将 y 看作是中间变量，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

所以 $y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)(x>0)$.

例 4.23 求 $y=\dfrac{1}{x}$ 的 n 阶导数.

解
$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=(-1)x^{-2},$$
$$y''=[(-1)x^{-2}]'=(-1)\cdot(-2)x^{-3},$$
$$y'''=[(-1)\cdot(-2)x^{-3}]'=(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)x^{-4},$$

于是
$$y^{(n)}=(-1)\cdot(-2)\cdot\cdots\cdot(-n)x^{-n-1},$$

即
$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\,x^{-n-1}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}},n=1,2,\cdots.$$

【注】 由此可得 $\ln x$ 的 n 阶导数公式. 因为 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, 所以
$$(\ln x)^{(n)}=[(\ln x)']^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},n=2,3,\cdots.$$

微信公众号djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 4.24 求 $y=\sin x$ 的 n 阶导数.

解
$$y'=(\sin x)'=\cos x,$$
$$y''=(\cos x)'=-\sin x,$$
$$y'''=(-\sin x)'=-\cos x,$$
$$\cdots\cdots$$

但这样算下去,很难找到规律. 想到 $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则有
$$y'=(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'''=\left[\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

于是
$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

即
$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),n=1,2,\cdots.$$

【注】 按此方法,我们可以得出几个重要的公式:

$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n(a>0,a\neq1)$; $(e^x)^{(n)}=e^x$; $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$;

$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$; $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}(x>0)$;

$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}(x>-1)$;

$[(x+x_0)^m]^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$；　$\left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

读者若能记住这些式子，那是最好；若记不住，学会推导的方式，在考试中快速计算出来，也是可以的.

例 4.25　已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，求 $f^{(n)}(x)$，其中 n 为正整数.

解　$f'(x)=[f(x)]^2$ 两边同时对 x 求导，得

$$f''(x)=2f(x)f'(x)=2[f(x)]^3,$$

$$f'''(x)=2\cdot 3[f(x)]^2\cdot f'(x)=2\cdot 3[f(x)]^4,$$

$$f^{(4)}(x)=2\cdot 3\cdot 4[f(x)]^3\cdot f'(x)=2\cdot 3\cdot 4[f(x)]^5,$$

于是得到

$$f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}.$$

【注】　可用数学归纳法严格证明，但考试中不必给出.

设 $n=k$ 时，有 $f^{(k)}(x)=k![f(x)]^{k+1}$，则 $n=k+1$ 时，将上式两边再对 x 求导，有

$$f^{(k+1)}(x)=(k+1)\cdot k![f(x)]^k f'(x)=(k+1)![f(x)]^{k+2},$$

故对正整数 n，有 $f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$.

例 4.26　设 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $y^{(n)}(0)=$（　　）.

(A)$(-1)^n 2\cdot n!$　　(B)$-2^n\cdot n!$　　(C)$2^n\cdot(n-1)!$　　(D)$-2^n\cdot(n-1)!$

解　应选(A).

本题考核的知识点是高阶导数运算. 求高阶导数的关键在于将 y,y',y'' 恒等变形，简化运算以寻找规律.

由于

$$y=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}=2(1+x)^{-1}-1,$$

$$y'=2\cdot(-1)\cdot(1+x)^{-2},$$

$$y''=2\cdot(-1)\cdot(-2)(1+x)^{-3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=(-1)^n 2\cdot n!\ (1+x)^{-(n+1)},$$

因此

$$y^{(n)}(0)=(-1)^n 2\cdot n!.$$

故选(A).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 4.27　设 $y=x^3\sin x$，求 $y^{(6)}(0)$.

解　严格按照“基础内容精讲”中所述的三个步骤来解题.

①由于 $y=x^3\sin x$ 无穷阶可导，则可以先将其抽象展开为 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$；

②又由于 $y=x^3\sin x=x^3\left(x-\dfrac{1}{6}x^3+\cdots\right)=x^4-\dfrac{1}{6}x^6+\cdots$；

③根据函数展开式的唯一性，比较①，②中公式的系数，则 $\dfrac{y^{(6)}(0)}{6!}=-\dfrac{1}{6}$，于是

$$y^{(6)}(0)=-\frac{6!}{6}=-120.$$

基础习题精练

习题

4.1 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}=1$，则（　　）.

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　　(B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

4.2 设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的（　　）.

(A) 充分必要条件　　(B) 充分但非必要条件

(C) 必要但非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

微信公众号：dky66
(顶尖考研祝您上岸)

4.3 设 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上有定义，$f(0)=1$，且满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0,$$

证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

4.4 设 $y=f(\ln^2 x)\mathrm{e}^{f'(x)}$，其中 f 可微，计算 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4.5 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内具有任意阶导数，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，$f(2)=1$，计算 $f^{(n)}(2)$，其中 n 为正整数.

4.6 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=x\ln y$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4.7 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$_____.

4.8 已知 $f'(x)=A\mathrm{e}^x$（A 为正常数），求 $f(x)$ 的反函数的二阶导数.

4.9 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{\pi}{x}, & x<0,\\ A, & x=0,\\ ax^2+b, & x>0,\end{cases}$ 求常数 A,a,b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

4.10 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)+1,\\ y=2\arctan t-(t+1)^2\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

4.11 设 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\sqrt{\cos x})}{\ln(1-x\sin x)}$.

解答

4.1 (C)　**解**　因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)=0$，即 $f(0)=0$. 从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}\xlongequal{t=x^2}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'_+(0),$$

应选(C).

4.2 (A)　**解**　由 $\varphi(1)=0$ 可知

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^3-1|\varphi(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x^2+x+1)\varphi(x)=0,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^3-1|\varphi(x)}{x-1}=-\lim_{x\to 1^-}(x^2+x+1)\varphi(x)=0,$$

即 $f'_+(1)=f'_-(1)=0$，所以 $f'(1)=0$.

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，因为 $f(1)=0$，所以

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^3-1|\varphi(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x^2+x+1)\varphi(x)=3\varphi(1),$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^3-1|\varphi(x)}{x-1}=-\lim_{x\to 1^-}(x^2+x+1)\varphi(x)=-3\varphi(1),$$

由 $f'_+(1)=f'_-(1)$ 可得，$3\varphi(1)=-3\varphi(1)$，故 $\varphi(1)=0$，应选(A).

4.3　**证明**　使用泰勒公式，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x-\frac{1}{2}\cdot 4x^2+o(x^2)+2xf(x)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}-2+0=0,$$

于是极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$，即为 $f'(0)$，于是函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=1$.

4.4　**解**

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=[f(\ln^2 x)]'\cdot \mathrm{e}^{f'(x)}+f(\ln^2 x)\cdot[\mathrm{e}^{f'(x)}]'\\&=f'(\ln^2 x)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot \mathrm{e}^{f'(x)}+f(\ln^2 x)\cdot \mathrm{e}^{f'(x)}\cdot 2f(x)\cdot f'(x)\\&=2\mathrm{e}^{f'(x)}\left[\frac{\ln x}{x}\cdot f'(\ln^2 x)+f(\ln^2 x)\cdot f(x)\cdot f'(x)\right].\end{aligned}$$

4.5　**解**　对 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$ 两边关于 x 求导，得

$$f''(x)=\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x)=\mathrm{e}^{2f(x)},$$

两边再对 x 求导，得

$$f'''(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}\cdot 2f'(x)=2!\,\mathrm{e}^{3f(x)},$$

两边再对 x 求导，得

$$f^{(4)}(x)=2\mathrm{e}^{3f(x)}\cdot 3f'(x)=3!\,\mathrm{e}^{4f(x)}.$$

由以上导数规律可得

$$f^{(n)}(x)=(n-1)!\,\mathrm{e}^{nf(x)},$$

所以

$$f^{(n)}(2)=(n-1)!\,\mathrm{e}^{n}.$$

4.6　**解**　方程两边同时对 x 求导，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\ln y+x\cdot\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y\ln y}{y-x}$.

4.7　$-\dfrac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$　**解**　方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^{y}\ln 29$ 两端取对数，得 $\ln x+f(y)=y+\ln(\ln 29)$.

两端关于 x 求导，得 $\dfrac{1}{x}+f'(y)\cdot y'=y'$，两端继续关于 x 求导，得 $-\dfrac{1}{x^2}+f''(y)\cdot(y')^2+f'(y)\cdot y''=y''$，由

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

此可得 $y''=-\dfrac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

4.8 解 设 $y=f(x)$,则

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy}=\frac{d\left[\frac{1}{f'(x)}\right]}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}$$

$$=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}=-\frac{Ae^x}{(Ae^x)^3}=-\frac{1}{A^2e^{2x}}.$$

4.9 解 由可导与连续的关系有

$$\lim_{x\to0^-}x^2\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to0^+}(ax^2+b)=A,$$

所以 $A=b=0$.

又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{\pi}{x}-0}{x-0}=0$, $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{ax^2-0}{x-0}=0$,

所以 a 可以为任意常数,且 $f'(0)=0$.

微信公众号 djky66
(顶尖考研祝你上岸)

4.10 解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2}{1+t^2}-2(t+1)}{\frac{2t}{1+t^2}}=-(t^2+t+1),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\left[-\frac{4t}{(1+t^2)^2}-2\right]-\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}\cdot\left[\frac{2}{1+t^2}-2(t+1)\right]}{\frac{8t^3}{(1+t^2)^3}}$$

$$=-\frac{(1+2t)(1+t^2)}{2t},$$

或

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}[-(t^2+t+1)]\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}[-(t^2+t+1)]}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{(1+2t)(1+t^2)}{2t}.$$

4.11 解

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{f(1-\sqrt{\cos x})-f(0)}{(1-\sqrt{\cos x})-0}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\ln(1-x\sin x)}$$

$$=f'(0)\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\ln(1-x\sin x)}$$

$$\xlongequal{\text{等价无穷小替换}}f'(0)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{-x\sin x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$=-\frac{1}{2}f'(0)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=-\frac{1}{4}f'(0).$$

第5讲 一元函数微分学的几何应用

基础知识结构

- 极值与最值的概念
  - 极值
  - 最值
- 单调性与极值的判别
  - 单调性判别
  - 判极值的必要条件
  - 判极值的第一充分条件
  - 判极值的第二充分条件
  - 判极值的第三充分条件
- 凹凸性与拐点的概念
  - 凹凸性
  - 拐点
- 凹凸性与拐点的判别
  - 凹凸性判别
  - 判拐点的必要条件
  - 判拐点的第一充分条件
  - 判拐点的第二充分条件
  - 判拐点的第三充分条件
- 渐近线
  - 铅垂渐近线
  - 水平渐近线
  - 斜渐近线
- 最值或取值范围
  - 在闭区间$[a, b]$上求
  - 在开区间(a, b)内求
- 作函数图形

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

基础内容精讲

一、极值与最值的概念

定义 1 若存在 x_0 的某个邻域，使得在该邻域内任意一点 x，均有

$$f(x) \leqslant f(x_0)(\text{或 } f(x) \geqslant f(x_0))$$

成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**广义的极大值点(或极小值点)**，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**广义的极大值(或极小值)**.

定义 2 若存在 x_0 的某个去心邻域，使得对于该邻域内任一异于 x_0 的点 x，均有

$$f(x) < f(x_0)(\text{或 } f(x) > f(x_0))$$

成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**真正的极大值点(或极小值点)**，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**真正的极大值(或极小值)**.

【注】 若在上述定义 2 中把去心邻域改为邻域，则当然有 $f(x) \leqslant f(x_0)$，但这个等号指的是仅在 $x = x_0$ 处取到，这一点是与定义 1(广义的极值)的一个主要区别，请注意区分.

微信公众号：dlky88
(顶尖考研陪您上岸)

定义 3 设 x_0 为 $f(x)$ 定义域内一点，若对于 $f(x)$ 的定义域内任意一点 x，均有

$$f(x) \leqslant f(x_0)(\text{或 } f(x) \geqslant f(x_0))$$

成立，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**广义的最大值(或最小值)**.

定义 4 设 x_0 为 $f(x)$ 定义域内一点，若对于 $f(x)$ 的定义域内任一异于 x_0 的点 x，均有

$$f(x) < f(x_0)(\text{或 } f(x) > f(x_0))$$

成立，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**真正的最大值(或最小值)**.

【注 1】 通俗来讲，带着等号的，如 $f(x) \geqslant f(x_0)$，称点 x_0 为 $f(x)$ 的广义的极值点或最值点；不带等号的，如 $f(x) > f(x_0)$，称点 x_0 为 $f(x)$ 的真正的极值点或最值点. 一般教材中用“广义”的较多，读者在读书中应注意鉴别.

【注 2】 极值和最值是什么关系？我们通过两个例子来看.

设 $f(x)=e^x, x\in[0,+\infty)$. $f(0)=e^0=1$ 为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内的最小值：$f(x)\geqslant f(0)$. 但 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内没有极值. 细致说来，首先，$x=0$ 不存在哪种邻域 $U(0)$，使 $x\in U(0)$ 时，$f(x)\geqslant f(0)$，因为 $x=0$ 的左半邻域已超出 $f(x)$ 的定义域. 其次，对于 $(0,+\infty)$ 内的任意 x_0，不论 $U(x_0)$ 取得多么小，对于 $x\in U(x_0)$，并不总有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，所以此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内无极小值，易见也无极大值. 所以，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内无极值.

设 $f(x)=3x-x^3$，有

$$f'(x)=3(1-x^2),\quad f''(x)=-6x,\quad f'(\pm1)=0,\quad f''(\pm1)=\mp6,$$

所以 $f(1)=2$ 为极大值，$f(-1)=-2$ 为极小值. 但该 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无最大值，也无最小值.

由此可见，极值点并不一定是最值点，最值点也不一定是极值点.

但是，下面这个结论是正确的：

如果 $f(x)$在区间 I 上有最值点 x_0，并且此最值点 x_0不是区间 I 的端点而是 I 内部的点，那么此 x_0必是 $f(x)$的一个极值点.

事实上，设$f(x_0)$为 $f(x)$在 I 上的最大值，则对一切 $x\in I$，有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，又因为 x_0为 I 内部的点，故存在一个邻域 $U(x_0)\subset I$，当 $x\in U(x_0)$时，$f(x)\leqslant f(x_0)$. 按极大值的定义，$f(x_0)$为 $f(x)$的一个极大值.

【注 3】 结合第 3 讲的知识，一个常见的问题是：间断点可以是极值点吗？答案是肯定的. 举四个例子供考生分析.

(1) $f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ |x|, & x\neq 0,\end{cases}$ $x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点，但它是 $f(x)$的极大值点.

(2) $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $x=0$ 是 $f(x)$的跳跃间断点，但它是 $f(x)$的极小值点.

(3) $f(x)=\begin{cases}-1, & x=0,\\ \dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\end{cases}$ $x=0$ 是 $f(x)$的无穷间断点，但它是 $f(x)$的极小值点.

(4) $f(x)=\begin{cases}2, & x=0,\\ \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$ $x=0$ 是 $f(x)$的振荡间断点，但它是 $f(x)$的极大值点.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

二、单调性与极值的判别

1. 单调性的判别

用导数工具. 若 $y=f(x)$在区间 I 上有 $f'(x)>0$，则 $y=f(x)$在 I 上严格**单调增加**；相应地，若 $y=f(x)$在区间 I 上有 $f'(x)<0$，则 $y=f(x)$在 I 上严格**单调减少**.

2. 一阶可导点是极值点的必要条件

设 $f(x)$在 $x=x_0$处可导，且在点 x_0处取得极值，则必有 $f'(x_0)=0$.

3. 判别极值的第一充分条件

设 $f(x)$在 $x=x_0$处连续，且在 x_0的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)(\delta>0)$内可导.

①若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$在 $x=x_0$处取得**极小值**；

②若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$在 $x=x_0$处取得**极大值**；

③若 $f'(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$和$(x_0,x_0+\delta)$内不变号，则点 x_0不是极值点.

4. 判别极值的第二充分条件

设 $f(x)$在 $x=x_0$处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$.

①若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$在 x_0处取得**极大值**；②若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$在 x_0处取得**极小值**.

上述第二充分条件可以推广为第三充分条件.

5. 判别极值的第三充分条件

设 $f(x)$在 x_0处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 2)$，则

①当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得**极大值**；

②当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得**极小值**.

【注】 上述第三充分条件的证明如下：由于 n 为偶数，令 $n=2k$，构造极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2k}}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{2k(x-x_0)^{2k-1}}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\cdots\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k)!(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(2k-1)}(x)-f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k)!(x-x_0)}=\frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(x_0)\neq 0.$$

上述洛必达法则成立的依据是，最后的结果 $\frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(x_0)$ 是存在的.

当 $f^{(2k)}(x_0)<0$ 时，由函数极限的局部保号性知，存在 x_0 的某去心邻域，对于该邻域内的任意 x，有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2k}}<0$，$f(x)<f(x_0)$，故 x_0 为极大值点；

当 $f^{(2k)}(x_0)>0$ 时，由函数极限的局部保号性知，存在 x_0 的某去心邻域，对于该邻域内的任意 x，有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2k}}>0$，$f(x)>f(x_0)$，故 x_0 为极小值点.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

三、凹凸性与拐点的概念

1. 凹凸性的定义

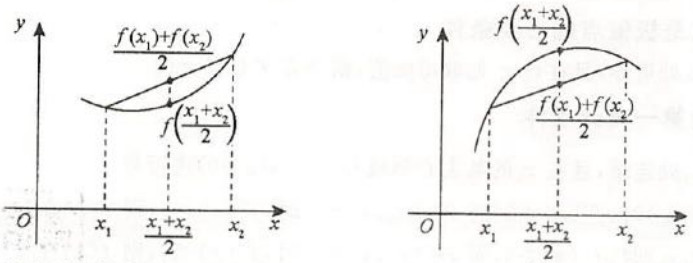
设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续. 如果对 I 上任意不同两点 x_1,x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上的**图形是凹的(或凹弧)**，如图 5-1(a)所示；如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上的**图形是凸的(或凸弧)**，如图 5-1(b)所示.



图形上任意弧段位于弦的下方

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

(a)

图形上任意弧段位于弦的上方

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

(b)

图 5-1

2. 拐点的定义

连续曲线的凹弧与凸弧的分界点称为该曲线的**拐点**.

四、凹凸性与拐点的判别

1. 判别凹凸性

设函数 $f(x)$ 在 I 上二阶可导.

①若在 I 上 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 I 上的**图形是凹的**；

②若在 I 上 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 I 上的**图形是凸的**.

2. 二阶可导点是拐点的必要条件

设 $f''(x_0)$ 存在，且点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线上的拐点，则 $f''(x_0)=0$.

3. 判别拐点的第一充分条件

设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，在点 $x=x_0$ 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内二阶导数存在，且在该点的左、右邻域内 $f''(x)$ 变号(无论是由正变负，还是由负变正)，则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线上的**拐点**.

【注】 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 上的拐点时，并不要求 $f(x)$ 在点 x_0 的导数存在，如 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 的情形.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

4. 判别拐点的第二充分条件

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内三阶可导，且 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，则 $(x_0,f(x_0))$ 为**拐点**.

5. 判别拐点的第三充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 3)$，则当 n 为奇数时，$(x_0,f(x_0))$ 为**拐点**.

【注 1】 上述第三充分条件的证明如下：由于 n 为奇数，令 $n=2k+1$，构造极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{(x-x_0)^{2k-1}}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\cdots\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k-1)!(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(2k)}(x)-f^{(2k)}(x_0)}{(2k-1)!(x-x_0)}=\frac{1}{(2k-1)!}f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0.$$

上述洛必达法则成立的依据是，最后的结果 $\frac{1}{(2k-1)!}f^{(2k+1)}(x_0)$ 是存在的.

不妨设 $f^{(2k+1)}(x_0)>0$，由函数极限的局部保号性知，存在 x_0 的某去心邻域，对于该邻域内的任意 x，有

$$\frac{f''(x)}{(x-x_0)^{2k-1}}>0,$$

当 $x\to x_0^+$ 时，$f''(x)>0$；当 $x\to x_0^-$ 时，$f''(x)<0$，故 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注 2】 由上述证明过程可知，第三充分条件不需要 $f'(x_0)=0$ 这个条件，有些教材和辅导书写出这个条件是不必要的.

五、渐近线

1. 铅垂渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$），则 $x=x_0$ 为一条铅垂渐近线.

【注】 此处的 x_0 或是函数的无定义点，或是函数定义区间的端点，或是分段函数的分段点.

2. 水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=y_1$，则 $y=y_1$ 为一条水平渐近线；若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=y_2$，则 $y=y_2$ 为一条水平渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=y_0$，则 $y=y_0$ 为一条水平渐近线.

3. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a_1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]=b_1$，则 $y=a_1x+b_1$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a_2$，$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=b_2$，则 $y=a_2x+b_2$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$，则 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

微信公众号：djky66
（问学考研祝您上岸）

六、最值或取值范围

1. 求闭区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最大值 M 和最小值 m

①求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的可疑点——驻点与不可导点，并求出这些可疑点处的函数值；

②求出端点的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$；

③比较以上所求得的所有函数值，其中最大者为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 M，最小者为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值 m.

【注】 有时这类问题也可命制为“求连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的值域 $[m,M]$”. 见例 5.9.

2. 求开区间 (a,b) 内连续函数 $f(x)$ 的最值或者取值范围

①求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的可疑点——驻点与不可导点，并求出这些可疑点处的函数值.

②求 (a,b) 两端的单侧极限：若 a,b 为有限常数，则求 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$；若 a 为 $-\infty$，则求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$；若 b 为 $+\infty$，则求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 记以上所求左端极限为 A，右端极限为 B.

③比较①，②所得结果，确定最值或取值范围.

【注 1】 这类问题有时没有最大值、最小值.

【注 2】 求区间$(a,b]$或$[a,b)$内连续函数$f(x)$的最值或者取值范围，只需在开区间(a,b)内得到的结果基础上加上$f(b)$或$f(a)$的值即可.

七、作函数图形

给出函数$f(x)$，作图的一般步骤：

①确定函数$f(x)$的定义域，并考查它是否有奇偶对称性；

②求出$f'(x)$，$f''(x)$，用$f(x)$的无定义点，$f'(x)=0$的点，$f'(x)$不存在的点，$f''(x)=0$的点，$f''(x)$不存在的点，将定义域划分为若干子区间，确定函数图形在各个子区间上的单调性与凹凸性，进而确定函数的极值点和拐点；

③确定渐近线(如果有的话)；

④作出函数图形.

这是基本功，一定要重视.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础例题精解

导数的几何应用主要指："三点、两性、一线"."三点"是指：极值点、最值点、拐点."两性"是指：单调性、凹凸性."一线"是指：渐近线.这部分内容知识点众多，各知识点之间又联系紧密，故很容易命制综合题.

例 5.1 函数$y=f(x)=\ln(1+x^2)$在$(-1,0)$内(　　).

(A)单调减少，曲线为凹　　(B)单调减少，曲线为凸

(C)单调增加，曲线为凹　　(D)单调增加，曲线为凸

解 应选(A).

本题考核的知识点为函数的单调性与曲线的凹凸性.判定函数单调性需考查y'的符号，判定曲线凹凸性需依y''符号.

$y=f(x)=\ln(1+x^2)$定义域为$(-\infty,+\infty)$，在$(-1,0)$内连续.

$$y'=\frac{2x}{1+x^2},\quad y''=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

令$y'=0$，得唯一驻点$x=0$；令$y''=0$，得$x_1=-1,x_2=1$.

故在$(-1,0)$内，$y'<0,y''>0$，因此函数$y=f(x)$在$(-1,0)$内单调减少，曲线为凹.故选(A).

例 5.2 设函数$y=|xe^{-x}|$，则(　　).

(A)$x=0$不是y的极值点，点$(0,0)$不是曲线y的拐点

(B)$x=0$不是y的极值点，点$(0,0)$是曲线y的拐点

(C)$x=0$是y的极大值点，点$(0,0)$是曲线y的拐点

(D)$x=0$是y的极小值点，点$(0,0)$是曲线y的拐点

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

解 应选(D).

y 的表达式含有绝对值符号，可知其为分段函数，$x=0$ 为其分段点，研究函数在分段点处是否为极值及相应曲线上的点是否为拐点，仍需依 y'，y'' 符号判定，或依极值定义判定.

$$y=|xe^{-x}|=\begin{cases}-xe^{-x}, & x<0,\\ xe^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

由于

$$\lim_{x\to 0^-}y=\lim_{x\to 0^-}(-xe^{-x})=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}y=\lim_{x\to 0^+}xe^{-x}=0,$$

可知 $\lim\limits_{x\to 0}y=0=y(0)$，$y$ 在 $x=0$ 处连续.

$$y'=\begin{cases}e^{-x}(x-1), & x<0,\\ e^{-x}(1-x), & x>0.\end{cases}$$

而

$$y'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{y(x)-y(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-xe^{-x}}{x}=-1,$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{y(x)-y(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^{-x}}{x}=1,$$

可知 y 在 $x=0$ 处不可导.

令 $y'=0$，可得 y 的唯一驻点 $x=1$.

当 $x<0$ 时，$y'=e^{-x}(x-1)<0$；当 $0<x<1$ 时，$y'=e^{-x}(1-x)>0$，可知 $x=0$ 为 y 的极小值点.

又

$$y''=\begin{cases}e^{-x}(2-x), & x<0,\\ e^{-x}(x-2), & x>0,\end{cases}$$

令 $y''=0$，得 $x=2$.

当 $x<0$ 时，$y''=e^{-x}(2-x)>0$；当 $0<x<2$ 时，$y''=e^{-x}(x-2)<0$，可知 y'' 在 $x=0$ 邻近符号不同.

当 $x=0$ 时，$y=0$，因此点 $(0,0)$ 为曲线 y 的拐点.

故选(D).

【注】 注意到 $y\Big|_{x=0}=0$，当 $x\neq 0$ 时，$y=|xe^{-x}|>0$，由极值定义可知 $x=0$ 为 y 的极小值点.

例 5.3 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 是大于零的可导函数，且

$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0,$$

则当 $a<x<b$ 时，有(　　).

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

解 应选(B).

选项较复杂，可以先将条件变形.

由于 $f(x)$，$g(x)$ 是大于零的可导函数，因此

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}>0,$$

可知 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为单调增加函数，对于任意 $x\in(a,b)$ 都有

$$\frac{f(b)}{g(b)}>\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(a)}{g(a)},$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

即 $f(b)g(x)>f(x)g(b)$，$f(x)g(a)>f(a)g(x)$. 故选(B).

【注】 选项(C)，(D)考查 $f(x)g(x)$ 的单调性，不具备判定条件，因此都应排除.

例 5.4 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则(　　).

(A) $f(1)>f(-1)$　　(B) $f(1)<f(-1)$

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$　　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$

解　应选(C).

由 $f(x)f'(x)>0$ 知

$$\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]'=f(x)f'(x)>0,$$

则 $\frac{1}{2}f^2(x)$ 单调增加，从而 $f^2(x)$ 单调增加，由此可知

$$f^2(1)>f^2(-1),$$

两端开方得

$$|f(1)|>|f(-1)|.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 5.5 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，$f'(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 内的单调增加函数，$f(0)=0$，讨论函数 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

解　令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-[f(x)-f(0)]}{x^2}\overset{(*)}{=}\frac{xf'(x)-xf'(\xi)}{x^2}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x},$$

$(*)$ 处是对 $f(x)$ 用了拉格朗日中值定理，$f(x)-f(0)=f'(\xi)\cdot x$，其中 $0<\xi<x$. 因为 $f'(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 内的单调增加函数，于是

$$f'(x)>f'(\xi),\quad g'(x)>0,$$

所以 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

例 5.6 设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y=(x^2+1)^2-y$ 所确定的隐函数，则点 $x=0$(　　).

(A)不是 y 的驻点，也不是 y 的极值点

(B)是 y 的唯一驻点，但不是 y 的极值点

(C)是 y 的唯一驻点，且为 y 的极小值点

(D)是 y 的唯一驻点，且为 y 的极大值点

解　应选(C).

本题考查隐函数的极值问题，其解法与显函数形式相仿.

将方程两端关于 x 求导，可得

$$e^y\cdot y'=4x(x^2+1)-y',$$

$$y'=\frac{1}{e^y+1}\cdot 4x\cdot(x^2+1).$$

令 $y'=0$ 可得 y 的唯一驻点 $x=0$，因此排除选项(A).

当 $x<0$ 时，$y'<0$；当 $x>0$ 时，$y'>0$. 由极值的第一充分条件可知 $x=0$ 为 y 的极小值点. 故选(C).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}[(2+x)e^{\frac{1}{x}}-x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0}\frac{(1+2t)e^{t}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2e^{t}+(1+2t)e^{t}}{1}=3,$$

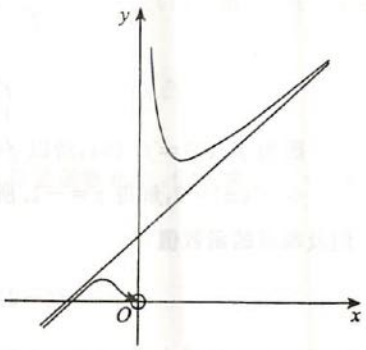


图 5-3

故直线 $y=x+3$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的斜渐近线.

作图，如图 5-3 所示.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础习题精练

习 题

5.1 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$（　　）.

(A)不可导　　(B)可导，且 $f'(0)\neq0$

(C)取得极大值　　(D)取得极小值

5.2 求函数 $f(x)=x-\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间和极值.

5.3 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值.

5.4 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可通过 a 表示为 $b^2=$_____.

5.5 求曲线 $y=f(x)=xe^{\frac{1}{x^2}}$ 的渐近线.

5.6 设 $f(x)=xe^x$，求 $f^{(n)}(x)$ 的极值点和极值.

5.7 设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$，求

(1)函数的单调区间及极值；

(2)函数图像的凹凸区间及拐点；

(3)渐近线；

(4)作出其图形.

5.8 设 $f(x)=3x^2+Ax^{-3}$，问正数 A 至少为何值时，可使对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)\geqslant20$ 成立.

5.9 曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为_____.

5.10 设 $a>1$，$f(t)=a^t-at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$，问 a 为何值时，$t(a)$ 最小，并求出最小值.

即 $f(b)g(x)>f(x)g(b)$，$f(x)g(a)>f(a)g(x)$. 故选(B).

【注】 选项(C)，(D)考查 $f(x)g(x)$ 的单调性，不具备判定条件，因此都应排除.

例 5.4 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则(　　).

(A) $f(1)>f(-1)$　　(B) $f(1)<f(-1)$

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$　　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$

解 应选(C).

由 $f(x)f'(x)>0$ 知

$$\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]'=f(x)f'(x)>0,$$

则 $\frac{1}{2}f^2(x)$ 单调增加，从而 $f^2(x)$ 单调增加，由此可知

$$f^2(1)>f^2(-1),$$

两端开方得

$$|f(1)|>|f(-1)|.$$

例 5.5 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，$f'(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 内的单调增加函数，$f(0)=0$，讨论函数 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

解 令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-[f(x)-f(0)]}{x^2}\overset{(*)}{=}\frac{xf'(x)-xf'(\xi)}{x^2}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x},$$

$(*)$ 处是对 $f(x)$ 用了拉格朗日中值定理，$f(x)-f(0)=f'(\xi)\cdot x$，其中 $0<\xi<x$. 因为 $f'(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 内的单调增加函数，于是

$$f'(x)>f'(\xi),\quad g'(x)>0,$$

所以 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

例 5.6 设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y=(x^2+1)^2-y$ 所确定的隐函数，则点 $x=0$(　　).

(A)不是 y 的驻点，也不是 y 的极值点

(B)是 y 的唯一驻点，但不是 y 的极值点

(C)是 y 的唯一驻点，且为 y 的极小值点

(D)是 y 的唯一驻点，且为 y 的极大值点

解 应选(C).

本题考查隐函数的极值问题，其解法与显函数形式相仿.

将方程两端关于 x 求导，可得

$$e^y\cdot y'=4x(x^2+1)-y',$$

$$y'=\frac{1}{e^y+1}\cdot 4x\cdot(x^2+1).$$

令 $y'=0$ 可得 y 的唯一驻点 $x=0$，因此排除选项(A).

当 $x<0$ 时，$y'<0$；当 $x>0$ 时，$y'>0$. 由极值的第一充分条件可知 $x=0$ 为 y 的极小值点. 故选(C).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 5.7 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性为(　　).

(A)先凹后凸　　(B)先凸后凹　　(C)凹的　　(D)凸的

解 应选(D).

本题考核的知识点是隐函数表示的曲线的凹凸性问题，其判定方法与显函数相仿，仍是求出 $y''=0$ 的点及二阶导数不存在的点，再判定这些点左、右邻域内二阶导数的符号.

将方程 $y\ln y-x+y=0$ 两端对 x 求导，有

$$y'\ln y+2y'-1=0. \tag{*}$$

将 $x=1,y=1$ 代入，得 $y'(1)=\frac{1}{2}$.

将(*)两端再次对 x 求导，可得

$$y''\ln y+\frac{1}{y}\cdot(y')^2+2y''=0,$$

由 $y(1)=1,y'(1)=\frac{1}{2}$，可代入上式得 $y''(1)=-\frac{1}{8}<0$，可知曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近是凸的. 故选(D).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 5.8 求曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty,$$

所以直线 $x=0$ 是曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的一条铅垂渐近线.

因为

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0,$$

所以直线 $y=0$ 是曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的一条水平渐近线.

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{x+\ln(1+e^{-x})}{x}\right]=1,$$

且

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^{-x})\right]=0,$$

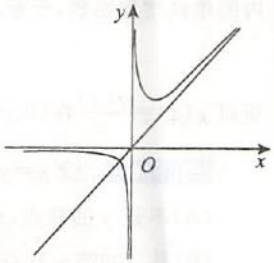


图 5-2

所以直线 $y=x$ 是曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的一条斜渐近线. 其大致图形如图 5-2 所示.

例 5.9 求 $f(x)=|x|e^x$ 在区间 $[-2,1]$ 上的值域(即求最大值和最小值).

解 将 $f(x)$ 写成分段函数为 $f(x)=\begin{cases}xe^x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -xe^x, & -2\leqslant x<0,\end{cases}$ 因此

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\begin{cases}(x+1)e^x, & 0<x\leqslant 1,\\ -(x+1)e^x, & -2\leqslant x<0.\end{cases}$

当 $x=0$ 时，

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-xe^x-0}{x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x-0}{x}=1.$$

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$. 所以 $f(x)$ 在 $(-2,1)$ 内的驻点和不可导点分别为 $x=-1$ 和 $x=0$. 比较它们及端点的函数值：

$$f(-2)=\frac{2}{e^2},\quad f(-1)=\frac{1}{e},\quad f(0)=0,\quad f(1)=e.$$

知 $f(1)=e$ 为最大值，$f(0)=0$ 为最小值，即 $f(x)$ 在区间 $[-2,1]$ 上的值域为 $[0,e]$.

例 5.10　求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

解　设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$，则

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2},$$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=e$. 当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $x=e$ 处取得极大值，即最大值为 $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$，又因为 $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}\Leftrightarrow(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$，故 $\sqrt[3]{3}$ 是数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

【注】 如果遇到最小值和最大值的实际问题，则首先应建立目标函数（即欲求其最值的那个函数），并确定其定义区间，将它转化为函数的最值问题. 特别地，如果所考虑的实际问题存在最小值或最大值，并且所建立的目标函数 $f(x)$ 有唯一的极值点 x_0，则 $f(x_0)$ 即为所求的最小值或最大值.

例 5.11　作函数 $y=f(x)=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$ 的图像.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

令 $f'(x)=\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=0$，得驻点 $x_1=-1,x_2=2$，及 $f'(x)$ 不存在的点 $x_3=0$.

因此可知，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(2,+\infty)$，单调减区间为 $(-1,0)$ 和 $(0,2)$；极大值为 $f(-1)=\frac{1}{e}$，极小值为 $f(2)=4\sqrt{e}$.

令 $f''(x)=\frac{5x+2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}=0$，得 $x_4=-\frac{2}{5}$ 及 $f''(x)$ 不存在的点 $x_3=0$.

所以曲线 $y=f(x)$ 的凸区间为 $\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)$，凹区间为 $\left(-\frac{2}{5},0\right)$ 和 $(0,+\infty)$；曲线 $y=f(x)$ 的拐点为 $\left(-\frac{2}{5},\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)$.

由

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2+x)e^{\frac{1}{x}}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2+x)e^{\frac{1}{x}}=+\infty,$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

故直线 $x=0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅垂渐近线.

又

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2+x)e^{\frac{1}{x}}}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}[(2+x)e^{\frac{1}{x}}-x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0}\frac{(1+2t)e^{t}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2e^{t}+(1+2t)e^{t}}{1}=3,$$

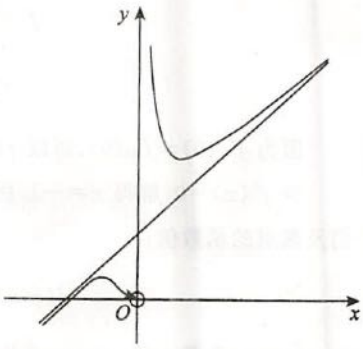


图 5-3

故直线 $y=x+3$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的斜渐近线.

作图，如图 5-3 所示.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础习题精练

习题

5.1 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$（　　）.

(A)不可导　　(B)可导，且 $f'(0)\neq0$

(C)取得极大值　　(D)取得极小值

5.2 求函数 $f(x)=x-\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间和极值.

5.3 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值.

5.4 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可通过 a 表示为 $b^2=$_____.

5.5 求曲线 $y=f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

5.6 设 $f(x)=xe^{x}$，求 $f^{(n)}(x)$ 的极值点和极值.

5.7 设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$，求

(1)函数的单调区间及极值；

(2)函数图像的凹凸区间及拐点；

(3)渐近线；

(4)作出其图形.

5.8 设 $f(x)=3x^2+Ax^{-3}$，问正数 A 至少为何值时，可使对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)\geqslant20$ 成立.

5.9 曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为_____.

5.10 设 $a>1$，$f(t)=a^{t}-at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$，问 a 为何值时，$t(a)$ 最小，并求出最小值.

解答

5.1　(D)　**解**　由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，且$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$.

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)}{x^2}=2$，故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1>0$，由极限的局部保号性可知在$x=0$的某去心邻域内有$\dfrac{f(x)}{x^2}>0$，即$f(x)>0$，故$f(x)$在$x=0$处取极小值，从而选(D).

【注】　易知$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\dfrac{x}{1-\cos x}=2$. 由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\cos x}=\infty$，则必有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$，即$f'(0)=0$. 排除(A)，(B).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

5.2　**解**　定义域为$(-\infty,+\infty)$，因为

$$f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}},$$

令$f'(x)=0$，得驻点$x_1=1$，$f'(x)$不存在的点为$x_2=0$. 列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由此可知函数$f(x)$在$(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$内单调增加，在$(0,1)$内单调减少；在$x=0$处取得极大值$f(0)=0$，在$x=1$处取得极小值$f(1)=-\dfrac{1}{2}$.

5.3　**解**　在$y^3+xy^2+x^2y+6=0$两边关于x求导，得

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0,$$

令$y'=0$，得$y=-2x$或$y=0$(不适合方程，舍去).

将$y=-2x$代入方程得$-6x^3+6=0$，解得$x=1$，$y(1)=-2$，且$y'(1)=0$.

在$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$两边关于$x$求导，得

$$(3y^2+2xy+x^2)y''+2(3y+x)(y')^2+4(y+x)y'+2y=0,$$

求得$y''(1)=\dfrac{4}{9}>0$. 所以$x=1$是函数$y(x)$的极小值点，极小值为$y(1)=-2$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

5.4　$4a^6$　**解**　因为曲线$y=x^3-3a^2x+b$与x轴相切，所以在切点处有

$$y'=3x^2-3a^2=0,$$

由此可解出切点横坐标$x=a$或$x=-a$，且在切点处有

$$y(a)=a^3-3a^3+b=0\text{ 或 }y(-a)=-a^3+3a^3+b=0,$$

所以$b=2a^3$或$b=-2a^3$，即$b^2=4a^6$.

5.5　**分析**　当极限$\lim\limits_{x\to+\infty}y$存在或极限$\lim\limits_{x\to-\infty}y$存在时，曲线$y=f(x)$存在水平渐近线；

第6讲 中值定理

基础知识结构

十大定理及其使用
- 定理1——有界与最值定理
- 定理2——介值定理
- 定理3——平均值定理
- 定理4——零点定理
- 定理5——费马定理
- 定理6——罗尔定理
- 定理7——拉格朗日中值定理
- 定理8——柯西中值定理
- 定理9——泰勒公式
- 定理10——积分中值定理

微信公众号：(顶尖考研)

基础内容精讲

以下列出需要考生掌握的9个基本定理. 其中，定理1至定理4是涉及函数的中值定理；定理5至定理9是涉及导数(微分)的中值定理；涉及积分的中值定理见例6.2.

1. 涉及函数的中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

定理1(有界与最值定理) $m\leqslant f(x)\leqslant M$，其中，$m,M$ 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值.

定理2(介值定理) 当 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 时，存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\mu$.

定理3(平均值定理) 当 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$ 时，在 $[x_1,x_n]$ 内至少存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

定理4(零点定理) 当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

2. 涉及导数(微分)的中值定理

定理5(费马定理) 设 $f(x)$ 满足在点 x_0 处 $\begin{cases}①\text{可导},\\②\text{取极值},\end{cases}$ 则 $f'(x_0)=0$.

费马
(1601－1665)

故 $x=\sqrt[5]{\frac{A}{2}}$ 为 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的最小值点，所以当

$$f\left(\sqrt[5]{\frac{A}{2}}\right)=5\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{2}{5}}\geqslant 20,$$

即当 $A\geqslant 64$ 时，有

$$f(x)\geqslant f\left(\sqrt[5]{\frac{A}{2}}\right)\geqslant 20,x\in(0,+\infty)$$

成立，因此 A 至少为 64.

【注】 此题的初等解法：当 $A>0$ 时，由 $3x^2+Ax^{-3}=x^2+x^2+x^2+\frac{A}{2}x^{-3}+\frac{A}{2}x^{-3}\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{A^2}{4}}\geqslant 20$，解得 $A\geqslant 64$.

5.9 $(-1,-6)$　**解**　$y=x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$，$y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$，$y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$.

令 $y''=0$，得 $x=-1$，又 $x\to 0$ 时，$y''\to+\infty$. 由于在 $x=-1$ 的左、右邻域内 y'' 变号，在 $x=0$ 的左、右邻域内 y'' 不变号，故拐点为 $(-1,-6)$.

5.10　**解**　本题是求驻点函数 $t(a)$ 的最小值点和最小值，所以，首先由原函数 $f(t)=a^t-at$ 求出驻点函数 $t(a)$，然后对 $t(a)$ 进行运算.

$$f'(t)=a^t\ln a-a,$$

令 $f'(t)=a^t\ln a-a=0$，得唯一驻点函数 $t(a)=1-\frac{\ln\ln a}{\ln a}$，$t'(a)=-\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\ln a}{(\ln a)^2}$.

令 $t'(a)=-\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln(\ln a)}{(\ln a)^2}=0$，得函数 $t(a)$ 的唯一驻点 $a=e^e$.

当 $1<a<e^e$ 时，$t'(a)<0$；当 $a>e^e$ 时，$t'(a)>0$，所以，$t(e^e)=1-\frac{1}{e}$ 为极小值，也是最小值.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第6讲 中值定理

基础知识结构

十大定理及其使用
- 定理1——有界与最值定理
- 定理2——介值定理
- 定理3——平均值定理
- 定理4——零点定理
- 定理5——费马定理
- 定理6——罗尔定理
- 定理7——拉格朗日中值定理
- 定理8——柯西中值定理
- 定理9——泰勒公式
- 定理10——积分中值定理

微信公众号：gjkyd6
(顶尖考研资料)

基础内容精讲

以下列出需要考生掌握的9个基本定理. 其中，定理1至定理4是涉及函数的中值定理；定理5至定理9是涉及导数(微分)的中值定理；涉及积分的中值定理见例6.2.

1. 涉及函数的中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

定理1(有界与最值定理) $m\leqslant f(x)\leqslant M$，其中，$m,M$ 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值.

定理2(介值定理) 当 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 时，存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\mu$.

定理3(平均值定理) 当 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$ 时，在 $[x_1,x_n]$ 内至少存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

定理4(零点定理) 当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

费马
(1601－1665)

2. 涉及导数(微分)的中值定理

定理5(费马定理) 设 $f(x)$ 满足在点 x_0 处 $\begin{cases}①\text{可导},\\②\text{取极值},\end{cases}$ 则 $f'(x_0)=0$.

【注】 (1)要求考生掌握费马定理的证明.

不妨假设 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值,则存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$,对任意的 $x\in U(x_0)$,都有 $\Delta f=f(x)-f(x_0)\leqslant 0$,于是根据导数的定义与极限的保号性,有

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0,$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0.$$

又 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,于是 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$,故 $f'(x_0)=0$.

(2)当一个人跑到最远处时,他的速度为零;当一个人跑得最快时,他的加速度为零.这些都是费马定理在生活中的通俗应用.

定理 6(罗尔定理)

设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases}①\text{在}[a,b]\text{上连续},\\②\text{在}(a,b)\text{内可导},\text{则存在}\ \xi\in(a,b),\text{使得}\ f'(\xi)=0.\\③f(a)=f(b),\end{cases}$

罗尔
(1652—1719)

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 推广的罗尔定理.

(1)设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$,则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=0$.

(2)设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\pm\infty$,则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=0$.

(3)设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导,$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则在 $(a,+\infty)$ 内至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=0$.

(4)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty$,则在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=0$.

定理 7(拉格朗日中值定理)

设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases}①\text{在}[a,b]\text{上连续},\\②\text{在}(a,b)\text{内可导},\end{cases}$ 则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

拉格朗日
(1736—1813)

或者写成

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

定理 8(柯西中值定理)

设 $f(x),g(x)$ 满足 $\begin{cases}①\text{在}[a,b]\text{上连续},\\②\text{在}(a,b)\text{内可导},\text{则存在}\ \xi\in(a,b),\text{使得}\\③g'(x)\neq 0,\end{cases}$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

柯西
(1789—1857)

定理 9(泰勒公式)

(1)带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式.

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内 $n+1$ 阶导数存在,则对该邻域内的任意点 x,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 介于 x,x_0 之间.

(2)带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导,则存在 x_0 的一个邻域,对于该邻域内的任意点 x,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

【注 1】 当 $x_0=0$ 时的泰勒公式称为**麦克劳林公式**.

(1) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$,其中 ξ 介于 0 和 x 之间.

(2) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$.

微信公众号:qiky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注 2】 几个重要函数的麦克劳林展开式.

(1) $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$.

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$.

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$.

(4) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$.

(5) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)$.

(6) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$.

(7) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

基础例题精解

1. 介值定理的使用

例 6.1 (**平均值定理**)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,证明存在 $\xi\in[x_1,x_n]$,使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证明 由题意可知,$f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续,所以 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ (m,M 分别为 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上的最

小值和最大值),于是

$$m \leqslant f(x_1) \leqslant M, \quad ①$$

$$m \leqslant f(x_2) \leqslant M, \quad ②$$

$$\cdots\cdots \quad \vdots$$

$$m \leqslant f(x_n) \leqslant M. \quad ⓝ$$

由①+②+…+ⓝ,有 $nm \leqslant f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \leqslant nM$,故

$$m \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \leqslant M.$$

由介值定理可知,存在 $\xi \in [x_1, x_n]$,使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

例 6.2 (**定理 10　积分中值定理**) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明存在 $\xi \in [a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值 M 与最小值 m,使得

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

故

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M,$$

由介值定理可知,存在 $\xi \in [a,b]$,使得 $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,得证.

微信公众号: djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 如何证明 $\xi \in (a,b)$?

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

证明　令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,在 $[a,b]$ 上用拉格朗日中值定理 $\Rightarrow F(b)-F(a) = F'(\xi)(b-a)$,

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - 0 = f(\xi)(b-a), \xi \in (a,b),$$

得证.

微信公众号: djky66
(顶尖考研祝您上岸)

考研真题中已经考过,可直接在大题中使用,不必证明再用.

例 6.3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一阶连续导数,$f(0)=0$,证明:存在 $\xi \in [0,1]$,使得

$$f'(\xi) = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　$f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,故 $m \leqslant f'(x) \leqslant M$,其中 m, M 分别是 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值和最大值.

由 $f(x)-f(0) = f'(\eta)(x-0)$ $(0<\eta<x)$,有 $f(x) = xf'(\eta)$,因为 $m \leqslant f'(\eta) \leqslant M$,所以

$$mx \leqslant f'(\eta)x = f(x) \leqslant Mx,$$

因此

$$\int_0^1 mx\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 Mx\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 2mx\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 2Mx\mathrm{d}x,$$

故

$$m = 2m\cdot\frac{1}{2} \leqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2M\cdot\frac{1}{2} = M,$$

由介值定理可知，存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

2. 罗尔定理的使用

(1) 常用乘积求导公式 $(uv)'=u'v+uv'$ 的逆用来构造辅助函数.

①$[f(x)f(x)]'=[f^2(x)]'=2f(x)\cdot f'(x)$.

见到 $f(x)f'(x)$，作 $F(x)=f^2(x)$.

②$[f(x)\cdot f'(x)]'=[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$.

见到 $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$，作 $F(x)=f(x)f'(x)$.

③$[f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}]'=f'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}+f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)=[f'(x)+f(x)\varphi'(x)]\mathrm{e}^{\varphi(x)}$.

见到 $f'(x)+f(x)\varphi'(x)$，作 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}$.

【注】 常考以下情形.

(1)$\varphi(x)=x\Rightarrow$见到 $f'(x)+f(x)$，作 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^x$.

(2)$\varphi(x)=-x\Rightarrow$见到 $f'(x)-f(x)$，作 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x}$.

(3)$\varphi(x)=kx\Rightarrow$见到 $f'(x)+kf(x)$，作 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{kx}$.

微信公众号：dlky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 6.4 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明：对任意实数 α，都存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+\alpha f(\xi)=0$.

证明 令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$，则 $F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且

$$F(a)=F(b)=0.$$

根据罗尔定理可知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)\mathrm{e}^{\alpha\xi}+\alpha f(\xi)\mathrm{e}^{\alpha\xi}=0.$$

所以 $f'(\xi)+\alpha f(\xi)=0$.

例 6.5 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明：

(1)存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

(2)对于任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

证明 (1)令 $F(x)=f(x)-x$，则函数 $F(x)=f(x)-x$ 在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续，且有

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,\quad F(1)=f(1)-1=-1<0,$$

由于 $F\left(\frac{1}{2}\right)\cdot F(1)<0$，根据零点定理可知，存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $F(\eta)=0$，即 $f(\eta)=\eta$.

(2)令 $G(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}[f(x)-x]$，则函数 $G(x)$在$[0,\eta]$上连续，在$(0,\eta)$内可导，$G(0)=G(\eta)=0$，即函数 $G(x)$在$[0,\eta]$上满足罗尔定理的条件，于是存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得

$$G'(\xi)=\mathrm{e}^{-\lambda\xi}[f'(\xi)-1]-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\xi}[f(\xi)-\xi]=0,$$

即

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$$

(2)上面是证明一阶导数为0,也就是使用一次罗尔定理的问题,但有些题目涉及二阶导数为0,即要多次使用罗尔定理,这种问题难点一般不在辅助函数的构造,而是要找到函数值相等的三个不同点,即$f(a)=f(b)=f(c)$(不妨设$a<b<c$),分别在$[a,b]$,$[b,c]$上使用罗尔定理,有$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$,$\xi_1\in(a,b)$,$\xi_2\in(b,c)$,进而在$[\xi_1,\xi_2]$上再对$f'(x)$使用罗尔定理,得$f''(\xi)=0$,$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,c)$.

例 6.6 设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内有二阶导数,且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3),$$

证明:(1)存在$\eta\in(0,2)$,使得$f(\eta)=f(0)$;(2)存在$\xi\in(0,3)$,使得$f''(\xi)=0$.

证明 (1)设$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant 2)$,则$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)$.

根据拉格朗日中值定理可知,存在$\eta\in(0,2)$,使$F(2)-F(0)=2F'(\eta)=2f(\eta)$,即

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(\eta),$$

由题设$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(0)$,从而$f(\eta)=f(0)$.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(2)由于$f(x)$在$[2,3]$上连续,则其在$[2,3]$上必有最大值M和最小值m,于是

$$m\leqslant f(2)\leqslant M,\quad m\leqslant f(3)\leqslant M,$$

故

$$m\leqslant\frac{f(2)+f(3)}{2}\leqslant M.$$

根据连续函数的介值定理可知,存在$\tau\in[2,3]$,使$f(\tau)=\frac{f(2)+f(3)}{2}$.由题设,$\frac{f(2)+f(3)}{2}=f(0)$,故$f(\tau)=f(0)$,由(1)的结果可知$f(0)=f(\eta)=f(\tau)$,且$0<\eta<\tau\leqslant 3$.根据罗尔定理可知,存在$\xi_1\in(0,\eta)$,$\xi_2\in(\eta,\tau)$,使$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$,从而存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$,使得$f''(\xi)=0$.

3. 费马定理的使用

证明某点导数为0除了构造辅助函数使用罗尔定理外,切记不可忘记还有定理5(费马定理),使用费马定理只需说明可导函数的最值在区间内部取到,这类问题的题目往往带有不等式关系的条件(因为最值就是通过不等式关系体现的).

例 6.7 (导数零点定理)设$f(x)$在$[a,b]$上可导,证明当$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$时,存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=0.$$

证明 不妨设$f'_+(a)>0$,$f'_-(b)<0$,于是

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow\text{存在}\ \xi_1>0,\text{在}\ (a,a+\xi_1)\ \text{内},f(x)>f(a),$$

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\Rightarrow\text{存在}\ \xi_2>0,\text{在}\ (b-\xi_2,b)\ \text{内},f(x)>f(b).$$

故$f(a)$与$f(b)$均不是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值,则$f(x)$在(a,b)内取得最大值,根据费马定理可知,存在$\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)=0$.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

4. 拉格朗日中值定理的使用

例 6.8 设 $a>b>0, n>1$，证明：$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

证明 设 $f(x)=x^n$，显然 $f(x)$在区间$[b,a]$上连续，在(b,a)内可导，即 $f(x)$在区间$[b,a]$上满足拉格朗日中值定理的条件，于是得

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),\xi\in(b,a),$$

由于 $f'(x)=nx^{n-1}$，因此上式即为

$$a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b),$$

又由 $0<b<\xi<a, n>1$，有

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b).$$

例 6.9 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(1)=3\xi^2f(\xi)+\xi^3f'(\xi)$.

证明 注意到 $3x^2f(x)+x^3f'(x)$是 $x^3f(x)$的导函数，故令 $F(x)=x^3f(x)$，易知 $F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，即 $F(x)$在$[0,1]$上满足拉格朗日中值定理的条件，于是得

$$F(1)-F(0)=F'(\xi),\xi\in(0,1),$$

即

$$f(1)=3\xi^2f(\xi)+\xi^3f'(\xi).$$

例 6.10 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明存在不同的 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=2$.

证明 取 $\xi\in(0,1), f(\xi)\neq0,1$，用 ξ将$[0,1]$划分为$[0,\xi],[\xi,1]$. 在这两个区间上分别对 $f(x)$使用拉格朗日中值定理，得

$$f(\xi)-f(0)=f'(\xi_1)(\xi-0)\Rightarrow\frac{1}{f'(\xi_1)}=\frac{\xi}{f(\xi)},\xi_1\in(0,\xi),$$

$$f(1)-f(\xi)=f'(\xi_2)(1-\xi)\Rightarrow\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{1-\xi}{1-f(\xi)},\xi_2\in(\xi,1),$$

与欲证等式比较，只需证$\frac{\xi}{f(\xi)}+\frac{1-\xi}{1-f(\xi)}=2$即可，于是可取 $f(\xi)=\frac{1}{2}$，则

$$\frac{\xi}{f(\xi)}+\frac{1-\xi}{1-f(\xi)}=2(\xi+1-\xi)=2,$$

命题得证.

【注】 这种反推思想值得借鉴.

5. 柯西中值定理的使用

例 6.11 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$0<a<b$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi)$.

证明 因为 $f(x)$与 $g(x)=\ln x$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $g'(x)=\frac{1}{x}\neq0(0<a<x<b)$，即 $f(x)$与$g(x)=\ln x$ 在$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}},$$

微信公众号：djky66
(顺天考研祝您上岸)

即

$$f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi).$$

6. 泰勒公式的使用

例 6.12 设 $f(x)$在区间$[-a,a](a>0)$上具有二阶连续导数，$f(0)=0$.

(1)写出 $f(x)$的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

(2) 证明：存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

(1)**解** 对任意的 $x\in[-a,a]$，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$，$\xi$ 介于 x 与 0 之间.

(2) **证明** $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}f'(0)x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2\mathrm{d}x$.

因为 $f''(x)$在$[-a,a]$上连续，由最值定理：$m\leqslant f''(x)\leqslant M,x\in[-a,a]$，其中 m,M 分别是 $f''(x)$在$[-a,a]$上的最小值和最大值，有

$$mx^2\leqslant f''(\xi)x^2\leqslant Mx^2,$$

$$\frac{2}{3}ma^3=m\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2\mathrm{d}x\leqslant M\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}Ma^3,$$

$$\frac{a^3}{3}\cdot m\leqslant\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{a^3}{3}\cdot M,$$

$$m\leqslant\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M,$$

由介值定理知，存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$，得证.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础习题精练

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

习 题

6.1 设在[0,1]上 $f''(x)>0$，则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$的大小顺序为(　　).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f(1)-f(0)>f'(0)>f'(1)$

6.2 设 $f(x)$在[0,3]上连续，在(0,3)内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3,f(3)=1$. 证明必存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

6.3 设 $f(x)$在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(1)=k\int_{0}^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x(k>1)$. 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

6.4 设函数 $f(x)$在[0,1]上连续，在(0,1)内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$与 $B(1,f(1))$的直线与曲线 $y=f(x)$相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

6.5 （导数介值定理）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，若 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$，证明对于任意的介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的 μ，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\mu$.

6.6 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

(1)存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(2)存在 $\eta,\tau\in(0,1)$，$\eta\neq\tau$，使得 $f'(\eta)f'(\tau)=1$.

6.7 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$.

解答

6.1 (B) **解** 由 $f''(x)>0$ 可知 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加. 又根据拉格朗日中值定理可知，$f(1)-f(0)=f'(\xi)(0<\xi<1)$，从而有 $f'(0)<f'(\xi)<f'(1)$，即 $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$. 故选(B).

6.2 **分析** 根据题设条件，只需再补充一个条件：存在一点 $c\in[0,3)$，使得 $f(c)=1$. 则函数 $f(x)$ 就在 $[c,3]$ 上满足罗尔定理的条件.

证明 因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且在 $[0,2]$ 上必有最大值 M 和最小值 m，于是

$$m\leqslant f(0)\leqslant M,\quad m\leqslant f(1)\leqslant M,\quad m\leqslant f(2)\leqslant M,$$

故

$$m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1\leqslant M.$$

由介值定理可知，至少存在一点 $c\in[0,2]$，使得 $f(c)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$.

所以函数 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上满足罗尔定理的条件，于是存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

6.3 **分析** 注意到被积函数 $xe^{1-x}f(x)$ 的导数

$$[xe^{1-x}f(x)]'=xe^{1-x}[f'(x)-(1-x^{-1})f(x)]$$

中含有 $f'(x)-(1-x^{-1})f(x)$，这正是欲证结论中的一部分.

证明 令 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$. 由积分中值定理，可知

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x=\eta e^{1-\eta}f(\eta)=1\cdot e^{1-1}f(1),\eta\in\left(0,\frac{1}{k}\right)\subset(0,1),$$

又 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 内可导，且 $F(\eta)=F(1)$，则 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上满足罗尔定理的条件，于是存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

6.4 **证明** 按题意，点 A 与 B 的连线的方程为 $y_1=[f(1)-f(0)]x+f(0)$.

令 $F(x)=f(x)-y_1=f(x)-[f(1)-f(0)]x-f(0)$，则 $F(x)$ 在 $[0,c]$ 与 $[c,1]$ 上均满足罗尔定理的条件，于是可得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，$\xi_1\in(0,c)$，$\xi_2\in(c,1)$.

再由罗尔定理可得 $F''(\xi)=f''(\xi)=0$，$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，命题得证.

6.5 **证明** 因 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$，不妨设 $f'_+(a)<f'_-(b)$. 并设 $F(x)=f(x)-\mu x$，则函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'_+(a)=f'_+(a)-\mu<0$，$F'_-(b)=f'_-(b)-\mu>0$，于是，

$$\begin{cases}F'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}<0,\\ F'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{F(x)-F(b)}{x-b}>0,\end{cases}$$

微信公众号：ujky66
(顶尖考研资源库)

根据极限的保号性，知：

在点 $x=a$ 的某个右邻域内，$\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}<0$，即 $F(x)<F(a)$；

在点 $x=b$ 的某个左邻域内，$\dfrac{F(x)-F(b)}{x-b}>0$，即 $F(x)<F(b)$.

故 $F(a)$和 $F(b)$均不是函数 $F(x)$在$[a,b]$上的最小值，又因 $F(x)$在$[a,b]$上一定可以取得最小值，则其最小值必在(a,b)内取到，设函数 $F(x)$在(a,b)内的最小值点是 ξ，根据费马定理，得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\mu$.

6.6　证明　(1)令 $F(x)=f(x)-1+x$，可得 $\begin{cases}F(0)=f(0)-1+0=-1<0,\\F(1)=f(1)-1+1=1>0,\end{cases}$ 由零点定理可知，存在$\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即$f(\xi)=1-\xi$.

(2)用 ξ 将$[0,1]$划分为$[0,\xi]$，$[\xi,1]$，再用拉格朗日中值定理有

$$f(\xi)-f(0)=f'(\eta)(\xi-0),\eta\in(0,\xi),$$

$$f(1)-f(\xi)=f'(\tau)(1-\xi),\tau\in(\xi,1),$$

则 $$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{1-\xi}{\xi},\quad f'(\tau)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi},$$

故 $f'(\eta)f'(\tau)=1$.

6.7　证明　由带拉格朗日余项的二阶麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

其中 η 介于 0 与 x 之间，$x\in[-1,1]$.

分别令 $x=-1$ 和 $x=1$，并结合已知条件，得

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),-1<\eta_1<0,$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),0<\eta_2<1,$$

两式相减，可得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$.

由 $f'''(x)$的连续性知，$f'''(x)$在闭区间$[\eta_1,\eta_2]$上有最大值和最小值，设它们分别为 M 和 m，则有

$$m\leqslant\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\leqslant M,$$

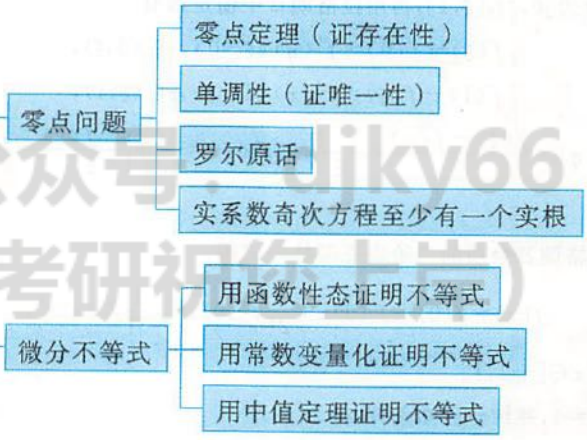
再由连续函数的介值定理知，至少存在一点 $\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$，使

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第7讲 零点问题与微分不等式

基础知识结构



微信公众号：liky66
（顶尖考研祝你上岸）

基础内容精讲

一、零点问题

方程 $f(x)=0$ 的根就是函数 $f(x)$ 的零点. 从几何上讲，方程的根作为两条曲线的交点，代数语言“$f(x)=g(x)$ 的根”与几何语言“曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的交点”，两者概念不同，但描述的是同一件事. 基于此，为讨论方程的根，有时可改为讨论曲线的交点. 讨论方程根的问题（也称为函数的零点问题）通常可以考虑下面这些方法.

1. 零点定理（主要用于证明根的存在性）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

【注】 推广的零点定理：若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\beta$，且 $\alpha\cdot\beta<0$，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根，这里 a,b,α,β 可以是有限数，也可以是无穷大.

2. 单调性（主要用于证明根的唯一性）

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至多有一个根，这里 a,b 可以是有限数，也可以是无穷大.

3. 罗尔原话（罗尔定理的推论）

若 $f^{(n)}(x)=0$ 至多有 k 个根，则 $f(x)=0$ 至多有 $k+n$ 个根.

【注】 (1)读者可能有所不知,罗尔是研究方程的权威,可是他并不研究微积分.由于牛顿在表达无穷小量时,出现过很多错误,罗尔还公开指责牛顿的微积分是谬论,故在微积分教材中罗尔定理并非是罗尔所创造,而是后人为了纪念罗尔,以罗尔的名字命名的.那为什么微积分的研究者会用一位反对微积分的人的名字来命名这么著名的定理呢?原来,罗尔曾经讲过一段话:若 $f(x)=0$ 有两个根,则 $f'(x)=0$ 至少有一个根(当然,这个符号和概念是我们写的,罗尔当年只是用具体函数来表达 $f'(x)$).于是可得其逆否命题:

"若 $f'(x)=0$ 无实根,则 $f(x)=0$ 至多有一个根".

读者可根据现在的罗尔定理,利用归纳法得出:"若 $f^{(n-1)}(x)=0$ 至多有一个根,则 $f^{(n-2)}(x)=0$ 至多有2个根."依次类推,$f^{(n-3)}(x)=0$ 至多有3个根,…,$f(x)=0$ 至多有 n 个根.读者可以看出,方程阶数(即 $f(x)$ 的导数阶数)降几阶,至多有根的个数就会多几个,于是便可得到上述结论.此结论可在考试时直接使用.

以上所述与现在的罗尔定理有着极为密切的关系,故后人以昔日反对者的名字命名了著名的罗尔定理,读者应将这段描述熟记于心,并学会灵活应用.且让作者多一句嘴:真正的科学,一定是对事不对人的,你说呢?

(2)若 $f(x)$ 是 n 次多项式,则 $f^{(n)}(x)\neq 0$,即 $f^{(n)}(x)=0$ 无实根(至多有0个根),于是 $f(x)=0$ 至多有 n 个根.

怎么用?见例7.2.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

4. 实系数奇次方程至少有一个实根

【注】 证明任何实系数奇次方程

$$x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

至少有一个实根.

证明 设

$$f(x)=x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1},$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,故 $\forall M_1>0$,$\exists X_1>0$,当 $x>X_1$ 时,$f(x)>M_1>0$,故 $\exists x_1>X_1$,使 $f(x_1)>0$.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,故 $\forall M_2>0$,$\exists X_2>0$,当 $x<-X_2$ 时,$f(x)<-M_2<0$,故 $\exists x_2<-X_2$,使 $f(x_2)<0$.

由 $f(x)$ 的连续性及零点定理,知 $\exists\xi\in(x_2,x_1)\subset(-\infty,+\infty)$,使 $f(\xi)=0$,即 $f(x)=0$ 至少有一个实根.

怎么用?见例7.3.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

二、微分不等式

1. 用函数性态(包括单调性、凹凸性和最值等)证明不等式

一般地,使用如下依据.

(1)若有 $f'(x)\geqslant 0$,$a<x<b$,则有 $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$.

(2)若有 $f''(x)\geqslant 0, a<x<b$,则有 $f'(a)\leqslant f'(x)\leqslant f'(b)$.

①当 $f'(a)>0$ 时,$f'(x)>0\Rightarrow f(x)$单调增加;

②当 $f'(b)<0$ 时,$f'(x)<0\Rightarrow f(x)$单调减少.

(3)设 $f(x)$在 I 内连续,且有唯一的极值点 x_0,则 $\begin{cases}\text{当 } x_0 \text{ 为极大值点时},f(x_0)\geqslant f(x),\\ \text{当 } x_0 \text{ 为极小值点时},f(x_0)\leqslant f(x),\end{cases}\forall x\in I.$

(4)若有 $f''(x)>0, a<x<b, f(a)=f(b)=0$,则有 $f(x)<0$.

2. 用常数变量化证明不等式

如果欲证的不等式中都是常数,则可以将其中一个或者几个常数变量化,再利用上面所述的导数工具去证明.

3. 用中值定理证明不等式

主要用拉格朗日中值定理或者泰勒公式.

具体请看后面的例题.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础例题精解

一、方程根的问题(函数的零点问题)

例 7.1 证明方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根,其中 p,q 为常数,且 $0<q<1$.

证明 令 $f(x)=x+p+q\cos x$,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,知存在一点 b,使得 $f(b)>0$.

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,知存在一点 a,使 $f(a)<0$. 故由零点定理可知,在(a,b)内至少存在一点 c,使得 $f(c)=0$,即方程 $f(x)=0$ 在(a,b)内至少有一个实根.

又因为 $f'(x)=1-q\sin x>0$,故 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加,所以 $f(x)=0$ 在$(-\infty,+\infty)$内至多有一个实根.

综上所述,方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根.

例 7.2 若函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,则 $f'(x)$的零点的个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

解 应选(C).

由于 $$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

可知 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$,在$[1,2],[2,3],[3,4]$上 $f(x)$满足罗尔定理,因此至少存在 $\xi_1\in(1,2),\xi_2\in(2,3),\xi_3\in(3,4)$,使得

$$f'(\xi_1)=0,\quad f'(\xi_2)=0,\quad f'(\xi_3)=0.$$

因为 $f(x)$为四次多项式,所以 $f'(x)$为三次多项式,而三次方程 $f'(x)=0$ 至多有三个根,故选(C).

例 7.3 若 $3a^2-5b<0$,则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$(　　).

(A) 无实根　　(B) 有唯一实根　　(C)有三个不同实根　　(D) 有五个不同实根

解 应选(B).

由于 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$ 是奇次多项式,故方程 $f(x)=0$ 至少有一个实根,又 $f'(x)=0$,即双二次方程 $5x^4+6ax^2+3b=0$ 对应于 x^2 的判别式 $\Delta=12(3a^2-5b)<0$,则方程 $f'(x)=0$ 无实根,所以方程

$f(x)=0$有唯一实根. 故答案选(B).

例 7.4 设常数 $k>0$,函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在$(0,+\infty)$内的零点个数为(　　).

(A)3　　(B)2　　(C)1　　(D)0

解 应选(B).

易知 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}$. 当 $x>\mathrm{e}$ 时,$f'(x)<0$;当 $0<x<\mathrm{e}$ 时,$f'(x)>0$,故在$(0,\mathrm{e})$和$(\mathrm{e},+\infty)$内 $f(x)$ 分别至多有一个零点,又$f(\mathrm{e})=k>0$,$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$内有两个零点. 故答案选(B).

例 7.5 在区间$(-\infty,+\infty)$内,方程$|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$(　　).

(A)无实根　　(B)有且仅有一个实根

(C)有且仅有两个实根　　(D)有无穷多个实根

解 应选(C).

记 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$,易知 $f(x)$为偶函数,又因为当 $x>1$ 时,$f(x)>0$,故只需判断 $f(x)=0$ 在$(0,1)$内有无实根即可. 因为 $f(0)=-1<0$,$f(1)=2-\cos 1>0$,且当 $x\in(0,1)$时,$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\sin x>0$,所以 $f(x)=0$ 在$(0,+\infty)$内有且仅有一个实根. 故在$(-\infty,+\infty)$内有且仅有两个实根. 故答案选(C).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 7.6 讨论曲线 $y=x\ln x$ 与直线 $y=-A$ 的交点个数.

解 令 $f(x)=x\ln x+A$,讨论曲线 $y=x\ln x$ 与直线 $y=-A$ 的交点个数等价于讨论方程 $f(x)=0$ 的不同实根的个数. 因 $f'(x)=\ln x+1$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

x	$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=A-\frac{1}{\mathrm{e}}$	↗

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=A,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

若 $A\leqslant 0$,极小值 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)<0$,则方程在$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$内无实根,在$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$内有一个实根;

若 $0<A<\frac{1}{\mathrm{e}}$,极小值 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)<0$,则方程在$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$,$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$内各有一个实根;

若 $A=\frac{1}{\mathrm{e}}$,则极小值 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=0$,在$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$内,$f(x)>0$,在$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$内,$f(x)>0$,即方程在$(0,+\infty)$内有且仅有一个实根;

若 $A>\frac{1}{\mathrm{e}}$,则极小值 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)>0$,从而在$(0,+\infty)$内,$f(x)>0$,方程没有实根.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 7.7 求方程 $k\arctan x-x=0$ 的不同实根的个数,其中 k 为参数.

分析 本题主要考查利用函数单调性、函数极值及函数的零点定理与渐近性态,讨论方程实根的存在性问题,由于方程中含有参数 k,故要根据其不同取值范围进行讨论,是一道综合题.

解 令 $f(x)=k\arctan x-x$,则 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$内的奇函数,且 $f(0)=0$,$f'(x)=\frac{k-1-x^2}{1+x^2}$.

当 $k-1\leqslant 0$,即 $k\leqslant 1$ 时,$f'(x)<0(x\neq 0)$,$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内单调减少,方程 $f(x)=0$ 只有一

个实根 $x=0$；

当 $k-1>0$，即 $k>1$ 时，在区间 $(0,\sqrt{k-1})$ 内，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加，在区间 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 内，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少，所以 $f(\sqrt{k-1})$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值，从而 $f(\sqrt{k-1})>f(0)=0$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，所以由函数的零点定理知，存在 $\xi\in(\sqrt{k-1},+\infty)$，使得 $f(\xi)=0$.

由 $f(x)$ 是奇函数及其单调性可知：当 $k>1$ 时，方程 $f(x)=0$ 有且仅有 3 个不同的实根

$$x=-\xi,\quad x=0,\quad x=\xi.$$

【注】 上面的例 7.6 与例 7.7 都是含参数的零点问题，一种是导数中不含参数，其特点是在结果中讨论参数（曲线与 x 轴的位置关系）；一种是导数中含有参数，其特点是在求导过程中讨论参数（确定函数性态）.

二、微分不等式

微信公众号：diky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 7.8 证明当 $x>0$ 时，$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

证明 令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $x>0$ 时，

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\Leftrightarrow\ln(1+t)<\frac{t}{\sqrt{1+t}}\Leftrightarrow t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)>0\ (t>0).$$

令 $F(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)$，则 $F'(t)=\dfrac{2\sqrt{1+t}-\ln(1+t)-2}{2\sqrt{1+t}}$，无法直接判断正负.

再令 $G(t)=2\sqrt{1+t}-\ln(1+t)-2$，则 $G'(t)=\dfrac{\sqrt{1+t}-1}{1+t}>0\Rightarrow G(t)>G(0)=0$，故 $F'(t)=\dfrac{G(t)}{2\sqrt{1+t}}>0$，因此 $F(t)>F(0)=0$，得证.

例 7.9 证明当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $\sin x>\dfrac{2x}{\pi}$.

证明 设 $f(x)=\sin x-\dfrac{2x}{\pi}$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi},\quad f''(x)=-\sin x<0,$$

所以曲线 $f(x)=\sin x-\dfrac{2x}{\pi}$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是凸的，又 $f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，所以 $f(x)=\sin x-\dfrac{2x}{\pi}>0$，即

$$\sin x>\frac{2x}{\pi}.$$

例 7.10 证明 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$.

证明 设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

令 $f'(x)=0$ 得驻点为 $x=0$，由于 $f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$，知 $x=0$ 为唯一极小值点，即最小值点. $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=0$，于是，对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)\geqslant0$，即有

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2},-\infty<x<+\infty.$$

例 7.11 设 $0<a<b$，证明：$\ln\dfrac{b}{a}>2\dfrac{b-a}{a+b}$.

分析 我们可以想到三种思路：

①$b\to x\Rightarrow\ln\dfrac{x}{a}>2\dfrac{x-a}{a+x}(x>a>0)$；

②$a\to x\Rightarrow\ln\dfrac{b}{x}>2\dfrac{b-x}{x+b}(0<x<b)$；

③先化成“齐次式”：$\ln\dfrac{b}{a}>2\dfrac{\frac{b}{a}-1}{1+\frac{b}{a}}$，$\dfrac{b}{a}\to x\Rightarrow\ln x>2\dfrac{x-1}{1+x}$，其中 $x>1$.

当然第三种思路最为简单，$\ln x>2\dfrac{x-1}{1+x}\Leftrightarrow(1+x)\ln x-2(x-1)>0(x>1)$.

证明 令 $F(x)=(1+x)\ln x-2(x-1)(x>1)$，则

$$F'(x)=\frac{1}{x}+\ln x-1,\quad F''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)>0.$$

因此，$F'(x)>F'(1)=0$，故 $F(x)>F(1)=0$. 再令 $x=\dfrac{b}{a}(0<a<b)$，即得证.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 7.12 设 $0<a<b<1$，证明不等式 $\arctan b-\arctan a<\dfrac{b-a}{2ab}$.

证明 只需证明 $\dfrac{\arctan b-\arctan a}{b-a}<\dfrac{1}{2ab}$，在 $[a,b]$ 上对 $f(x)=\arctan x$ 应用拉格朗日中值定理，

$$\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}=\frac{1}{1+\xi^2}<\frac{1}{1+a^2}<\frac{1}{a^2+b^2}<\frac{1}{2ab}(0<a<\xi<b<1).$$

例 7.13 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,c]$ 上连续，其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0,c)$ 内存在且单调减少，又 $f(0)=0$，应用拉格朗日中值定理证明不等式 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$，其中常数 a,b 满足条件 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$.

证明 当 $a=0$ 时，由 $f(0)=0$ 知 $f(a+b)=f(b)=f(a)+f(b)$；

当 $a>0$ 时，在 $[0,a]$ 和 $[b,a+b]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，有

$$f'(\xi_1)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{f(a)}{a},\xi_1\in(0,a),$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(a+b)-f(b)}{(a+b)-b}=\frac{f(a+b)-f(b)}{a},\xi_2\in(b,a+b).$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

显然 $0<\xi_1<a\leqslant b<\xi_2<a+b\leqslant c$，因 $f'(x)$ 在 $(0,c)$ 内单调减少，故 $f'(\xi_2)\leqslant f'(\xi_1)$，从而有 $\dfrac{f(a+b)-f(b)}{a}\leqslant\dfrac{f(a)}{a}$，因为 $a>0$，所以有 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$.

例 7.14 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且 $f''(x)>0$，证明对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1\neq x_2$ 及 $\lambda(0<\lambda<1)$，恒有 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

证明 **方法一** 记 $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，由 $a<x_1<b,a<x_2<b,0<\lambda<1$ 可知 $a<x<b$.

由泰勒公式

$$f(x_1)=f(x)+f'(x)(x_1-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x)^2$$

$$=f(x)+f'(x)(1-\lambda)(x_1-x_2)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x)^2,\xi_1\text{ 介于 }x\text{ 与 }x_1\text{ 之间},$$

$$f(x_2)=f(x)+f'(x)(x_2-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x)^2$$

$$=f(x)+f'(x)\lambda(x_2-x_1)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x)^2,\xi_2\text{ 介于 }x\text{ 与 }x_2\text{ 之间},$$

于是 $$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)=f(x)+\lambda\frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x)^2+(1-\lambda)\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x)^2>f(x),$$

其中 $\lambda>0,1-\lambda>0,f''(\xi_1)>0,f''(\xi_2)>0$.

所以有 $$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)>f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2].$$

方法二 记 $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，则有 $x_1<x<x_2$.

由拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f(x_1)=f'(\xi_1)(x-x_1)=f'(\xi_1)(1-\lambda)(x_2-x_1),x_1<\xi_1<x,\quad①$$

$$f(x_2)-f(x)=f'(\xi_2)(x_2-x)=f'(\xi_2)\lambda(x_2-x_1),x<\xi_2<x_2,\quad②$$

由 $\lambda\times①-(1-\lambda)\times②$，得

$$f(x)-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)=\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]$$

$$=\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)f''(\xi)(\xi_1-\xi_2),$$

其中 $\xi_1<\xi<\xi_2$，又 $f''(\xi)>0,\lambda(1-\lambda)>0,x_2-x_1>0,\xi_1-\xi_2<0$，所以上式有

$$f(x)-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)<0,$$

即 $$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础习题精练

习题

7.1 设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根，求 k 的取值范围.

7.2 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且当 $x>a$ 时，$f'(x)>k>0$，其中 k 为常数. 若 $f(a)<0$，证明方程 $f(x)=0$ 在 $\left[a,a-\frac{f(a)}{k}\right]$ 内有且仅有一个实根.

7.3 证明对任意常数 a,b，且 $a<b$，都有 $\sin b-\sin a\leqslant b-a$.

7.4 证明对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $x-x^2<\frac{1}{e}$.

7.5 设 $b>a>e$，证明 $a^b>b^a$.

7.6 证明：$\left(\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}\right)^2<\frac{1}{x(1+x)^2}(x>0)$.

解答

7.1 **解** 设 $f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$，则 $f'(x)=k-\frac{2}{x^3},f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$.

当 $k\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为单调减函数. 又

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases}-\infty, & k<0,\\ -1, & k=0.\end{cases}$$

所以，当 $k\leqslant 0$ 时，$f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内仅有一个根.

当 $k>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$. 又 $f''(x)>0$，所以 $x=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$ 为极小值点，且 $y=f(x)$ 的图形在 $(0,+\infty)$ 内是凹的，所以，当极小值为零，即

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)=k\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{k}}+\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)^2}-1=0$$

时，原方程有且仅有一个根. 由上式解得 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

综上，当 $k\leqslant 0$ 或 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时，方程有且仅有一个根.

7.2　证明　记 $b=a-\frac{f(a)}{k}$，显然 $b>a$. 根据拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)=-\frac{f(a)}{k}f'(\xi)>-\frac{f(a)}{k}\cdot k=-f(a),$$

所以 $f(b)>0$. 又 $f(a)<0$，根据零点定理，$f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根. 而 $f'(x)>k>0$，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内单调增加，所以 $f(x)=0$ 在区间 $\left[a,a-\frac{f(a)}{k}\right]$ 内有且仅有一个实根.

7.3　证明　$\sin b-\sin a\leqslant b-a\Leftrightarrow\frac{\sin b-\sin a}{b-a}\leqslant 1$. 令 $f(x)=\sin x$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理，所以存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\frac{\sin b-\sin a}{b-a}=f'(\xi)=\cos\xi\leqslant 1$，得证.

7.4　证明　令 $F(x)=\frac{1}{\mathrm{e}}-x+x^2$，由 $F'(x)=-1+2x=0$，得唯一驻点 $x=\frac{1}{2}$，且 $F''(x)=2>0$，所以 $F\left(\frac{1}{2}\right)$ 为函数 $F(x)$ 的最小值，又 $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{4}>0$，故对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有

$$F(x)\geqslant F\left(\frac{1}{2}\right)>0,$$

故 $\frac{1}{\mathrm{e}}-x+x^2>0$，即 $x-x^2<\frac{1}{\mathrm{e}}$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

7.5　分析　$a^b>b^a\Leftrightarrow b\ln a>a\ln b\Leftrightarrow\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$，可用函数的单调性证明.

证明　设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x\in[a,b]$，其中 $b>a>\mathrm{e}$，则

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

其中 $\ln x>\ln\mathrm{e}=1$，所以 $f'(x)<0$，即函数 $f(x)$ 单调减少. 所以，当 $b>a>\mathrm{e}$ 时，$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$，即 $b\ln a>a\ln b$，则 $\ln a^b>\ln b^a$，即 $a^b>b^a$.

7.6　证明　只要证明当 $x>0$ 时，$\left|\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}\right|-\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}<0$ 即可.

令 $$f(x)=\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}=\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x},$$

则 $$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{(1+x)x-(1+x)^2+x}{x(1+x)^2}$$

$$=\frac{-1}{x(1+x)^2}<0,$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，所以 $f(x)>0$.

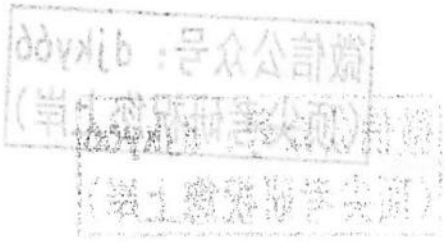
令 $$g(x)=\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)},$$

则 $$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(1+x)+\sqrt{x}}{x(1+x)^2}$$

$$=\frac{-2\sqrt{x}+1+x+2x}{2x^{\frac{3}{2}}(1+x)^2}=\frac{1+3x-2\sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}(1+x)^2}.$$

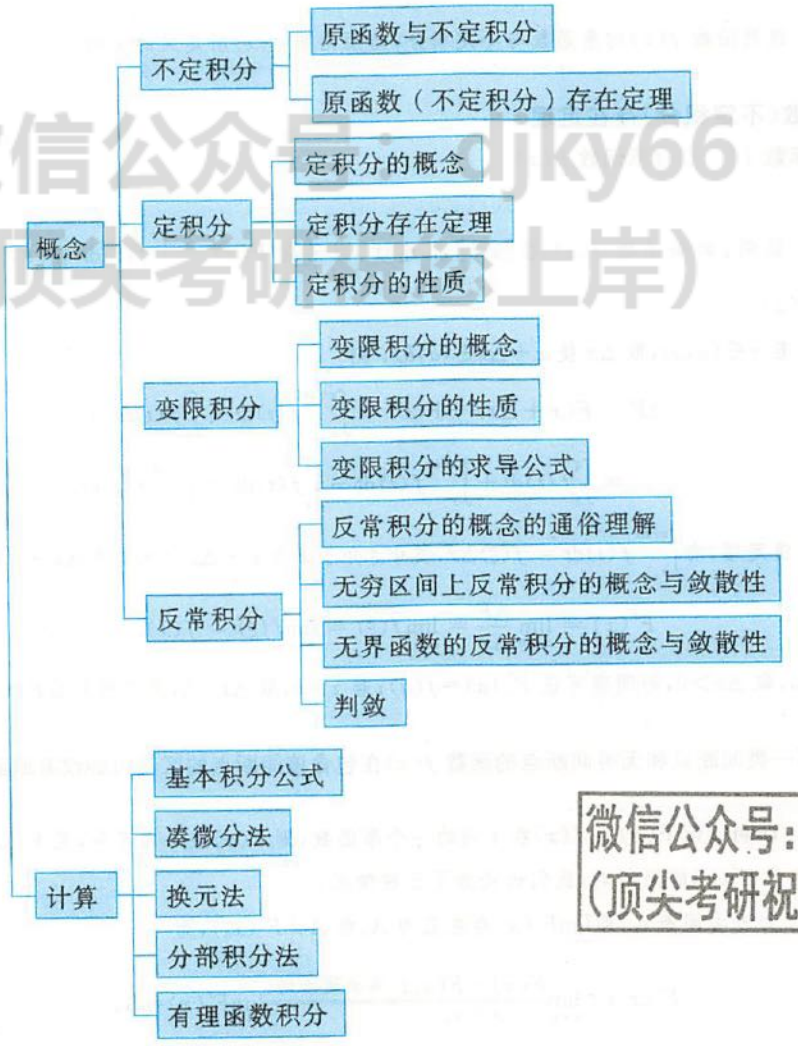
再令 $h(x)=1+3x-2\sqrt{x}$，则 $h'(x)=3-\frac{1}{\sqrt{x}}\overset{令}{=\!=\!=}0$，得 $x=\frac{1}{9}$，为唯一极小值点，也即最小值点，且 $h_{\min}=\frac{2}{3}>0$，故 $h(x)>0$，于是 $g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，所以 $g(x)<0$，证毕.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)



第8讲 一元函数积分学的概念与计算

基础知识结构



微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

基础内容精讲

一、概念

(一)不定积分

1. 原函数与不定积分

设函数 $f(x)$ 定义在某区间 I 上，若存在可导函数 $F(x)$，对于该区间上任意一点都有 $F'(x)=f(x)$ 成立，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数**. 称 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**不定积分**.

【注】 谈到函数 $f(x)$ 的原函数与不定积分，必须指明 $f(x)$ 所定义的区间.

2. 原函数(不定积分)存在定理

(1)连续函数 $f(x)$ 必有原函数 $F(x)$.

【注】 证明：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$.

证明 若 $x\in(a,b)$，取 Δx 使 $x+\Delta x\in(a,b)$，则

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t,$$

使用积分中值定理，有 $\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x$，其中 ξ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\xi\to x$，于是

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x).$$

若 $x=a$，取 $\Delta x>0$，则同理可证 $F'_+(a)=f(a)$；若 $x=b$，取 $\Delta x<0$，则同理可证 $F'_-(b)=f(b)$.

(2)含有第一类间断点和无穷间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内必没有原函数 $F(x)$.

【注1】 **证明** 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 内的一个原函数，则 $F(x)$ 在 I 内可导，且 $F'(x)=f(x)$，并设 $x=x_0\in I$ 为 $F'(x)$ 的间断点，我们讨论如下三种情况：

①$x=x_0$ 为可去间断点，即 $\lim\limits_{x\to x_0}F'(x)$ 存在且为 A，但 $A\neq F'(x_0)$，而

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to x_0}F'(x)=A,$$

矛盾；

②$x=x_0$ 为跳跃间断点，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F'(x)$ 存在且为 A_+，$\lim\limits_{x\to x_0^-}F'(x)$ 存在且为 A_-，但 $A_+\neq A_-$，而

$$F'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to x_0^+}F'(x)=A_+,$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

$$F'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to x_0^-}F'(x)=A_-,$$

又 $F'(x_0)$ 是存在的，则 $F'_+(x_0)=F'_-(x_0)$，即 $A_+=A_-$，矛盾；

③ $x=x_0$ 为无穷间断点，即 $\lim\limits_{x\to x_0}F'(x)=\infty$，而

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to x_0}F'(x)=\infty,$$

又 $F'(x_0)$ 是存在的，矛盾.

综上所述，①，②和③均不存在原函数，即导函数 $F'(x)$ 在 I 内必定没有第一类间断点和无穷间断点，也即含有第一类间断点和无穷间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内没有原函数 $F(x)$.

【注 2】 含有振荡间断点的函数是否有原函数呢？举例说来，对于

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其在 $(-\infty,+\infty)$ 上不连续，它有一个振荡间断点 $x=0$，但是它在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在原函数

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即对于 $(-\infty,+\infty)$ 上任一点都有 $F'(x)=f(x)$ 成立.

当然，对于

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其在 $(-\infty,+\infty)$ 上也有一个振荡间断点 $x=0$，且其在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有原函数.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注 3】 综合以上几点，可以得出重要结论：可导函数 $F(x)$ 求导后的函数 $F'(x)=f(x)$ 不一定是连续函数，但是如果有间断点，一定是第二类间断点(在考研的范畴内，只能是振荡间断点).

(二)定积分

1. 定积分的概念

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，在 (a,b) 上任取 $n-1$ 个分点 $x_i(i=1,2,3,\cdots,n-1)$，定义 $x_0=a$ 和 $x_n=b$，且 $a=x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，记 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$，$k=1,2,3,\cdots,n$. 并任取一点 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta x_k\}$，若当 $\lambda\to 0$ 时，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 存在且与分点 x_i 及点 ξ_k 的取法无关，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

【注】 (1)若 $f(x)<0$,曲边梯形就在 x 轴下方,定积分的绝对值仍等于曲边梯形的面积,但定积分的值是负的.

(2)当我们说到"a 到 b 上的定积分"时,不要总认为 $a<b$,事实上,$a>b$ 的情形是完全可以的,不过注意,$a<b$ 时,$\mathrm{d}x>0$;$a>b$ 时,$\mathrm{d}x<0$.

(3)定积分的定义是由德国数学家波恩哈德·黎曼(Bernhard Riemann)给出的,故这种积分又被称为**黎曼积分**.

(4)**定积分的精确定义(重点)**.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}.$$

使用定积分的精确定义,主要是为了计算一些特殊形式的数列极限,其详细步骤和例题参见"基础例题精解"的"三、定积分的精确定义"部分.

黎曼

(1826—1866)

2. 定积分存在定理

定积分的存在性,也称之为**一元函数的(常义)可积性**.这里的"常义"是指"区间有限,函数有界",也有人称为"黎曼"可积性,与后面要谈到的"区间无穷,函数无界"的"反常"积分有所区别.在本讲中所谈到的可积性都是指常义可积性.

按照《考试大纲》,定积分存在定理包括下面两个方面.

(1)定积分存在的充分条件.

①若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

②若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

③若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,且只有有限个间断点,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

(2)定积分存在的必要条件.

可积函数必有界,即若定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.

【注 1】 关于定积分存在的必要条件,不妨这样理解:当我们任意分割图形底边为若干小段时,若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上无界,则至少存在一个小段 Δx,在 Δx 上,$f(x)$ 可以任意大,于是一个"小竖条"的面积 $f(x)\Delta x$ 便可以无穷大,这样整个曲边梯形的面积就是无穷大,于是极限就不存在了,所以可积函数必有界.

【注 2】 函数不定积分存在定理与定积分存在定理的区别与联系见例 8.1.

3. 定积分的性质(以下假设所写积分均存在)

性质 1(求区间长度) 假设 $a<b$,则 $\int_a^b \mathrm{d}x=b-a=L$,其中 L 为区间 $[a,b]$ 的长度.

性质 2(积分的线性性质) 设 k_1,k_2 为常数,则 $\int_a^b[k_1f(x)\pm k_2g(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

性质 3(积分的可加(拆)性) 无论 a,b,c 的大小如何,总有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

微信公众号:dkv66 (拔尖考研祝您上岸)

性质 4(积分的保号性)　若在区间$[a,b]$上 $f(x)\leqslant g(x)$,则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

特殊地,有　$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

【注】　事实上,设 $f(x)$是$[a,b]$上非负的连续函数,只要 $f(x)$不恒等于零,则必有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$$

在有些积分不等式的证明与定积分值的估计中,要求获得严格的不等式结果,便需要用到这个结论.其证明见例 8.7.

性质 5(估值定理)　设 M,m 分别是 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值,L 为区间$[a,b]$的长度,则有

$$mL\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant ML.$$

性质 6(中值定理)　设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$上至少存在一点 ξ,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(三)变限积分

1. 变限积分的概念

当 x 在$[a,b]$上变动时,对应于每一个 x 值,积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$就有一个确定的值,因此$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是一个关于 x的函数,记作 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(a\leqslant x\leqslant b)$,称函数 $\Phi(x)$为**变上限的定积分**.同理可以定义变下限的定积分和上、下限都变化的定积分,这些都称为**变限积分**.事实上,变限积分就是定积分的推广.

2. 变限积分的性质

(1)函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积,则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上连续.

(2)函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导.

【注】　(1)第一个性质的证明如下.

证明　任意 $x,x+\Delta x\in[a,b]$(当 $x=a$ 时,$0<\Delta x<b-a$;当 $x=b$ 时,$a-b<\Delta x<0$),则

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t.$$

由可积的必要条件可知,存在 $M>0$,使得在$[a,b]$上有 $|f(x)|\leqslant M$,所以有

$$0\leqslant|F(x+\Delta x)-F(x)|\leqslant M|\Delta x|,$$

则 $\lim\limits_{\Delta x\to0}|F(x+\Delta x)-F(x)|=0$,即 $\lim\limits_{\Delta x\to0}[F(x+\Delta x)-F(x)]=0$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to0}F(x+\Delta x)=F(x)$,得证.

第二个性质的证明已经在"(一)不定积分"的"2. 原函数(不定积分)存在定理"的(1)中给出了.

(2)考研中常用到函数 $f(x)$的原函数的一个具体形式:如果函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的一个原函数.

由上述性质可以得出一个重要结论:对于变限积分 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,只要它存在,就必然是连续的.记住这一点,在有些考研题中可以起到重要作用,见例 8.2.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

3. 变限积分的求导公式

设 $F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可导函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的值域在 $[a,b]$ 上，则在函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的公共定义域上，有

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

【注】 我们称上面公式中的 x 为“求导变量”，t 为“积分变量”.“求导变量”x 只出现在积分的上、下限时才能使用变限积分求导公式，若“求导变量”x 出现在被积函数中，必须通过恒等变形（比如变量代换等）将其移出被积函数，才能使用变限积分求导公式.

注例 设函数 $f(x)$ 具有连续导数，求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x (x-t)f'(t)\mathrm{d}t\right]$.

解 首先，将“求导变量”x 移出被积函数，

$$\int_a^x (x-t)f'(t)\mathrm{d}t=\int_a^x xf'(t)\mathrm{d}t-\int_a^x tf'(t)\mathrm{d}t=x\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t-\int_a^x tf'(t)\mathrm{d}t,$$

然后，使用变限积分求导公式，于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x (x-t)f'(t)\mathrm{d}t\right]=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t+xf'(x)-xf'(x)=f(x)-f(a).$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(四)反常积分

1. 反常积分的概念的通俗理解

反常积分的概念很容易从定积分的概念中引出. 前面已经指出，定积分存在有两个必要条件：一是积分区间有限，二是被积函数有界. 如果破坏了积分区间的有限性，就引出无穷区间上的反常积分；如果破坏了被积函数的有界性，就引出无界函数的反常积分. 我们以无穷区间上的反常积分为例，来通俗地解释一下到底什么是反常积分.

定积分的几何背景是一个曲边梯形的面积，现在我们假设曲边梯形的底边长 $l\to+\infty$，高为 $h=f(x)$，则面积 $S=l\cdot h$，问题是，什么情况下此面积才会存在呢？我们自然想到极限理论中的未定式“$\infty\cdot 0$”型，当 $x\to+\infty$，也就是底边长 $l\to+\infty$ 时，只有 $f(x)\to 0$，S 才可能存在，故一般来说，

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

反过来说，若 $a>0$，高 $h=\frac{1}{\sqrt{x}}$，当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{\sqrt{x}}\to 0$，虽然高 $h\to 0$，但面积 $S=\int_a^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\to+\infty$，发散. 很好理解，这是因为高 h“无穷小的程度”小于底边长 l“无穷大的程度”，结果还是会发散.

所以，高 $h=f(x)$ 的“无穷小的程度”就成为反常积分敛散性判别中的关键. 一般来说，

$f(x)$**“越小”，则** $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$**“越容易收敛”.**

这个结论对于理解后面的敛散性判别法有着重要的意义，即便我在下面会给出一个令人遗憾的特例，它也不会影响上述结论的重要地位.

【注】 事实上，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛不一定能推出 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. 比如，设

$$f(x)=\begin{cases} n, & x\in\left[n,n+\frac{1}{n\cdot 2^n}\right],n=1,2,\cdots,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x + \int_1^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^2 0\mathrm{d}x + \int_2^{\frac{17}{8}} 2\mathrm{d}x + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$.

这是一个“特例”，为什么会出现这种情形？你看 $f(x)$ 的正值区间是 $\left[n, n+\frac{1}{n\cdot 2^n}\right]$，其区间长度为 $\frac{1}{n\cdot 2^n}$，而其“高”为 n，故此面积为 $\frac{1}{2^n}$，依然可以收敛是因为正值区间上底边长“无穷小的程度”超过了高“无穷大的程度”.

2. 无穷区间上反常积分的概念与敛散性

(1)$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的定义为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

若上述极限存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**，否则称为**发散**.

(2)$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 的定义为 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

若上述极限存在，则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**，否则称为**发散**.

(3)$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的定义为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

若右边两个反常积分都收敛，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**，否则称为**发散**.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 在反常积分中，一般把“∞”和使得函数极限为无穷的点（瑕点）统称为奇点.

3. 无界函数的反常积分的概念与敛散性

(1)若 b 是 $f(x)$ 的唯一瑕点，则无界函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

若上述极限存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**，否则称为**发散**.

【注】 当 $x=b$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点时，$f(x)$ 便是一个无界函数了，积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也可能存在. 细心的考生可能会联想到，前面我们不是说“$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在的必要条件是 $f(x)$ 有界”吗？这不是矛盾了吗？事实上，前面所说的 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是**定积分（黎曼积分）**，而这里的 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是**反常积分**，它们并不是一个概念，所以没有任何矛盾. 只是当考生读完这一段后，最好今后在提到积分存在时，特别强调一下，是定积分存在（黎曼可积，常义可积），还是反常积分存在（广义可积）.

(2)若 a 是 $f(x)$ 的唯一瑕点，则无界函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

若上述极限存在，则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$**收敛**，否则称为**发散**.

(3)若$c\in(a,b)$是$f(x)$的唯一瑕点，则无界函数$f(x)$的反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若上述右边两个反常积分都收敛，则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$**收敛**，否则称为**发散**.

关于敛散性的判别，具体参看“基础例题精解”的“六、反常积分的计算与敛散性判别”部分.

二、计算

(一)不定积分的积分法

1. 基本积分公式

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

①$\int x^k\mathrm{d}x=\frac{1}{k+1}x^{k+1}+C,k\neq-1;$
$\begin{cases}\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+C,\\ \int\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}+C.\end{cases}$

②$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$

③$\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C;\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C,a>0$且$a\neq1.$

④$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C;\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C;$

$\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C;\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C;$

$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C;$

$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C;$

$\int\sec^2x\mathrm{d}x=\tan x+C;\int\csc^2x\mathrm{d}x=-\cot x+C;$

$\int\sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C;\int\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C.$

⑤$\begin{cases}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C,\\ \int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C(a>0).\end{cases}$

⑥$\begin{cases}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C,\\ \int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C(a>0).\end{cases}$

⑦$\begin{cases}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C(\text{常见}a=1),\\ \int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C(|x|>|a|).\end{cases}$

⑧$\int\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\left(\int\frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C\right)$.

⑨$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C(a>|x|\geqslant 0)$.

⑩$\int\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C\left(\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$;

$\int\cos^2x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C\left(\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$;

$\int\tan^2x\mathrm{d}x=\tan x-x+C(\tan^2x=\sec^2x-1)$;

$\int\cot^2x\mathrm{d}x=-\cot x-x+C(\cot^2x=\csc^2x-1)$.

2. 凑微分法

(1)基本思想 $\int f[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x=\int f[g(x)]\mathrm{d}[g(x)]=\int f(u)\mathrm{d}u$.

当被积函数比较复杂时，拿出一部分放到 d 后面去，若能凑成$\int f(u)\mathrm{d}u$的形式，则凑微分成功. 比如，

$$\int\frac{\ln^5x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln^5x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int\ln^5x\mathrm{d}(\ln x)=\frac{\ln^6x}{6}+C.$$

(2)熟练掌握基本积分公式及常用的凑微分公式. 比如，能熟练计算下面这种题目：

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^3}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)}{\sqrt{4-\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2}}=\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)}{2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)^2}}=\frac{2}{3}\arcsin\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)+C.$$

3. 换元法

(1)基本思想 $\int f(x)\mathrm{d}x\xrightarrow{x=g(u)}\int f[g(u)]\mathrm{d}[g(u)]=\int f[g(u)]g'(u)\mathrm{d}u$.

当被积函数不容易积分(比如含有根式，含有反三角函数)时，可以通过换元的方法从 d 后面拿出一部分放到前面来，就成为$\int f[g(u)]g'(u)\mathrm{d}u$的形式，若 $f[g(u)]g'(u)$ 容易积分，则换元成功.

【注】 $x=g(u)$须是单调可导函数，且不要忘记计算结束后用反函数 $u=g^{-1}(x)$回代.

(2)归纳总结换元法的思维结构.

①三角函数代换——当被积函数含有如下根式时，可作三角代换，这里 $a>0$.

$$\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}\xrightarrow{令}x=a\sin t,|t|<\frac{\pi}{2},\\ \sqrt{a^2+x^2}\xrightarrow{令}x=a\tan t,|t|<\frac{\pi}{2},\\ \sqrt{x^2-a^2}\xrightarrow{令}x=a\sec t,\begin{cases}若\ x>0,则\ 0<t<\frac{\pi}{2},\\ 若\ x<0,则\ \frac{\pi}{2}<t<\pi.\end{cases}\end{cases}$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

②恒等变形后作三角函数代换——当被积函数含有根式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 时，可先化为以下三种形式 $\sqrt{\varphi^2(x)+k^2}$，$\sqrt{\varphi^2(x)-k^2}$，$\sqrt{k^2-\varphi^2(x)}$，再作三角函数代换.

③根式代换——当被积函数含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$，$\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$，$\sqrt{ae^{kx}+c}$ 等时，一般令根式 $\sqrt{*}=t$（因为事实上，很难通过根号内换元的办法凑成平方，所以根号无法去掉）. 对既含有 $\sqrt[n]{ax+b}$，也含有 $\sqrt[m]{ax+b}$ 的函数，一般取 m,n 的最小公倍数 l，令 $\sqrt[l]{ax+b}=t$.

④倒代换——当被积函数分母的幂次比分子高两次及两次以上时，作倒代换，令 $x=\dfrac{1}{t}$.

⑤复杂函数的直接代换——当被积函数中含有 a^x，e^x，$\ln x$，$\arcsin x$，$\arctan x$ 等时，可考虑直接令复杂函数等于 t，值得指出的是，当 $\ln x$，$\arcsin x$，$\arctan x$ 与 $P_n(x)$ 或 e^{ax} 作乘法时（其中 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式），优先考虑分部积分法.

比如，能熟练计算这种题目：计算 $\int e^{\sqrt{2x-1}}dx$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

解　令 $t=\sqrt{2x-1}$，则 $x=\dfrac{t^2+1}{2}$，$dx=tdt$，于是

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{2x-1}}dx &= \int e^t t\,dt = \int t\,d(e^t)\\ &= te^t-\int e^t dt = te^t-e^t+C\\ &= (t-1)e^t+C\\ &= (\sqrt{2x-1}-1)e^{\sqrt{2x-1}}+C.\end{aligned}$$

4. 分部积分法

(1)基本思想 $\int u\,dv = uv-\int v\,du$.

一目了然，这个方法主要适用于求 $\int u\,dv$ 比较困难，而 $\int v\,du$ 比较容易的情形.

积分后会“简单”些的函数宜取作 v；微分后会“简单”些的函数宜取作 u. 选取的一般原则：设 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式，

①被积函数为 $P_n(x)e^{kx}$，$P_n(x)\sin ax$，$P_n(x)\cos ax$ 等形式时，一般来说选取 $u=P_n(x)$；

②被积函数为 $e^{ax}\sin bx$，$e^{ax}\cos bx$ 等形式时，u 可以取其中两因子中的任意一个；

③被积函数为 $P_n(x)\ln x$，$P_n(x)\arcsin x$，$P_n(x)\arctan x$ 等形式时，一般分别选取

$$u=\ln x,\quad u=\arcsin x,\quad u=\arctan x.$$

(2)分部积分法的推广公式与 $\int P_n(x)e^{kx}dx$，$\int P_n(x)\sin ax\,dx$，$\int P_n(x)\cos bx\,dx$.

设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 具有直到第 $(n+1)$ 阶的连续导数，并根据分部积分公式

$$\int u\,dv = uv-\int v\,du,$$

则有

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+u''v^{(n-2)}-\cdots+(-1)^n u^{(n)}v+(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx.$$

【注】 **证明**　在公式$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$中以$v^{(n)}$代替$v$，则

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}[v^{(n)}] = uv^{(n)} - \int v^{(n)}\mathrm{d}u = uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}\mathrm{d}x.$$

同理，可得

$$\int u'v^{(n)}\mathrm{d}x = u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)}\mathrm{d}x,$$

$$\int u''v^{(n-1)}\mathrm{d}x = u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n-2)}\mathrm{d}x,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\int u^{(n)}v'\mathrm{d}x = u^{(n)}v - \int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x.$$

联立以上式子，并保留第一个和最后一个积分，便可得到**分部积分法的推广公式**：

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x.$$

事实上，可写成如下表格

u的各阶导数	u	u'	u''	u'''	…	$u^{(n+1)}$
$v^{(n+1)}$的各阶原函数	$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	$v^{(n-1)}$	$v^{(n-2)}$	…	v

（⊕、⊖、$(-1)^{n+1}$）

计算方法：以u作起点左上、右下错位相乘，各项符号“+”“−”相间，最后一项为$(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x$.

对于$\int P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x$，$\int P_n(x)\sin ax\mathrm{d}x$，$\int P_n(x)\cos bx\mathrm{d}x$三种积分，其中$P_n(x)$是$x$的$n$次多项式，令$u = P_n(x)$，则$u^{(n+1)} = 0$，于是积分便可顺利算出.

比如，求不定积分$\int (x^3 + 2x + 6)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

则

x^3+2x+6	$3x^2+2$	$6x$	6	0
e^{2x}	$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$	$\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}$	$\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}$	$\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}$

利用上述表格，可得

$$\text{原式} = (x^3+2x+6)\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right) - (3x^2+2)\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right) + 6x\left(\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}\right) - 6\left(\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}\right) + \int 0\cdot\left(\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{17}{8}\right)\mathrm{e}^{2x} + C.$$

5. 有理函数的积分

(1)定义　形如$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x\ (n < m)$的积分称为**有理函数的积分**，其中$P_n(x)$，$Q_m(x)$分别是$x$的$n$次多项式和$m$次多项式.

(2)方法　先将$Q_m(x)$因式分解，再把$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$拆成若干项最简有理分式之和.

(3)分解的基本原则.

①$Q_m(x)$的一次单因式$ax+b$产生一项$\frac{A}{ax+b}$；

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

②$Q_m(x)$的k重一次因式$(ax+b)^k$产生k项$\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(ax+b)^k}$；

③$Q_m(x)$的二次单因式px^2+qx+r产生一项$\dfrac{Ax+B}{px^2+qx+r}$；

④$Q_m(x)$的k重二次因式$(px^2+qx+r)^k$产生k项

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r}+\frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}.$$

【注】 具体见例8.20，例8.21.

(二)定积分的计算

定积分的计算，主要依赖于牛顿-莱布尼茨公式.

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{F'(x)=f(x)} F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

牛顿
(1642－1726)

【注】 前面已经指出，含有间断点的函数也可能存在原函数，例如，

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处不连续，但显然$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$是$f(x)$的一个原函数，因为$f(x)$是在$[0,1]$上只有一个间断点$(x=0)$的有界函数，所以可积，从而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^1 = \sin 1.$$

这里用到了**牛顿-莱布尼茨公式的推广**：在积分区间$[a,b]$上只有有限个间断点的被积函数$f(x)$，只要其在$[a,b]$上存在原函数，牛顿-莱布尼茨公式依然成立.

莱布尼茨
(1646－1716)

由牛顿-莱布尼茨公式结合不定积分的计算方法，有定积分的换元积分法和分部积分法，分别如下.

1. 定积分的换元积分法

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，函数$x=\varphi(t)$满足①$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$；②$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)上有连续的导数，且其值域为$R_\varphi=[a,b]$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

【注】 当$\varphi(t)$的值域R_φ超出$[a,b]$，但$\varphi(t)$满足其余条件时，只要$f(x)$在R_φ上连续，则上述结论仍成立.

2. 定积分的分部积分法

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x,$$

这里要求$u'(x),v'(x)$在$[a,b]$上连续.

微信公众号：dlky66
(顶尖考研祝您上岸)

用牛顿-莱布尼茨公式或用分部积分法计算定积分，方法与求不定积分一致（只是要代入上、下限而已），而用换元法计算定积分时，有一些需特别注意的地方，这些注意的地方，在定理条件中已写明白，但要真正掌握，还需通过后面的例 8.26，例 8.27 来练习.

【注】 在计算定积分时，下面这些结论是很有用的.

(1) 设 $f(x)$ 为连续的偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $f(x)$ 为连续的奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0.$$

(3) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则对任意的实数 a，都有

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x,$$

即在长度为一个周期的区间上的定积分，与该区间的起点位置无关，其证明见例 8.5.

(4) 设 $f(x)$ 为连续函数，则

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b} f(a+b-x)\mathrm{d}x,$$

这叫“区间再现公式”，其证明见例 8.28.

(5) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n}x\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n}x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 为大于 1 的奇数},\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数},\end{cases}$

这个式子的证明见例 8.32.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础例题精解

一、一元函数积分学的概念与性质

1. 不定积分、定积分、变限积分和反常积分的概念与存在性

这是考生比较容易混淆、不好把握的考试内容.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 8.1 在区间 $[-1,2]$ 上，以下四个结论：

① $f(x)=\begin{cases}2, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 有原函数，但其定积分不存在；

② $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^{2}}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^{2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有原函数，其定积分也存在；

③$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$没有原函数，其定积分也不存在；

④$f(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$有原函数，其定积分也存在.

正确结论的个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

解　应选(B).

本题通过具体的例子考查考生是否能够明确区分不定积分与定积分的存在性.逐个分析即可.

对于$f(x)=\begin{cases}2, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$由于$x=0$是其跳跃间断点，根据不定积分存在定理，在任意一个包含$x=0$在其内部的区间$[a,b]$上，$f(x)$一定不存在原函数，但由于$f(x)$满足定积分存在定理，故定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在，所以①错误.

对于$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$x=0$是其振荡间断点，但是容易验证：

若$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$则$F'(x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$，所以$f(x)$存在原函数，但在任意一个包含$x=0$在其内部的区间$[a,b]$上，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$不存在，因为在$x=0$的邻域$f(x)$无界，所以②错误.

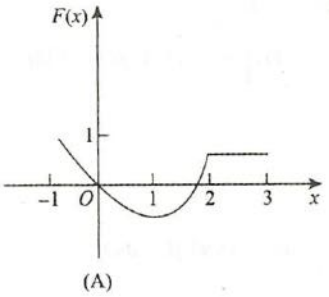
对于$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$由于$x=0$是其无穷间断点，所以$f(x)$在包含$x=0$在内的区间$[a,b]$上总不存在原函数，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也不存在，所以③正确.

对于$f(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$它在$(-\infty,+\infty)$内存在原函数$F(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$并且在任意一个包含$x=0$在其内部的区间$[a,b]$上，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也存在，因为$f(x)$有界且只有一个振荡间断点，所以④正确.

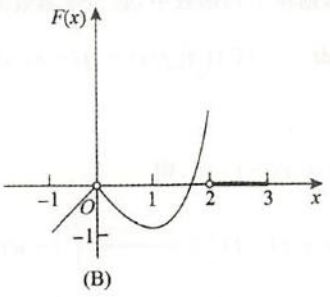
综上所述，故答案选择(B).

例 8.2　设函数$y=f(x)$在区间$[-1,3]$上的图形如图8-1所示，则函数$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$的图形为(　　).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)



(A)



(B)

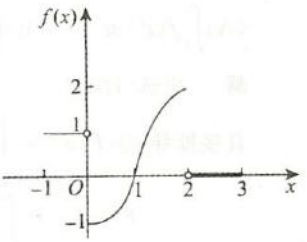
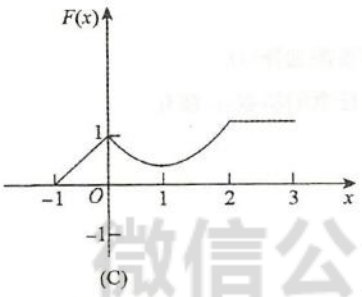
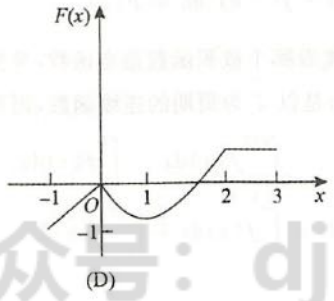


图 8-1



(C)



(D)

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

解　应选(D).

本题有三个要点:第一,变限积分只要存在就必连续,故排除(B);第二,由 $f(x)$ 有两个第一类间断点可知,$F(x)$ 应有两个不可导点,排除(A);第三,$F(0)=\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t=0$,所以 $F(x)$ 的图像过原点,排除(C).

故答案选择(D).

【注】 本题是考研真题,如果考生能够熟练掌握一元函数积分学的有关概念和性质,便可轻松解决这个问题,而无须进行烦琐的计算,从这个角度说,本题是概念题.

2. 积分函数的奇偶性、有界性、单调性、周期性

考生需要能够判别以积分形式定义的函数的奇偶性、有界性、单调性、周期性等,这是重点.

例 8.3　证明连续的奇函数的一切原函数都是偶函数;连续的偶函数的原函数中仅有一个原函数是奇函数.

证明　设 $f(x)$ 是连续函数,则其一个原函数可以表示为 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

若 $f(x)$ 是连续的奇函数,即有 $f(x)=-f(-x)$,且 $\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t=0$,则

$$F(-x)=\int_a^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} -\int_{-a}^{x} f(-u)\mathrm{d}u=\int_{-a}^{a} f(u)\mathrm{d}u+\int_a^x f(u)\mathrm{d}u=0+F(x)=F(x),$$

所以连续的奇函数的一切原函数都是偶函数.

若 $f(x)$ 是连续的偶函数,即有 $f(-x)=f(x)$,且 $\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$,则

$$F(-x)=\int_a^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} -\int_{-a}^{x} f(-u)\mathrm{d}u=-\int_{-a}^{a} f(u)\mathrm{d}u-\int_a^x f(u)\mathrm{d}u=-2\int_0^a f(u)\mathrm{d}u-F(x),$$

只有当 $\int_0^a f(u)\mathrm{d}u=0$ 时,$F(-x)=-F(x)$,即连续的偶函数 $f(x)$ 的原函数中仅有一个原函数为奇函数.

例 8.4 设函数 $f(x)$ 连续，则在下列函数中，必为偶函数的是(　　).

(A)$\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$　　(B)$\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$　　(C)$\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$　　(D)$\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$

解　应选(D).

直接推导，令 $F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$，则

$$F(-x)=\int_0^{-x} t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} \int_0^x (-u)[f(-u)+f(u)](-\mathrm{d}u)$$

$$=\int_0^x u[f(u)+f(-u)]\mathrm{d}u=F(x).$$

也可以根据例 8.3 的结论，直接看哪个被积函数是奇函数，显然答案选择(D).

例 8.5 证明：若函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则对任意的实数 a，都有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.$

设 $t=x-T$，则

$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

例 8.6 若连续函数 $f(x)$ 以 T 为周期，证明 $f(x)$ 的一切原函数也以 T 为周期的充要条件是 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$.

证明　必要性. 已知连续函数 $f(x)$ 及其任一原函数 $F(x)$ 都以 T 为周期，则有

$$f(x+T)=f(x),\quad F(x+T)=F(x).$$

由牛顿-莱布尼茨公式得

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_0^T=F(T)-F(0)=0.$$

充分性. 由例 8.5 的结论，对任意的实数 a，有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$，因此

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{a+T}=F(a+T)-F(a)=0.$$

故 $F(x)$ 是周期为 T 的函数，又 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，故 $f(x)$ 的一切原函数均以 T 为周期.

例 8.7 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负的连续函数，且 $f(x)$ 不恒等于零，证明必有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

证明　因函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒等于零，且非负，故至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)\neq 0$，即 $f(x_0)>0$.

因函数 $f(x)$ 连续，故有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)>0$，由极限的保号性知，存在 $\delta>0$ 与 $\eta>0$，使得当

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

$x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$时，恒有 $f(x)\geqslant\eta>0$.

根据定积分的不等式性质，便有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\eta\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\mathrm{d}x=2\eta\delta>0$.

【注】 作为该命题的推论，若连续函数 $f(x),g(x)$ 满足 $f(x)\geqslant g(x)$，且 $f(x)$ 不恒等于 $g(x)$，又 $a<b$，则必有严格不等式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

二、不定积分的基本计算

考研数学基本都是考常规计算，不涉及太强的技巧性，也就是说题目的门槛不高，考生都容易上手，所以，一定要加强基本计算的训练，如果基础的都算不对，就太可惜了.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 8.8 设 $\int(1-x^2)f(x^2)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则 $f(x)=$（　　）.

(A) $(1-x)^{\frac{3}{2}}$　　(B) $(1-x)^{-\frac{3}{2}}$　　(C) $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$　　(D) $(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

解 应选(B).

本题为求积分的反问题，只须依原函数 $F(x)$ 的定义 $F'(x)=f(x)$ 来求解.

将所给表达式的等式两端分别关于 x 求导，得

$$\left[\int(1-x^2)f(x^2)\mathrm{d}x\right]'=(\arcsin x+C)',$$

即
$$(1-x^2)f(x^2)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

故
$$f(x^2)=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$f(x)=(1-x)^{-\frac{3}{2}}.$$

故选(B).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 8.9 求 $\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

解
$$\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

例 8.10 求 $\int\frac{1}{x(1+\ln x)}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{1}{x(1+\ln x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{1+\ln x}=\int\frac{\mathrm{d}(1+\ln x)}{1+\ln x}=\ln|1+\ln x|+C.$

例 8.11 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x(a>0)$.

解 设 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，$t=\arcsin\frac{x}{a}$，$-a\leqslant x\leqslant a$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$.

所以

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

例 8.12 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}(a>0)$.

解 设 $x=a\tan t$,则 $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$,当 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ 时,$x=a\tan t$ 存在反函数.

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{a\sqrt{\tan^2 t+1}}=\int\frac{\sec^2 t}{\sec t}\mathrm{d}t=\int\sec t\,\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C_1.$$

由 $\tan t=\frac{x}{a}$ 得 $\sec t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$,所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|\sec t+\tan t|+C_1=\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right)+C_1$$

$$=\ln(\sqrt{x^2+a^2}+x)+C.$$

微信公众号：djky66
(预见考研祝您上岸)

例 8.13 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)$.

解 设 $x=a\sec t$,有 $\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$. 当 $0<t<\frac{\pi}{2}$ 时,$x=a\sec t>0$,且存在反函数.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t=\int\sec t\,\mathrm{d}t=\ln(\sec t+\tan t)+C_1=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$$

当 $\frac{\pi}{2}<t<\pi$ 时,$x=a\sec t<0$,且存在反函数.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=-\int\sec t\,\mathrm{d}t=-\ln(-\sec t-\tan t)+C_2$$

$$=-\ln(-x+\sqrt{x^2-a^2})+C_3$$

$$=\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C.$$

综上,$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$.

例 8.14 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$.

解 本题主要考查三角函数的恒等变形、凑微分法、换元法等.

方法一 原式$=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

方法二 原式$=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)}=\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{2(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}\xlongequal{\cos x=u}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)^2}$

$$\overset{(*)}{=\!=}-\frac{1}{8}\int\left[\frac{1}{1-u}+\frac{3+u}{(1+u)^2}\right]\mathrm{d}u=\frac{1}{8}\left(\ln|1-u|-\ln|1+u|+\frac{2}{1+u}\right)+C$$

$$=\frac{1}{8}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{4(1+\cos x)}+C.$$

【注】 (1)(*)处的处理方法叫有理函数积分法，可参考例 8.20，例 8.21.

(2)由于使用方法不同，因此得到的不定积分的答案形式可能不同. 类似地，还有下面的例8.15.

例 8.15 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

解 本题主要考查三角函数的恒等变形、凑微分法.

方法一 原式 $=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C.$

方法二 原式 $=\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 8.16 求 $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$.

解 本题主要考查换元法、分部积分法.

方法一

$$\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x=x(\arcsin x)^2-\int\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin x\,\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

方法二 令 $u=\arcsin x$，则 $x=\sin u$，$\mathrm{d}x=\cos u\mathrm{d}u$，于是

$$\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x=\int u^2\cos u\mathrm{d}u=\int u^2\mathrm{d}(\sin u)=u^2\sin u-\int 2u\sin u\mathrm{d}u$$

$$=u^2\sin u+2u\cos u-2\sin u+C$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

例 8.17 求 $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

解 本题主要考查换元法、分部积分法.

令 $u=\sqrt{e^x-1}$，则 $x=\ln(1+u^2)$，$\mathrm{d}x=\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$，从而

$$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u=2\int\ln(1+u^2)\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-\int\frac{4u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u=2u\ln(1+u^2)-4u+4\arctan u+C$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$$

例 8.18 求 $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解 本题涉及换元法、凑微分法和分部积分法.

方法一 设 $x=\tan t$，则

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{e^t \tan t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\sec^2 t dt = \int e^t \sin t dt,$$

又

$$\int e^t \sin t dt = -\int e^t d(\cos t) = -\left(e^t \cos t - \int e^t \cos t dt\right)$$

$$= -e^t \cos t + e^t \sin t - \int e^t \sin t dt,$$

故原式 $= \int e^t \sin t dt = \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$

方法二

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\arctan x}) = \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$= \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\arctan x}) = \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,$$

移项整理，得

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 8.19 求 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}$.

解 本题是一道综合题，涉及换元法、凑微分法、分部积分法以及有理函数的积分.

方法一

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2x-4}} = -\frac{1}{x\sqrt{2x-4}} - \int \frac{1}{x\sqrt{(2x-4)^3}}dx,$$

对上式右边的第二项，令 $\sqrt{2x-4}=t$，则 $x=\frac{t^2+4}{2}$，$dx=tdt$，于是

$$\int \frac{1}{x\sqrt{(2x-4)^3}}dx = \int \frac{2t}{(t^2+4)t^3}dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+4-t^2}{(t^2+4)t^2}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+4}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}\right) - C$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2x-4}} - \frac{1}{4}\arctan\frac{\sqrt{2x-4}}{2} - C,$$

因此 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$

方法二 令 $\sqrt{2x-4}=t$，则 $x=\frac{t^2+4}{2}$，$dx=tdt$，于是

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = \int \frac{4dt}{(t^2+4)^2},$$

再令 $t=2\tan u$，则 $dt=2\sec^2 u du$，于是

$$\text{原式} = 4\int \frac{2\sec^2 u du}{4^2\cdot \sec^4 u} = \frac{1}{2}\int \cos^2 u du = \frac{1}{4}\int(1+\cos 2u)du = \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}\sin 2u + C$$

$$= \frac{1}{4}\arctan\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{4+t^2}} + C = \frac{1}{4}\arctan\frac{\sqrt{2x-4}}{2} + \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + C,$$

因此 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$

例 8.20 求$\int \frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}\mathrm{d}x$.

解 本题主要考查有理函数的积分.

先将被积函数分解为简单分式之和. 这时应有分解式

$$\frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{(2x-1)^2},$$

问题是如何定出 A,B,C 这三个数. 右边通分后等号左、右的分子应恒等,即

$$4x^2-6x-1\equiv A(2x-1)^2+B(x+1)(2x-1)+C(x+1). \qquad (*)$$

由这恒等式不难定出 A,B,C 来,常用的方法有两种.

一种方法是将等式右端展开,得到

$$4x^2-6x-1\equiv(4A+2B)x^2+(-4A+B+C)x+(A-B+C),$$

因为这是恒等式,等号左、右 x 的同次幂的系数应该相等,故应有

$$\begin{cases}4A+2B=4,\\-4A+B+C=-6,\\A-B+C=-1,\end{cases}$$

解得 $A=1,B=0,C=-2$.

这种方法比较死板,且解系数满足的方程组有时较烦琐. 我们希望能求得 A,B,C 应满足的较简单的条件.

另一种方法是根据在恒等式中以变量 x 的任意值代入等号两边应该得到相同的值. 利用这一性质,赋予 x 适当的值,可以得到 A,B,C 应满足的简单条件. 例如,在(*)式中

令 $x=-1$,有 $9=9A$,$A=1$;

令 $x=\frac{1}{2}$,有 $-3=\frac{3}{2}C$,$C=-2$;

令 $x=0$,有 $-1=A-B+C$,可求出 $B=0$.

两种方法求得的结果一致:

$$\frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(2x-1)^2}.$$

因此可求得

$$\begin{aligned}\int\frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\int\frac{2}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x\\&=\ln|x+1|+\frac{1}{2x-1}+C.\end{aligned}$$

【注】 (1)在上述"另一种方法"中,有读者会问,令 $x=-1$,或令 $x=\frac{1}{2}$,则被积函数 $\frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}$不是无定义了吗?首先,我们给出的恒等式是没有分母的,不涉及 $x=-1$ 或 $\frac{1}{2}$ 时分母为 0 的问题;其次,请观察第一种方法,当我们令 x 的同次幂系数相等时,x 的取值不就是任意的吗?记住,我们的最终目的是求出 A,B,C.

(2)自然,以上两种定系数的方法可以联合起来应用. 见下例.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 8.21 求$\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}\mathrm{d}x$.

解 本题主要考查有理函数的积分.

因为 $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$,设

$$\frac{x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1},$$

这时应有

$$x\equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1), \tag{*}$$

在(*)式中,令 $x=1$,得 $1=2A$,$A=\frac{1}{2}$;令 $x=0$,得 $0=A-C$,$C=\frac{1}{2}$.

比较(*)式两端 x^2 的系数,有 $0=A+B$,

已求得 $A=\frac{1}{2}$,故有 $B=-\frac{1}{2}$. 于是可得

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x+C\\&=\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x+C.\end{aligned}$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

三、定积分的精确定义

一般说来,考生主要掌握下面这个式子:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n},$$

并且将式子中的 a,b 特殊化为 0,1 这两个数,得出的形式最为简单,也最利于解决问题:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

于是,"凑定积分定义"的步骤如下:

①先提出$\frac{1}{n}$;②再凑出$\frac{i}{n}$;③由于$\frac{i}{n}=0+\frac{1-0}{n}i$,故$\frac{i}{n}$可以读作"0 到 1 上的 x",且$\frac{1}{n}=\frac{1-0}{n}$,读作"0 到 1 上的 $\mathrm{d}x$",于是,"凑定义"完毕. 见例 8.23.

例 8.22 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i},$$

如果对和式$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$作放缩

$$n\cdot\frac{1}{n+n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\leqslant n\cdot\frac{1}{n+1},$$

则由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$,夹逼准则失效. 此时,我们改用定积分的精确定义,即

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2.$$

例 8.23 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+4}+\frac{n+3}{n^2+9}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n^2}\right)$.

解
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+4}+\frac{n+3}{n^2+9}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{n^2+i^2}$$

$$\overset{①}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2+ni}{n^2+i^2}\cdot\frac{1}{n}\overset{②}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\overset{③}{=}\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

其中①,②,③分别对应“凑定积分定义”的三步.

四、定积分的计算

定积分的计算,除了要用到不定积分的基本积分法,还有自己的特色,这部分内容极其丰富,需要考生狠下功夫.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 8.24 设 $a>0$,则 $\int_{-a}^{a}(x-a)\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=$(　　).

(A) $-\frac{1}{2}\pi a^2$　　(B) $\frac{1}{2}\pi a^2$　　(C) $\frac{1}{2}\pi a^3$　　(D) $-\frac{1}{2}\pi a^3$

解 应选(D).

对于积分区间为对称区间的情形,可考虑将被积函数恒等变形以利用积分对称性简化运算.

由于
$$\int_{-a}^{a}(x-a)\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}x\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x-\int_{-a}^{a}a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x,$$

上式右端两个积分的积分区间都为对称区间,$x\sqrt{a^2-x^2}$ 为奇函数,$a\sqrt{a^2-x^2}$ 为偶函数,故
$$\int_{-a}^{a}x\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=0,\quad\int_{-a}^{a}a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^a a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x,$$

因此
$$\int_{-a}^{a}(x-a)\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=-2a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x.$$

注意 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 是以原点为圆心、a 为半径的上半圆周,由定积分几何意义可知 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$ 为圆面积的 $\frac{1}{4}$,因此
$$\int_{-a}^{a}(x-a)\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=-2a\cdot\frac{1}{4}\pi a^2=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

故选(D).

【注】 本题考查了定积分的对称性、几何意义及定积分关于被积函数的可加性.

例 8.25 设
$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4x\mathrm{d}x,\quad N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)\mathrm{d}x,\quad P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^4x)\mathrm{d}x,$$

则(　　).

(A)$N<P<M$　　(B)$M<P<N$　　(C)$N<M<P$　　(D)$P<M<N$

解　应选(D).

由于题目只考查三个积分值大小的比较,因此并不需要求出它们的值.积分区间为对称区间,可先考虑被积函数的奇偶性,并考虑定积分的不等式性质:

如果在$[a,b]$上,$f(x)\geqslant 0$,且$f(x)\not\equiv 0$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

注意到$\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x$为奇函数,因此

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x=0.$$

由于$\sin^3 x$为奇函数,$\cos^4 x$为偶函数,且$\cos^4 x\geqslant 0$,因此

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x>0.$$

由于$x^2\sin^3 x$为奇函数,$\cos^4 x$为偶函数,因此

$$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x<0.$$

因此有$P<M<N$,故选(D).

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 8.26　求$\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解　因被积函数为偶函数,故

$$\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

再作三角变换,令$x=\sin t$,当$x=0$时,可取$t=0$;当$x=1$时,可取$t=\dfrac{\pi}{2}$,且当$t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时,$x=\sin t$不超出原上、下限的区间$[0,1]$,在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上,$x'=x'(t)=\cos t$连续.于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t\right)\\&\overset{(*)}{=\!=}2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

【注】　(1)(*)处来自例 8.32 的结果.

(2)从原则上讲,作变换$x=\sin t$后,当$x=0$时,可取$t=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots$;当$x=1$时,可取$t=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\pm 2\pi,\cdots$,上、下限有多种组合可满足定理条件.但被积函数中$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|$,在不同组合中,此绝对值的处理有简有繁,应引起注意,不要自找麻烦.

例 8.27　求$\int_1^4\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　令$\sqrt{x}=t$,有$x=t^2$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.当$x=1$时,$t=1$;当$x=4$时,$t=2$.于是

$$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int_1^2 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2(t-\ln|1+t|)\Big|_1^2 = 2(1-\ln 3+\ln 2).$$

【注】 若一开始作的变换为 $x=t^2$，则当 $x=1$ 时，可取 $t=1$ 或 -1；当 $x=4$ 时，可取 $t=2$ 或 -2. 于是对于 t 的积分区间有 4 种取法：$\int_1^2$，$\int_1^{-2}$，$\int_{-1}^2$，$\int_{-1}^{-2}$，其中第 1 种已经用过，第 4 种为

$$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-2} \frac{2t}{1+|t|}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{-2} \frac{2t}{1-t}\mathrm{d}t = 2(1-\ln 3+\ln 2).$$

而第 2 种、第 3 种都超出了原上、下限范围. 例如第 2 种，当 t 在 1 与 -2 之间变化时，$x=t^2$ 的变化范围超出原上、下限的范围$[1,4]$，但计算结果仍然正确. 不过第 2,3,4 种方法，都要处理 $|t|$，会比较麻烦.

例 8.28 设 $f(x)$ 为连续函数，证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

证明 作变量代换，令 $x=a+b-t$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_b^a f(a+b-t)(-\mathrm{d}t)$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x,$$

证毕.

【注】 此结论一般被叫作“区间再现公式”，其证明过程比较简单，但其用处很大，可见例 8.29～例 8.31.

例 8.29 求 $\int_0^\pi x\sin^9 x\mathrm{d}x$.

解 设法消除 x. 使用“区间再现公式”，令 $x=\pi-t$，则

$$I = \int_0^\pi x\sin^9 x\mathrm{d}x = \int_\pi^0 (\pi-t)\sin^9 t(-\mathrm{d}t) = \int_0^\pi \pi\sin^9 t\mathrm{d}t - \int_0^\pi t\sin^9 t\mathrm{d}t,$$

从而

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^9 t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^9 t\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^9(\pi-t)(-\mathrm{d}t)\right]$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t\mathrm{d}t = \pi\times\frac{8}{9}\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3} = \frac{128\pi}{315}.$$

例 8.30 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$.

解 使用“区间再现公式”，令 $x=\frac{\pi}{4}-t$，$\tan x=\frac{1-\tan t}{1+\tan t}$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\frac{2}{1+\tan t}(-\mathrm{d}t)$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}t,$$

从而
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

例 8.31 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解 此题是三角有理式的积分,可按该类型积分的标准步骤去做,但比较烦琐. 现令 $x=\frac{\pi}{2}-t$,得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}(-\mathrm{d}t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t,$$

所以
$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

从而 $I=\frac{\pi}{4}$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 8.32 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x(n=0,1,\cdots)$,并求之.

解 先证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x(n=0,1,\cdots)$.

作变量代换. 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$,有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x(n=0,1,\cdots).$$

现用分部积分法计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$,将它记为 I_n. 于是

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1,$$

当 $n\geqslant 2$ 时,

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}(\sin^{n-1}x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}x\mathrm{d}x=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

于是
$$nI_n=(n-1)I_{n-2},\quad I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}(n=2,3,\cdots).$$

按此公式递推下去有

$$I_n=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1,\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0\end{cases}=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1,& n\text{ 为大于 1 的奇数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},& n\text{ 为正偶数}.\end{cases}$$

上式叫华里士公式.

【注】 利用华里士公式可快速计算某些特殊的定积分,如

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 x\,dx=\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{35\pi}{256},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 x\,dx=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{128}{315}.$$

例 8.33 设 n 为正整数,求 $\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx$.

解 $\sin^n x$ 是以 2π 为周期的周期函数,于是

$$\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x\,dx.$$

若 n 为正奇数,则 $\sin^n x$ 为奇函数;若 n 为正偶数,则 $\sin^n x$ 为偶函数.从而

$$\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx=\begin{cases}0, & n\text{ 为正奇数},\\ 2\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

当 n 为正偶数时,有

$$2\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x\,dx\right)(\text{第二个积分令 } x=\pi-t)$$

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n(\pi-t)(-dt)\right]$$

$$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt\right)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

$$=4\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

即

$$\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx=\begin{cases}0, & n\text{ 为正奇数},\\ 4\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}$$

例 8.34 设 n 为正整数,求 $\int_0^{2\pi}\cos^n x\,dx$.

解 $\cos^n x$ 是以 2π 为周期的周期函数,于是

$$\int_0^{2\pi}\cos^n x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^n x\,dx=2\int_0^{\pi}\cos^n x\,dx$$

$$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n x\,dx\right)(\text{第二个积分令 } x=\pi-t)$$

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n(\pi-t)(-dt)\right]$$

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t)^n dt\right].$$

当 n 为正奇数时,$(-\cos t)^n=-\cos^n t$,于是原积分$=0$;

当 n 为正偶数时,原积分$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$,由例 8.32 及例 8.33,有

$$\int_0^{2\pi}\cos^n x\,dx=\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx=\begin{cases}0, & n\text{为正奇数},\\ 4\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}.\end{cases}$$

【注】 上面三个例子的结论，读者应牢记，这对考研很有帮助，请看下面这个例子.

例 8.35 求 $\int_0^6 x^2\sqrt{6x-x^2}\,dx$.

解 先配方，即

$$\sqrt{6x-x^2}=\sqrt{9-(x^2-6x+9)}=\sqrt{3^2-(x-3)^2},$$

再令 $x-3=3\sin t$，有

$$dx=3\cos t\,dt,\quad \sqrt{6x-x^2}=\sqrt{9(1-\sin^2 t)}=3|\cos t|,$$

则

$$\begin{aligned}\int_0^6 x^2\sqrt{6x-x^2}\,dx&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3+3\sin t)^2\cdot 3|\cos t|\cdot 3\cos t\,dt\\&=81\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin t+\sin^2 t)\cos^2 t\,dt\\&=81\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt+162\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\,dt+81\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)\cos^2 t\,dt\\&=162\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt+0+162\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt-162\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt\\&=324\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-162\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{405}{8}\pi.\end{aligned}$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 8.36 如图 8-2 所示，曲线段的方程为 $y=f(x)$，函数 $y=f(x)$ 在区间$[0,a]$上有连续导数，则定积分$\int_0^a xf'(x)\,dx$ 等于(　　).

(A)曲边梯形 $ABOD$ 的面积

(B)梯形 $ABOD$ 的面积

(C)曲边三角形 ACD 的面积

(D)三角形 ACD 的面积

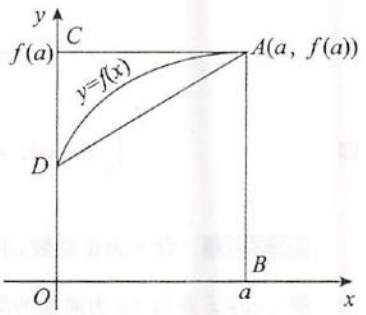


图 8-2

解 应选(C).

本题考查的知识点为定积分的几何意义与分部积分公式，只须依对应图形的面积关系式判定.

由于 $$\int_0^a xf'(x)\,dx=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)\,dx=af(a)-\int_0^a f(x)\,dx,$$

且 $af(a)$ 表示矩形 $ABOC$ 的面积，$\int_0^a f(x)\,dx$ 表示曲边梯形 $ABOD$ 的面积，因此$\int_0^a xf'(x)\,dx$ 表示曲边三角形 ACD 的面积，故选(C).

例 8.37 设 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}\,dt$，则$\int_0^1 xf(x)\,dx=$(　　).

(A) $\frac{1}{4}(e^{-1}+1)$　　(B) $\frac{1}{4}(e^{-1}-1)$　　(C) $\frac{1}{4}(e+1)$　　(D) $\frac{1}{4}(e-1)$

解 应选(B).

由于 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$ 不能积出来，因此这类题目只能利用定积分的性质或其他运算避开求 $f(x)$.

由分部积分公式有 $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot f'(x)dx$，可见，如果能得出 $f(1)$，$f'(x)$，即可求解本题.

令 $x=1$，由 $f(x)$ 表达式可得 $f(1)=\int_1^1 e^{-t^2}dt=0$，又 $f'(x)=e^{-x^4}(x^2)'=2xe^{-x^4}$，因此

$$\int_0^1 xf(x)dx=-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot 2xe^{-x^4}dx=-\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx=\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-x^4}d(-x^4)$$

$$=\frac{1}{4}e^{-x^4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(e^{-1}-1).$$

故选(B).

五、变限积分

由于变限积分就是一种函数，因此其考题也很丰富、精彩. 需要注意的已经在“基础内容精讲”“一”中的“(三)3. 变限积分的求导公式”处讲述过.

微信公众号：diky66
(预类考研祝您上岸)

例 8.38　设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$，则 $F(x)$ (　　).

(A)为正常数　　(B)为负常数　　(C)恒为零　　(D)不为常数

解　应选(A).

因 $e^{\sin x}\sin x$ 是以 2π 为周期的可积函数，所以

$$\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}d(-\cos t)$$

$$=-e^{\sin t}\cos t\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}(-\cos t)e^{\sin t}\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\cos^2 t\,dt,$$

又 $e^{\sin x}\cos^2 x\geqslant 0$，故选(A).

【注】　若 $f(x)$ 是以 T 为周期的可积函数，则

$$\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T}f(x)dx,$$

a 为任意常数. 这个结论十分重要，请读者牢记.

例 8.39　设函数 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\left[\int_0^x tf(x^2-t^2)dt\right]=$ (　　).

(A)$xf(x^2)$　　(B)$-xf(x^2)$　　(C)$2xf(x^2)$　　(D)$-2xf(x^2)$

解　应选(A).

“求导变量”x 出现在了被积函数中，必须通过变量代换 $x^2-t^2=u$，将其移出被积函数，才能使用变限积分求导公式.

令 $x^2-t^2=u$，则 $-2tdt=du$，当 $t=0$ 时，$u=x^2$；当 $t=x$ 时，$u=0$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u\right]=xf(x^2).$$

故答案选择(A).

例 8.40 曲线 $y=\int_0^{\sin x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在点(0,0)处的法线方程为(　　).

(A)$y=\frac{1}{2}x$　　(B)$y=-\frac{1}{2}x$　　(C)$y=x$　　(D)$y=-x$

解　应选(D).

欲求曲线在给定点处的法线方程,应先检查此点是否在曲线上,如果此点在曲线上,再求该点处切线的斜率.

易知点(0,0)在曲线 $y=\int_0^{\sin x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 上.

由于 $y'=\mathrm{e}^{\sin^2 x}\cdot\cos x$, $y'\Big|_{x=0}=1$,可知切线斜率 $k=1$,法线斜率为 $-\frac{1}{k}=-1$,因此所求法线方程为 $y=-x$. 故选(D).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

六、反常积分的计算与敛散性判别

1. 计算

关于反常积分的计算有两点要讲.

第一,反常积分是变限积分的极限,也就是在一道积分题目的求解过程中,出现无穷区间或者瑕点,直接代入(做极限计算),这里仅注意计算规则即可,不必考虑其敛散性.

第二,如何识别反常积分?只要一看积分限有∞,便知这是无穷区间上的反常积分,所以此类反常积分是容易识别的.

无界函数的反常积分就较难识别了.一般是看被积函数是否有使其分母为零的点,但这既不是必要条件,也不是充分条件.例如 $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$,被积函数没有"分母",而 $x=0$ 是它的瑕点,所以该积分是反常积分.又如 $\int_0^1\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ 的下限 $x=0$ 使分母为0,但却不是反常积分.这是因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{2}{x^3}}{-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}2\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0,$$

所以 $\int_0^1\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ 不是反常积分.

话虽如此,但被积函数的分母为零仍是重要的识别标志.不但要看积分的上、下限,还要看区间内部是否有使 $f(x)\to\infty$ 的点.**不少考题故意将瑕点埋伏在区间内部,致使考生注意不到.**

例 8.41 计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

解　注意到被积函数含有绝对值符号且 $x=1$ 是其无穷间断点,故

$$\text{原式}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}+\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}.$$

而 $$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}=\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3}),$$

因此 $$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$$

例 8.42　计算 $I=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{1+x}+\mathrm{e}^{3-x}}$.

解　$$I=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x-3}}{\mathrm{e}^{2(x-1)}+1}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2}\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x-1})}{1+\mathrm{e}^{2(x-1)}}=\mathrm{e}^{-2}\cdot\arctan\mathrm{e}^{x-1}\Big|_{1}^{+\infty}$$

$$=\mathrm{e}^{-2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-2}.$$

例 8.43　求 $\int_{3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$.

解　原式 $=\int_{3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}}\xrightarrow{x-1=\sec\theta}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^4\theta\tan\theta}\mathrm{d}\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

例 8.44　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_{a}^{+\infty}4x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，求常数 a 的值.

解　右边 $=-2\int_{a}^{+\infty}x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})=-2x^2\mathrm{e}^{-2x}\Big|_{a}^{+\infty}+4\int_{a}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

$$=2a^2\mathrm{e}^{-2a}-(2x\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-2x})\Big|_{a}^{+\infty}=2a^2\mathrm{e}^{-2a}+2a\mathrm{e}^{-2a}+\mathrm{e}^{-2a}.$$

左边 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2a}{x+a}\right)^x=\mathrm{e}^{-2a}.$

于是，有 $\mathrm{e}^{-2a}=2a^2\mathrm{e}^{-2a}+2a\mathrm{e}^{-2a}+\mathrm{e}^{-2a}$，得 $a=0$ 或 $a=-1$.

2. 敛散性的判别

这是难点. 在《考试大纲》中，对反常积分敛散性判别的要求并不高，但是近几年却经常出现考题，且题目难度还比较大，从这个角度说，我们还是要仔细深入地来研究一下这个问题.

针对此类问题，我们需要掌握**两个重要结论**，并能够熟练地进行无穷小、无穷大比阶.

(1)无穷区间的反常积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$：在 $p>1$ 时收敛，在 $p\leqslant 1$ 时发散.

(2)无界函数的反常积分 $\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}(p>0$，奇点 $x=0)$：在 $0<p<1$ 时收敛，在 $p\geqslant 1$ 时发散.

例 8.45　判别反常积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\left(\arctan\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^{2\beta}}\mathrm{d}x\ (\alpha,\beta>0)$ 的敛散性.

解　积分存在唯一奇点 $x=+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\arctan\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x},\quad \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x},$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

故 $$\frac{\left(\arctan\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^{2\beta}}\sim\frac{1}{x^{\alpha-2\beta}}(x\to+\infty),$$

于是根据前面所说的重要结论(1),当 $\alpha-2\beta>1$ 时,积分收敛;当 $\alpha-2\beta\leqslant 1$ 时,积分发散.

例 8.46 已知 $\alpha>0$,则对于反常积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 的敛散性情况判别,正确的是(　　).

(A)当 $\alpha\geqslant 1$ 时,积分收敛　　(B)当 $\alpha<1$ 时,积分收敛

(C)敛散性与 α 的取值无关,必收敛　　(D)敛散性与 α 的取值无关,必发散

解 应选(B).

首先,考生需要掌握的已知结论是对于无界函数的反常积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^{p}}$ ($p>0$,奇点 $x=0$):在 $0<p<1$ 时收敛,在 $p\geqslant 1$ 时发散.

根据上述结论,作如下讨论:

当 $\alpha<1$ 时,取正数 ε 充分小,使得 $\alpha+\varepsilon<1$,由于

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha+\varepsilon}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to 0^+}x^{\varepsilon}\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{\varepsilon}x^{\varepsilon}\right)=0,$$

故当 $x\to 0^+$ 时,$\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}$ 是比 $\frac{\ln x}{x^{\alpha}}$ 高阶的无穷大量,于是 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 收敛,选项(B)正确;

当 $\alpha\geqslant 1$ 时,由于 $\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\infty$,故当 $x\to 0^+$ 时,$\frac{1}{x^{\alpha}}$ 是比 $\frac{\ln x}{x^{\alpha}}$ 低阶的无穷大量,于是 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 发散.

例 8.47 讨论 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{p}x}\mathrm{d}x$ 的敛散性,其中 p 为任意实数.

分析 本题考查反常积分的敛散性的计算判别法(通过计算结果来判别是否收敛),同样是历届考生复习比较薄弱的知识点,考生可回顾例 8.46,那里使用的是理论判别法(无法通过计算结果来判别是否收敛,只能用已有结论作比较判别).

解 ①当 $p=1$ 时,$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln|\ln x|\Big|_2^{+\infty}=+\infty$,发散;

②当 $p\neq 1$ 时,$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{p}x}=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_2^{+\infty},$$

$p>1$ 时,$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{1-p}=0$,故收敛;$p<1$ 时,$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{1-p}=+\infty$,故发散.

综上,$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{p}x}\mathrm{d}x$ $\begin{cases}\text{收敛}, & p>1\text{ 时},\\ \text{发散}, & p\leqslant 1\text{ 时}.\end{cases}$

基础习题精练

习题

8.1 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(x)\leqslant g(x)$,则对任何 $c\in(0,1)$,有(　　).

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{c}f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_{\frac{1}{2}}^{c}g(t)\mathrm{d}t$　　(B) $\int_{\frac{1}{2}}^{c}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^{c}g(t)\mathrm{d}t$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝你上岸)

(C) $\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_c^1 g(t)\mathrm{d}t$　　(D) $\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_c^1 g(t)\mathrm{d}t$

8.2 设 $f'(\ln x)=1+x$,则 $\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x=$(　　).

(A) $\frac{\mathrm{e}^2+1}{2}$　　(B) $\frac{1-\mathrm{e}^2}{2}$　　(C) $\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$　　(D) $-\frac{\mathrm{e}^2+1}{2}$

8.3 下列反常积分中收敛的是(　　).

(A) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$　　(C) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$　　(D) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{\frac{1}{2}}}$

8.4 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$ _____.

8.5 设 $f(x)$的一个原函数为 $\ln^2 x$,则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$ _____.

8.6 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ _____.

8.7 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=$ _____.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

8.8 求 $\int\frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$.

8.9 计算 $\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\mathrm{d}x(a>0$ 是常数).

8.10 求 $\int\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

8.11 计算 $\int\frac{\tan x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x(a,b$ 不同时为零).

8.12 求 $\int\max\{1,|x|\}\mathrm{d}x$.

8.13 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}$.

8.14 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

8.15 计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

8.16 计算 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

8.17 计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

8.18 求 $\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x$.

8.19 设 $x\geqslant -1$,求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t$.

8.20 设 $f(x)=\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}t$,求 $f'(x)$.

8.21 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^{t}\mathrm{d}t$，求常数 a.

8.22 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\sin x}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+e^{x}}, & x<0,\end{cases}$ 求 $\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x$.

解答

8.1 (D) **解** 设 $F(x)=g(x)-f(x)$，由已知条件知 $F(x)\geqslant 0$，因此有 $\int_{c}^{1}F(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$，即

$$\int_{c}^{1}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_{c}^{1}g(t)\mathrm{d}t.$$

故选(D).

8.2 (A) **解** 令 $\ln x=t$，则 $x=e^{t}$，从而 $f'(t)=1+e^{t}$，$f'(2x)=1+e^{2x}$，故

$$\int_{0}^{1}f'(2x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}(1+e^{2x})\mathrm{d}x=\left(x+\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{e^{2}+1}{2}.$$

故选(A).

8.3 (C) **解** 选项(A)，$\int_{e}^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(\ln x)^{2}\Big|_{e}^{+\infty}$，发散.

选项(B)，$\int_{e}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\int_{e}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_{e}^{+\infty}$，发散.

选项(C)，$\int_{e}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{2}}=\int_{e}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^{2}}=-\dfrac{1}{\ln x}\Big|_{e}^{+\infty}=-(0-1)=1$，收敛.

选项(D)，$\int_{e}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{\frac{1}{2}}}=\int_{e}^{+\infty}(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(\ln x)=2(\ln x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{e}^{+\infty}$，发散.

故选(C).

8.4 $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$ **解** 去掉根号将会使计算变得简单. 令 $\sqrt{x}=t$，$x=t^{2}$，则

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int t\cdot\frac{\arcsin t}{t}\mathrm{d}t=2\int\arcsin t\mathrm{d}t=2(t\arcsin t+\sqrt{1-t^{2}})+C$$

$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C.$$

8.5 $2\ln x-\ln^{2}x+C$ **解** 被积函数中有 $f'(x)$，用分部积分法.

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}[f(x)]=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\ln^{2}x+C,$$

其中

$$f(x)=(\ln^{2}x)'=\frac{2\ln x}{x},$$

于是

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=2\ln x-\ln^{2}x+C.$$

8.6 $\dfrac{\pi}{3}$ **解** 定积分 $\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$ 是一个常数，所以等式两端同时在 $[0,1]$ 上对 x 进行积分得

$$\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left[x^{3}\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x,$$

微信公众号：dky66
(顶尖考研祝您上岸)

即
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_0^1 + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

解得$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}$.

8.7 $(\sqrt{2x+1}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}+C$ **解** **方法一**

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x \xlongequal{\sqrt{2x+1}=t} \int \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t = \int t\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)$$
$$\xlongequal{\text{分部积分法}} t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + C = (\sqrt{2x+1}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}} + C.$$

方法二 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{凑微分法}} \int \sqrt{2x+1}\mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}(\sqrt{2x+1})$

$$= \int \sqrt{2x+1}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}) \xlongequal{\text{分部积分法}} \sqrt{2x+1}\mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}} - \int \mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}(\sqrt{2x+1})$$
$$= \sqrt{2x+1}\mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}} - \mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}} + C = (\sqrt{2x+1}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}} + C.$$

微信公众号：dky66
(顶尖考研祝您上岸)

8.8 **解** 当被积函数为幂函数与三角函数的乘积，且不能用凑微分法积分时，一定要用分部积分法积分.

因为分子与分母中三角函数的角度分别为$\frac{x}{2}$和x，所以首先要用三角恒等式变成同角度的三角函数形式.

方法一
$$\int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}\mathrm{d}x = \int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{8\sin^3\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \frac{x\cos\frac{x}{2}}{8\sin^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int x\sin^{-3}\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\sin\frac{x}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{8}\int x\mathrm{d}\left(\sin^{-2}\frac{x}{2}\right) = \frac{-x}{8\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{-x}{8\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}\cot\frac{x}{2} + C.$$

方法二
$$\int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}\mathrm{d}x = \int \frac{x\cos\frac{x}{2}}{8\sin^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int x\cot\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\cot\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{8}\int x\mathrm{d}\left(\cot^2\frac{x}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{8}x\cot^2\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\int \cot^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}x\cot^2\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\int\left(\csc^2\frac{x}{2}-1\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{-x}{8\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}\cot\frac{x}{2} + C.$$

8.9 **解** 令$\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = t$，$x = \frac{a\sin^2 t}{1-\sin^2 t} = a\tan^2 t$，于是

$$\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\mathrm{d}x = \int t\mathrm{d}(a\tan^2 t) = at\tan^2 t - a\int \tan^2 t\mathrm{d}t$$
$$= at\tan^2 t + a\int(1-\sec^2 t)\mathrm{d}t = at\tan^2 t + at - a\tan t + C$$
$$= (a+x)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} - \sqrt{ax} + C.$$

8.10 **解** 因为不满足凑微分法的条件，所以要用分部积分法.

方法一
$$\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx = -\int \arctan e^x d(e^{-x}) = -e^{-x}\arctan e^x + \int \frac{dx}{1+e^{2x}}$$
$$= -e^{-x}\arctan e^x + \int \left(1 - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)dx$$
$$= -e^{-x}\arctan e^x + x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C.$$

方法二 令 $e^x = t$,则
$$\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx = \int \frac{\arctan t}{t^2}dt = -\int \arctan t d\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t}\arctan t + \int \frac{dt}{t(1+t^2)}$$
$$= -\frac{1}{t}\arctan t + \int \frac{dt}{t} - \int \frac{tdt}{1+t^2} = -\frac{1}{t}\arctan t + \ln t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$$
$$= -\frac{1}{e^x}\arctan e^x + x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C.$$

8.11 **解** 当 $a=0, b\neq 0$ 时,原式 $= \frac{1}{b^2}\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \frac{1}{2b^2\cos^2 x} + C$;

当 $a\neq 0, b=0$ 时,
$$\text{原式} = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\sin x\cos x}dx = \frac{2}{a^2}\int \frac{1}{\sin 2x}dx$$
$$= \frac{1}{a^2}\ln|\csc 2x - \cot 2x| + C;$$

当 $ab\neq 0$ 时,
$$\text{原式} = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x(a^2\tan^2 x + b^2)}dx = \int \frac{\tan x d(\tan x)}{a^2\tan^2 x + b^2}$$
$$= \frac{1}{2a^2}\int \frac{d(a^2\tan^2 x + b^2)}{a^2\tan^2 x + b^2} = \frac{1}{2a^2}\ln(a^2\tan^2 x + b^2) + C.$$

8.12 **解** 设 $f(x) = \max\{1, |x|\}$,则
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1, \\ 1, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,因此必存在原函数 $F(x)$,即
$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + C_1, & x < -1, \\ x + C_2, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{x^2}{2} + C_3, & x > 1, \end{cases}$$

又 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续,可得 $\begin{cases} -\frac{1}{2} + C_1 = -1 + C_2, \\ 1 + C_2 = \frac{1}{2} + C_3, \end{cases}$ 令 $C_1 = C$,则可得 $C_2 = \frac{1}{2} + C$, $C_3 = 1 + C$. 故
$$\text{原式} = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + C, & x < -1, \\ x + \frac{1}{2} + C, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{x^2}{2} + 1 + C, & x > 1. \end{cases}$$

微信公众号 djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 本题事实上是一个分段函数的不定积分，这类问题的关键是分段求出每段上的原函数后，要适当调整每一段上的常数使其原函数在分段函数的分段点处连续.

8.13 解 当各项分母相同且均为 n 时，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x,$$

于是，先对 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}$ 进行放缩，有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n},$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=1\cdot\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

因此，由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}=\frac{2}{\pi}.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

8.14 解 令 $x_n=\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$，则

$$\ln x_n=\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n},$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln x_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x\\&=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=0-1=-1,\end{aligned}$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

8.15 解 令 $1-x=\sin t$，则

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x&=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{t\sin t}{\cos t}\cos t\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}t\sin t\mathrm{d}t=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}t\mathrm{d}(\cos t)\\&=-(t\cos t-\sin t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=1-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}.\end{aligned}$$

8.16 解 当被积函数为指数函数与三角函数的乘积时，不能使用凑微分法求出原函数，只能使用分部积分法.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\,dx+2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{x}{2}}d(\sqrt{\cos x})$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\,dx+2e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\,dx$$

$$=\sqrt[4]{8}(e^{\frac{\pi}{8}}-e^{-\frac{\pi}{8}}).$$

积分过程中，$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\,dx$ 被相互抵消，这是分部积分法的一种特殊类型，与循环积分类似.

8.17 解　令 $x=\pi-t$，则

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}(-dt)=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-I,$$

于是　$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 t}d(\cos t)=-\frac{\pi}{2}\cdot\arctan(\cos t)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}.$

微信公众号：djky66
(顶考考研祝您上岸)

8.18 解　如果作变换 $\sqrt[3]{x^2}=t$，则 $x=\pm\sqrt{t^3}$. 在 x 的区间 $[-1,1]$ 上的积分，应分两段 $[-1,0]$ 与 $[0,1]$ 来处理(即相应地，在前一段上取 $x=-\sqrt{t^3}$；在后一段上取 $x=\sqrt{t^3}$). 如果作变换 $\sqrt[3]{x}=t$，则 $x=t^3$. 虽然不必将区间 $[-1,1]$ 分两段处理，但也不是最好的办法. 经仔细审题发现

$$\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx=0+2\int_0^{1}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx,$$

其中前一项因为被积函数是奇函数，故在对称区间上的积分应为 0；后一项是因为被积函数在对称区间上是偶函数的缘故.

再作积分变量代换，令 $\sqrt[3]{x^2}=t$，有 $x=\sqrt{t^3}$，$dx=\frac{3}{2}\sqrt{t}dt$. 当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=1$. 于是

$$\text{原式}=3\int_0^{1}\frac{\sqrt{t}}{1+t}dt\xrightarrow{\sqrt{t}=u}6\int_0^{1}\frac{u^2}{1+u^2}du=6-6\arctan 1=6-\frac{3}{2}\pi.$$

【注】 可见仔细审题，利用积分性质，会给解题带来方便.

8.19 解　当 $-1\leqslant x<0$ 时，原式 $=\int_{-1}^{x}(1+t)dt=\frac{1}{2}(1+t)^2\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}(1+x)^2$；

当 $x\geqslant 0$ 时，原式 $=\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_0^{x}(1-t)dt=1-\frac{1}{2}(1-x)^2.$

故

$$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+x)^2, & -1\leqslant x<0,\\ 1-\frac{1}{2}(1-x)^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

8.20 解　当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\int_0^{1}t(t-x)dt=\frac{1}{3}-\frac{x}{2}$；

当 $0<x\leqslant 1$ 时，

$$f(x)=\int_0^{x}t(x-t)dt+\int_x^{1}t(t-x)dt$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3};$$

当 $x>1$ 时，

$$f(x)=\int_0^1 t(x-t)\mathrm{d}t=\frac{x}{2}-\frac{1}{3},$$

则
$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & x<0,\\ x^2-\dfrac{1}{2}, & 0<x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x>1,\end{cases}$$

又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{3}-\frac{x}{2}-\frac{1}{3}}{x-0}=-\frac{1}{2},\quad f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}}{x-0}=-\frac{1}{2},$$

可知 $f'_-(0)=f'_+(0)$，故 $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

又

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{6}}{x-1}=\frac{1}{2},\quad f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{x-1}=\frac{1}{2},$$

可知 $f'_-(1)=f'_+(1)$，故 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

综上，$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & x<0,\\ x^2-\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

8.21 解　由于
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=\mathrm{e}^a,$$

$$\int_{-\infty}^{a}t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=(t-1)\mathrm{e}^t\Big|_{-\infty}^{a}=(a-1)\mathrm{e}^a-\lim_{t\to-\infty}(t-1)\mathrm{e}^t=(a-1)\mathrm{e}^a,$$

因此 $a-1=1$，即 $a=2$.

8.22 解　$$\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x},$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}\xlongequal{\mathrm{e}^x=t}\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1}\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\ln\frac{t}{1+t}\Big|_{\mathrm{e}^{-1}}^{1}=-\ln 2+\ln(1+\mathrm{e}),$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\mathrm{d}x-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2},$$

从而
$$\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=-\ln 2+\ln(1+\mathrm{e})+2-\sqrt{2}.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第9讲 一元函数积分学的几何应用

基础知识结构

- 平面图形的面积
- 旋转体的体积
- 函数的平均值

微信公众号：ljky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础内容精讲

假设以下曲线都是连续的.

1. 用定积分表达和计算平面图形的面积

(1)曲线 $y=y_1(x)$ 与 $y=y_2(x)$ 及 $x=a,x=b(a<b)$ 所围成的平面图形的面积

$$S=\int_a^b \mid y_1(x)-y_2(x) \mid \mathrm{d}x.$$

(2)曲线 $r=r_1(\theta)$ 与 $r=r_2(\theta)$ 与两射线 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta(0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi)$ 所围成的曲边扇形的面积

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \mid r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta) \mid \mathrm{d}\theta.$$

2. 用定积分表达和计算旋转体的体积

(1)曲线 $y=y(x)$ 与 $x=a,x=b(a<b)$ 及 x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积

$$V=\int_a^b \pi y^2(x)\mathrm{d}x.$$

(2)曲线 $y=y_1(x)\geqslant 0$ 与 $y=y_2(x)\geqslant 0$ 及 $x=a,x=b(a<b)$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积

$$V=\pi\int_a^b \mid y_1^2(x)-y_2^2(x) \mid \mathrm{d}x.$$

(3)曲线 $y=y(x)$ 与 $x=a,x=b(0\leqslant a<b)$ 及 x 轴围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体的体积

$$V_y=2\pi\int_a^b x \mid y(x) \mid \mathrm{d}x. \tag{9-1}$$

【注】　公式(9-1)有时用起来很方便，现简单推导如下：

取$[x,x+\Delta x](\Delta x>0)$，得到一个小竖条，如图9-1的阴影区域所示，此小竖条绕着y轴旋转一周，成为一个“圆柱壳”，将其沿任何一条竖线“切开”，可展开为一个“长方体”，其体积为

$$dV_y = 2\pi x \mid y(x) \mid dx,$$

故
$$V_y = 2\pi\int_a^b x \mid y(x) \mid dx.$$

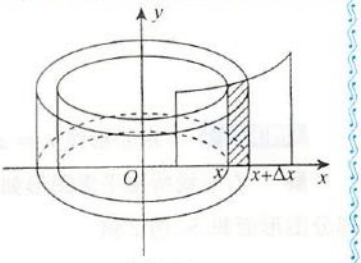


图 9-1

(4)曲线$y=y_1(x)$与$y=y_2(x)$及$x=a,x=b(0\leqslant a\leqslant b)$所围成的图形绕$y$轴旋转一周所成的旋转体的体积

$$V = 2\pi\int_a^b x \mid y_1(x)-y_2(x) \mid dx.$$

3. 用定积分表达和计算函数的平均值

设$x\in[a,b]$，函数$y(x)$在$[a,b]$上的平均值为$\bar{y}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b y(x)dx$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础例题精解

本部分内容大题、小题都常考，考生应熟记基本公式，并加强训练即可，没有什么难点. 考数学一、数学二的考生要注意弧长的计算问题，这是考试的热点. 弧长问题放在第15讲进行讲解.

例 9.1　求由曲线$y=\sin x,y=\cos x$及直线$x=0,x=\dfrac{\pi}{2}$所围平面图形的面积.

解　如图9-2所示，由$\begin{cases}y=\sin x,\\ y=\cos x,\end{cases}$知两曲线的交点为$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，故

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mid \sin x-\cos x \mid dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx\\ &= (\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 2(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

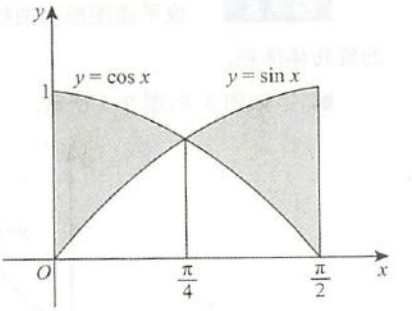


图 9-2

例 9.2　求由摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(a>0)$的一拱(见图9-3)与$x$轴所围平面图形的面积.

解　当$t=0,2\pi$时，$y=0$. 故当t由0变到2π时，曲线正好成一拱. 所以

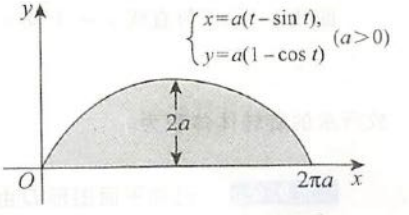


图 9-3

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

$$S=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)[a(t-\sin t)]'\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=3a^2\pi.$$

例 9.3 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 所围平面图形的面积.

解 心形线所围平面图形如图 9-4 所示，此图形关于极轴对称，因此所求图形面积 S 是位于极轴上半部分图形面积 S_1 的 2 倍.

$$S_1=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{4}a^2\pi,$$

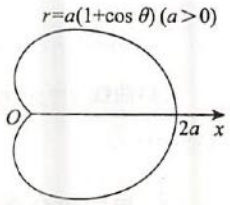


图 9-4

所以 $S=2S_1=\frac{3}{2}a^2\pi$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 9.4 求伯努利双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 围成的图形面积.

解 如图 9-5 所示，利用对称性，所求图形面积是阴影部分面积的 4 倍.

阴影部分的图形由射线 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{4}$ 与伯努利双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 围成，于是所求的平面图形面积为

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2.$$

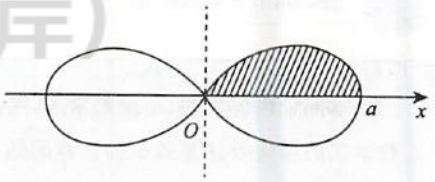


图 9-5

例 9.5 设平面图形由曲线 $y=x^2$ 与直线 $x=1$ 及 x 轴围成，求此平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积.

解 如图 9-6，图 9-7 所示.

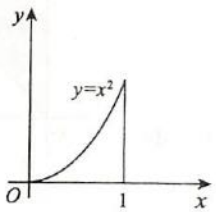


图 9-6

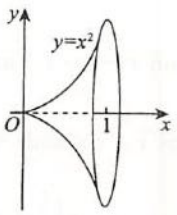


图 9-7

曲线 $y=x^2$ 与直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi(x^2)^2\mathrm{d}x=\pi x^4\mathrm{d}x,$$

故所求的旋转体体积为

$$V=\int_0^1\pi x^4\mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}.$$

例 9.6 已知平面图形 D 由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 围成，求 D 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体(旋转椭球体)体积.

解　该旋转椭球体也可以看作是由上半椭圆 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体，其体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x,$$

故所求的旋转体体积为

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4\pi}{3}ab^2.$$

例 9.7　曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形，求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解　在[1,2]上取积分微元，由“基础内容精讲”“2”中的“(3)”，得

$$\mathrm{d}V=2\pi x|y|\mathrm{d}x,$$

所以旋转体的体积为

$$V=\int_1^2 2\pi x|y|\,\mathrm{d}x=-2\pi\int_1^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 9.8　计算由摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$ 的一拱与 x 轴所围平面图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解　平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为

$$V_x=\pi\int_0^{2\pi a}y^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\mathrm{d}t$$

$$=5\pi^2a^3.$$

作平面图形如图 9-8 所示. 平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为

$$V_y=\pi\left[\int_0^{2a}x_2^2(y)\mathrm{d}y-\int_0^{2a}x_1^2(y)\mathrm{d}y\right]$$

$$=\pi\left[\int_{2\pi}^{\pi}a^2(t-\sin t)^2a\sin t\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}a^2(t-\sin t)^2a\sin t\mathrm{d}t\right]$$

$$=-\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\mathrm{d}t$$

$$=6\pi^3a^3,$$

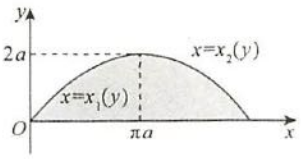


图 9-8

或者

$$V_y=2\pi\int_0^{2\pi a}xy(x)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)a(1-\cos t)a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=6\pi^3a^3.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 9.9　过坐标原点作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 以及 x 轴围成的向 x 轴负向无限伸展的平面图形记为 D. 求

(1)D 的面积 A；

(2)D 绕直线 $x=1$ 旋转一周所成的旋转体的体积 V.

解 设切点坐标为 $P(x_0,y_0)$，于是曲线 $y=e^x$ 在点 P 的切线斜率为

$$y'(x_0)=e^{x_0},$$

切线方程为

$$y-y_0=e^{x_0}(x-x_0).$$

它经过点(0,0)，所以 $-y_0=-x_0e^{x_0}$. 又因 $y_0=e^{x_0}$，代入求得 $x_0=1$，从而 $y_0=e^{x_0}=e$，切线方程为 $y=ex$，如图 9-9 所示.

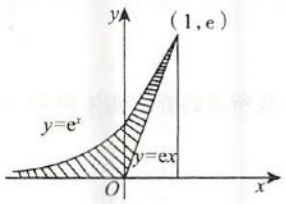


图 9-9

(1)取水平条面积微元，则 D 的面积

$$A=\int_0^e\left(\frac{y}{e}-\ln y\right)dy=\left(\frac{y^2}{2e}-y\ln y+y\right)\Big|_0^e=\frac{e}{2}+\lim_{y\to0^+}y\ln y=\frac{e}{2}.$$

(积分 $\int_0^e\ln y\,dy$ 为反常积分，$\lim\limits_{y\to0^+}y\ln y=0$ 可由洛必达法则得到)

(2)D 绕直线 $x=1$ 旋转一周所成的旋转体的体积微元为

$$dV=\left[\pi(1-\ln y)^2-\pi\left(1-\frac{y}{e}\right)^2\right]dy,$$

从而

$$V=\pi\int_0^e\left(\ln^2y-2\ln y+\frac{2y}{e}-\frac{y^2}{e^2}\right)dy$$

$$=\pi\left(y\ln^2y-4y\ln y+4y+\frac{y^2}{e}-\frac{y^3}{3e^2}\right)\Big|_0^e=\frac{5}{3}\pi e.$$

例 9.10 函数 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上的平均值为(　　).

(A)$2+\sqrt{3}$　　(B)$2+\sqrt{2}$　　(C)$2-\sqrt{2}$　　(D)$2-\sqrt{3}$

解 应选(D).

由连续函数在闭区间上的平均值的概念，知连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值为 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^bf(x)dx$.

因此

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-0}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)$$

$$=-2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{3}.$$

故选(D).

基础习题精练

习 题

9.1 已知曲线 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共切线，求：

(1)常数 a 及切点 (x_0,y_0)；

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(2)两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积 S.

9.2　设曲线 $y=x^2-2x(1\leqslant x\leqslant 3)$，$y=0$，$x=1$，$x=3$ 围成一平面图形 A，求：

(1)A 的面积 S；

(2)该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

9.3　已知一抛物线经过 x 轴上两点 $A(1,0)$，$B(3,0)$.

(1)证明两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积；

(2)计算(1)中两个平面图形绕 x 轴旋转一周所得的两个旋转体的体积之比.

9.4　求圆域 $x^2+(y-b)^2\leqslant k^2(0<k<b)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

9.5　设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$，$x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0$，$x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

(1)求 D_1 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_1，D_2 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_2；

(2)问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？并求此最大值.

9.6　设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成图形的面积为 S_2，并且 $a<1$.

(1)求 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

(2)求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

解答

9.1　**分析**　利用两条曲线都经过点 (x_0,y_0) 及两条曲线在点 (x_0,y_0) 处有公共切线可列出三个方程，从而可解出常数 a,x_0,y_0，然后可求出平面图形的面积.

解　(1)由题设条件可得

$$\begin{cases} y_0=a\sqrt{x_0}, \\ y_0=\ln\sqrt{x_0}, \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2x_0}, \end{cases}$$

解此方程组可得 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$x_0=\mathrm{e}^2$，$y_0=1$，于是切点为 $(\mathrm{e}^2,1)$.

(2)**方法一**　画出曲线 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\sqrt{x}$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 的图形，则两曲线与 x 轴围成的平面图形(见图 9-10)的面积

$$S=\int_0^1(\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}^2y^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{6}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}.$$

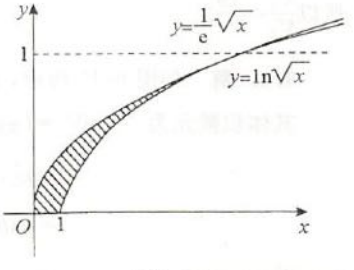


图 9-10

方法二　$S=\int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}}\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}^2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\sqrt{x}-\ln\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}.$

方法三　$S=\int_0^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{\mathrm{e}}\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}.$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

9.2 **解** (1)画出图形(见图 9-11),可见 $S=S_1+S_2$,其中

$$S_1=\int_1^2(2x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$S_2=\int_2^3(x^2-2x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3},$$

所以 $S=2$.

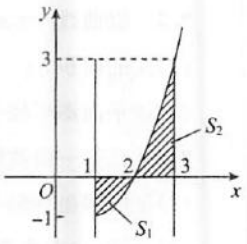


图 9-11

(2)**方法一** $V=V_1+V_2$,其中

$$V_1=\pi\int_{-1}^{0}(1+\sqrt{1+y})^2\mathrm{d}y-\pi=\frac{11\pi}{6},$$

$$V_2=27\pi-\pi\int_0^3(1+\sqrt{1+y})^2\mathrm{d}y=\frac{43\pi}{6},$$

所以 $V=9\pi$.

方法二 $V_1=2\pi\int_1^2x[0-(x^2-2x)]\mathrm{d}x=\frac{11\pi}{6}$, $V_2=2\pi\int_2^3x(x^2-2x)\mathrm{d}x=\frac{43\pi}{6}$,

所以 $V=9\pi$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

9.3 (1)**证明** **方法一** 设过 $A(1,0),B(3,0)$ 两点的抛物线方程为

$$y=a(x-1)(x-3),$$

则两坐标轴与该抛物线所围图形的面积为

$$S_1=\int_0^1|a(x-1)(x-3)|\mathrm{d}x=|a|\int_0^1(x^2-4x+3)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}|a|.$$

x 轴与该抛物线所围图形的面积为

$$S_2=\int_1^3|a(x-1)(x-3)|\mathrm{d}x=-|a|\int_1^3(x^2-4x+3)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}|a|,$$

所以 $S_1=S_2$.

方法二 因为 $\int_0^3a(x-1)(x-3)\mathrm{d}x=a\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)\Big|_0^3=0$,所以 $S_1=S_2$.

(2)**解** 两个平面图形绕 x 轴旋转一周所得的两个旋转体的体积分别为

$$V_1=\pi\int_0^1a^2[(x-1)(x-3)]^2\mathrm{d}x=\frac{38}{15}\pi a^2,$$

$$V_2=\pi\int_1^3a^2[(x-1)(x-3)]^2\mathrm{d}x=\frac{16}{15}\pi a^2,$$

所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{19}{8}$.

9.4 **解** 如图 9-12 所示,上半圆周为 $y_2=b+\sqrt{k^2-x^2}$,下半圆周为 $y_1=b-\sqrt{k^2-x^2}$.

其体积微元为 $\mathrm{d}V=(\pi y_2^2-\pi y_1^2)\mathrm{d}x$

$$=\pi[(b+\sqrt{k^2-x^2})^2-(b-\sqrt{k^2-x^2})^2]\mathrm{d}x$$

$$=4\pi b\sqrt{k^2-x^2}\mathrm{d}x,$$

则所求旋转体体积为 $V=4\pi b\int_{-k}^{k}\sqrt{k^2-x^2}\mathrm{d}x$

$$=8\pi b\int_0^k\sqrt{k^2-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=8\pi b\cdot\frac{\pi k^2}{4}=2\pi^2k^2b.$$

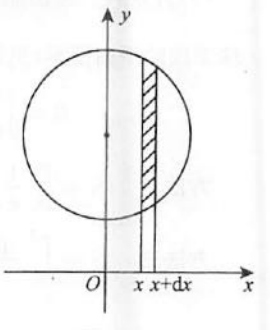


图 9-12

【注】　采用对 y 积分，即取微元 $[y, y+\mathrm{d}y]$ 亦可算出 V.

9.5　**解**　(1)由题意得，　$V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\dfrac{4}{5}\pi(32-a^5)$，

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=\pi a^4.$$

(2) 由(1)得，

$$V=V_1+V_2=\frac{4}{5}\pi(32-a^5)+\pi a^4.$$

令

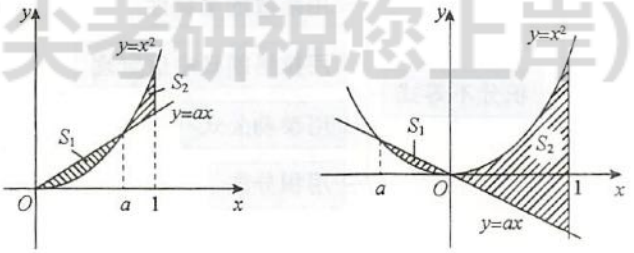
$$V'=4\pi a^3(1-a)=0,$$

得区间(0,2)内唯一的驻点 $a=1$，且 $V''(1)=-4\pi<0$，因此 $a=1$ 是极大值点，即最大值点，此时

$$V_{\max}=\frac{129}{5}\pi.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

9.6　**解**　(1)因为 $a<1$，所以可分成 $0<a<1$，$a\leqslant 0$ 两种情况，分别画出两种情况下的图形(见图9-13)，求出 S_1+S_2 的最小值后，即可确定 a 的值.



(a) $0<a<1$　　(b) $a\leqslant 0$

图 9-13

当 $0<a<1$ 时，

$$S=S_1+S_2=\int_0^a(ax-x^2)\mathrm{d}x+\int_a^1(x^2-ax)\mathrm{d}x=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3},$$

令 $S'(a)=a^2-\dfrac{1}{2}=0$，求得 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 又 $S''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}>0$，知 $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ 是极小值，即最小值；

当 $a\leqslant 0$ 时，

$$S=S_1+S_2=\int_a^0(ax-x^2)\mathrm{d}x+\int_0^1(x^2-ax)\mathrm{d}x=-\frac{a^3}{6}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3},$$

因为

$$S'(a)=-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(a^2+1)<0,$$

所以 S 单调减少，故 $a=0$ 时，S 取得最小值，$S(0)=\dfrac{1}{3}$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

比较可知，当 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ 是最小值.

(2) 由(1)可知旋转体体积为 $V_x=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\dfrac{1}{2}x^2-x^4\right)\mathrm{d}x+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\left(x^4-\dfrac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{30}\pi$.

第10讲 积分等式与积分不等式

基础知识结构

微信公众号：ljky66
(顶尖考研祝你上岸)

基础内容精讲

积分等式问题主要涉及积分形式的中值定理(见例 10.1,例 10.2),用夹逼准则求一类积分的极限(见例 10.3,例 10.4)与证明某些特殊的积分等式(见例 10.5);积分不等式问题主要涉及积分形式的不等式证明,可用函数的单调性(见例 10.6,例 10.7)、拉格朗日中值定理(见例 10.8)、泰勒公式(见例 10.9)与积分法(见例 10.10)来解决.

基础例题精解

一、积分等式

1. 用中值定理

例 10.1 设 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续且 $g(x)$不变号,证明:至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

证明 当 $g(x)\equiv 0$ 时,有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\cdot 0\mathrm{d}x = 0,$$

此时 ξ 可以是 $[a,b]$ 上任何一点，都会有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 成立.

当 $g(x)\not\equiv 0$ 时，必存在 $x_0\in[a,b]$，$g(x_0)$ 或者大于零或者小于零. 不妨设 $g(x_0)>0$，此时由 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号且连续，必有 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$. 又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，必能取到最小值 m 与最大值 M，于是对于一切 $x\in[a,b]$，都有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M \Rightarrow mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)\Rightarrow$$

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b mg(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x = M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$，得 $m \leqslant \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M.$

根据连续函数的介值定理知，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = f(\xi)$，即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 本题是推广的积分中值定理. 怎么证 $\xi\in(a,b)$？见下例.

设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 若 $g(x)\equiv 0$，结论显然成立；

若 $g(x)\not\equiv 0$，由于不变号，不妨设 $g(x)>0$. 令

$$F(x) = \int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t, \quad G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理，有 $\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$，即

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - 0}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - 0} = \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)},$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \xi\in(a,b),$$

其中 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$. 得证.

例 10.2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为 0 且二阶可导，$f(a)>0$，$f(b)>0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，证明：

(1) 存在不同的 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$；

(2) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)>0$.

证明 (1) 依题设，$f(a)>0$，$f(b)>0$.

由$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$知，存在$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)<0$，否则$f(x)$非负，且$f(x)\not\equiv 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$，矛盾.

由零点定理，存在$\xi_1\in(a,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,b)$，使得$f(\xi_1)=0$，$f(\xi_2)=0$.

(2) $f(x)$在$[a,\xi_1]$，$[\xi_2,b]$上分别应用拉格朗日中值定理，则存在$\eta_1\in(a,\xi_1)$，使得

$$f'(\eta_1)=\frac{f(\xi_1)-f(a)}{\xi_1-a}<0,$$

存在$\eta_2\in(\xi_2,b)$，使得

$$f'(\eta_2)=\frac{f(b)-f(\xi_2)}{b-\xi_2}>0.$$

$f'(x)$在$[\eta_1,\eta_2]$上应用拉格朗日中值定理，则存在$\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\eta_2)-f'(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}>0.$$

2. 用夹逼准则

例 10.3 求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

解 因为$0\leqslant\frac{x^n}{1+x}\leqslant x^n(\forall x\in[0,1])$，所以$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{1+n}$，故由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=0.$$

例 10.4 (1)比较$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$与$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$的大小，说明理由.

(2)记$u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

解 (1)当$0\leqslant t\leqslant 1$时，$0\leqslant\ln(1+t)\leqslant t$，所以

$$0\leqslant|\ln t|[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n|\ln t|,$$

根据积分的保号性，得

$$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t.$$

(2)由(1)知，$$0\leqslant u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t.$$

又因为 $$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t=-\int_0^1 t^n\ln t\mathrm{d}t=-\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\Big|_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)^2},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t=0$，于是由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

3. 用积分法

例 10.5 设$f(x)$是连续的偶函数，且是以T为周期的周期函数.

(1)证明$\int_0^{nT}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{n^2T}{2}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x(n=1,2,3,\cdots)$；

(2)利用(1)的结论计算$I=\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x$.

(1) **证明** $$\int_0^{nT}xf(x)\mathrm{d}x\xrightarrow{x=nT-t}nT\int_0^{nT}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{nT}tf(t)\mathrm{d}t,$$

于是有

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

$$\int_0^{nT} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{nT}{2}\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x.$$

又 $f(x+T)=f(x)$，则

$$\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^{T} f(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_0^{nT} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{n^2T}{2}\int_0^{T} f(x)\mathrm{d}x(n=1,2,3,\cdots).$$

(2) 解 $|\sin x|$ 是连续的以 π 为周期的偶函数，故

$$I = \int_0^{n\pi} x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = n^2\pi.$$

二、积分不等式

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

1. 用函数的单调性

通常的做法：首先将某一积分限(通常取上限)变量化，然后移项构造辅助函数，由辅助函数的单调性来证明不等式，此方法多用于所给条件为“$f(x)$在$[a,b]$上连续”的情形.

例 10.6 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2$.

证明 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \cdot \int_a^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t - (x-a)^2 (a \leqslant x \leqslant b)$，则

$$F'(x) = f(x)\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} + \frac{1}{f(x)}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - 2(x-a)$$

$$= \int_a^x \left[\frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} - 2\right]\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x (2-2)\mathrm{d}t = 0.$$

从而，$F(x)$单调增加. 故 $F(b)\geqslant F(a)=0$，得证.

例 10.7 设函数 $f(x)$，$g(x)$在区间$[a,b]$上连续，且 $f(x)$单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 证明：

(1) $0\leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x-a, x\in[a,b]$；

(2) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

证明 (1) 因为 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$，所以当 $x\in[a,b]$ 时，有 $\int_a^x 0\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x 1\mathrm{d}t$，即 $0\leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x-a$.

(2) 令 $F(x) = \int_a^{a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

因为 $f(x)$，$g(x)$ 在区间$[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在区间$[a,b]$ 上可导，且

$$F'(x) = \left\{f\left[a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u\right] - f(x)\right\}g(x).$$

由(1) 知，$a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u \leqslant x, x\in[a,b]$. 又因为 $f(x)$ 单调增加，且 $g(x)\geqslant 0$，所以 $F'(x)\leqslant 0$，从而

$F(x)$ 在区间$[a,b]$上单调减少.

又 $F(a)=0$,故 $F(b)\leqslant 0$,即$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

2. 用拉格朗日中值定理

此方法多用于所给条件为"$f(x)$一阶可导"且某一端点值较简单(甚至为0)的题目.

例 10.8 设 $f(x)$在$[0,1]$上具有一阶连续导数,且 $f(0)=f(1)=0$. 证明:

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}.$$

证明 将大区间$[0,1]$分成两个小区间$[0,x]$和$[x,1]$.

在$[0,x]$上对 $f(x)$使用拉格朗日中值定理,得 $f(x)-f(0)=f(x)=f'(\xi_1)x$,其中 $\xi_1\in(0,x)$,于是

$$|f(x)|=|f'(\xi_1)|x.$$

在$[x,1]$上对 $f(x)$使用拉格朗日中值定理,得 $f(1)-f(x)=-f(x)=f'(\xi_2)(1-x)$,其中 $\xi_2\in(x,1)$,于是

$$|f(x)|=|f'(\xi_2)|(1-x).$$

当 $x\in[0,1]$时,记 $M=\max\{|f'(x)|\}$,则

$$|f(x)|\leqslant Mx,\quad |f(x)|\leqslant M(1-x),$$

于是

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant M\int_0^x t\mathrm{d}t + M\int_x^1 (1-t)\mathrm{d}t = M\left[\frac{x^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}\right],$$

其中,根据基本不等式,$\min\left\{\frac{x^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}\right\}=\frac{1}{4}$,故得证.

3. 用泰勒公式

此方法多用于所给条件为"$f(x)$二阶可导"且某一端点值较简单(甚至为0)的题目.

例 10.9 设 $f(x)$在$[0,2]$上二阶导数连续,且 $f(1)=0$. 当 $x\in[0,2]$时,记 $M=\max\{|f''(x)|\}$,证明$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{3}M$.

证明 根据题设,选取基点 $x_0=1$ 展开成泰勒公式,

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2(\text{其中 }\xi\text{ 介于 }x,1\text{ 之间})$$

$$\Rightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = f'(1)\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f''(\xi)(x-1)^2\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^2|f''(\xi)|(x-1)^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}M\int_0^2(x-1)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}M,$$

故得证.

4. 用积分法

例 10.10 设 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在$[0,1]$上连续,且 $f(0)=f(1)=0$,证明:

(1)$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)\mathrm{d}x$;

微信公众号 djky66 (顶尖考研祝您上岸)

(2) $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{12}\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|f''(x)|\}$.

证明 (1) $\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)\mathrm{d}[f'(x)]$

$$= \frac{1}{2}x(x-1)f'(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)(2x-1)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (2x-1)\mathrm{d}[f(x)]$$

$$= -\frac{1}{2}(2x-1)f(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

由条件 $f(0)=f(1)=0$ 知结论成立.

(2)记 $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|f''(x)|\}$,则由(1)有

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{2}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{M}{12}.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础习题精练

习题

10.1 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

10.2 设 $\varphi(x)$ 是可微函数 $f(x)$ 的反函数,且 $f(1)=0$,证明:

$$\int_0^1\left[\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$$

10.3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格单调增加,证明

$$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

10.4 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调减少,证明:当 $0<\lambda<1$ 时,$\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x \geqslant \lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

10.5 证明:$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

解答

10.1 **分析** 若令 $G(x) = f(x)\int_x^b g(t)\mathrm{d}t - g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,无法验证其满足零点定理.所以应求 $G(x)$ 的原函数,使用罗尔定理证明.

证明 求 $G(x)$ 的原函数 $F(x)$(对 $G(x)$ 求不定积分,用分部积分法),有

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_x^b g(t)\mathrm{d}t,$$

因为 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，所以 $F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$F(a)=F(b)=0$，即$F(x)$在$[a,b]$上满足罗尔定理的条件，所以至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x.$$

10.2 **分析** 左端定积分的被积函数含有变限积分，考虑分部积分法.

证明
$$\int_0^1\left[\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=x\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\Big|_0^1-\int_0^1x\varphi[f(x)]\cdot f'(x)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^1x^2\cdot f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1x^2\mathrm{d}[f(x)]$$
$$=-x^2f(x)\Big|_0^1+2\int_0^1xf(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1xf(x)\mathrm{d}x.$$

10.3 **分析** $(a+b)\int_a^bf(x)\mathrm{d}x<2\int_a^bxf(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow(a+b)\int_a^bf(x)\mathrm{d}x-2\int_a^bxf(x)\mathrm{d}x<0$，可构造辅助函数，用单调性证明.

证明 令 $F(t)=(a+t)\int_a^tf(x)\mathrm{d}x-2\int_a^txf(x)\mathrm{d}x,t\in[a,b]$，

则
$$F'(t)=\int_a^tf(x)\mathrm{d}x+(a+t)f(t)-2tf(t)=\int_a^tf(x)\mathrm{d}x-(t-a)f(t)$$
$$=\int_a^tf(x)\mathrm{d}x-\int_a^tf(t)\mathrm{d}x=\int_a^t[f(x)-f(t)]\mathrm{d}x.$$

因为 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上严格单调增加，所以 $f(x)-f(t)<0$，于是有

$$F'(t)=\int_a^t[f(x)-f(t)]\mathrm{d}x<0,$$

即 $F(t)$ 严格单调减少，又 $F(a)=0$，所以 $F(b)<0$，即

$$(a+b)\int_a^bf(x)\mathrm{d}x-2\int_a^bxf(x)\mathrm{d}x<0,$$

即
$$(a+b)\int_a^bf(x)\mathrm{d}x<2\int_a^bxf(x)\mathrm{d}x.$$

10.4 **证明** 要证原不等式成立，只需证 $\dfrac{\int_0^{\lambda}f(x)\mathrm{d}x}{\lambda}\geqslant\int_0^1f(x)\mathrm{d}x.$

令 $F(t)=\dfrac{\int_0^tf(x)\mathrm{d}x}{t}$，由于 $F(\lambda)=\dfrac{\int_0^{\lambda}f(x)\mathrm{d}x}{\lambda}$，$F(1)=\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$，故只需证当 $\lambda\in(0,1)$ 时，有

$$F(\lambda)\geqslant F(1).\qquad(*)$$

由 $F(t)$在$(0,1]$内连续，在$(0,1)$内可导，且

$$F'(t)=\frac{f(t)t-\int_0^tf(x)\mathrm{d}x}{t^2}=\frac{f(t)t-f(c)t}{t^2}=\frac{f(t)-f(c)}{t},$$

其中 $0\leqslant c\leqslant t$，知 $f(c)\geqslant f(t)$，有 $F'(t)\leqslant0$，知 $F(t)$ 在$(0,1]$ 内单调减少. 又 $0<\lambda<1$，有 $F(\lambda)\geqslant F(1)$，即$(*)$式成立，故原不等式成立.

10.5 **证明** 要证原不等式成立，只需证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\geqslant0.$

方法一
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

在上式右边第二项积分中，令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t-\cos t}{1+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\left[\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\right]\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

故原式得证.

方法二

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1+\xi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\frac{1}{1+\eta^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=(\sqrt{2}-1)\left(\frac{1}{1+\xi^2}-\frac{1}{1+\eta^2}\right),$$

其中 $0\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}\leqslant\eta\leqslant\frac{\pi}{2}$，从而有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

故原式得证.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第11讲 多元函数微分学

基础知识结构

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础内容精讲

一、基本概念

1. 平面点集的基本概念

在平面上建立直角坐标系 xOy，则平面上的点就可以用两个实数组成的有序数组 (x,y) 来表示，而二元函数 $f(x,y)$ 的定义域恰是以两个实数组成的有序数组 (x,y) 为元素的集合，于是 $f(x,y)$ 的定义域就是**平面上的点集**. 下面给出平面点集的一些基本概念.

(1)平面上任意两点 $M_1(x_1,y_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2)$ 之间的**距离**定义为

$$\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

其中记号 $\rho(M_1,M_2)$ 表示点 M_1 与 M_2 的距离,它满足三个要素:

①非负性 $\rho(M_1,M_2)\geqslant 0$;

②对称性 $\rho(M_1,M_2)=\rho(M_2,M_1)$;

③三角不等式 $\rho(M_1,M_3)\leqslant\rho(M_1,M_2)+\rho(M_2,M_3)$.

(2)设 M_0 为平面上的一个点,$\delta>0$,则平面上以点 M_0 为圆心,以 δ 为半径的圆的内部叫作点 M_0 **的 δ 邻域**,记作 $U(M_0,\delta)$(见图 11-1),也即

$$U(M_0,\delta)=\{M\mid\rho(M_0,M)<\delta,M\text{ 在平面上}\}.$$

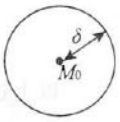


图 11-1

若在上述邻域中去掉圆心 M_0,则叫作点 M_0 **的 δ 去心邻域**,记作 $\mathring{U}(M_0,\delta)$(见图 11-2),也即

$$\mathring{U}(M_0,\delta)=\{M\mid 0<\rho(M_0,M)<\delta,M\text{ 在平面上}\}.$$

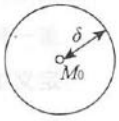


图 11-2

(3)给定平面上的一个点集 E,可用上述邻域的概念将平面上的点分类为内点、外点和边界点,下面分别给出定义.

设 M 为平面上的一个点,若存在 $\delta>0$,使得 $U(M,\delta)\subset E$,则 M 为点集 E **的内点**,如图 11-3所示.

若存在 $\delta>0$,使得 $U(M,\delta)\cap E=\varnothing$,则 M 为点集 E **的外点**,如图 11-4 所示.

若对任意的 $\delta>0$,$U(M,\delta)$ 中既有 E 中的点,也有 E 外的点,则 M 为点集 E **的边界点**,如图 11-5 所示.E 的所有边界点的集合称为 E **的边界**,记作 ∂E. 显然,任意一个点集 E 与它的余集 E^C 有公共边界,即 $\partial E=\partial E^C$.

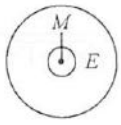


图 11-3

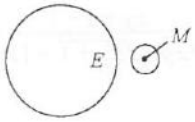


图 11-4

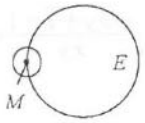


图 11-5

(4)有了上述概念后,我们可以对点集作不同分类.

设 E 为一个平面点集,若存在常数 $\delta>0$,使得 $E\subset U(O,\delta)$(这里 O 是指坐标原点),则 E 为**有界集**,如图 11-6 所示. 否则,E 就是**无界集**.

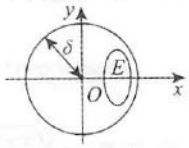


图 11-6

若 E 中的每个点都是 E 的内点,则 E 为**开集**;若 E 的边界点都是 E 的点,则 E 为**闭集**. 显然,若一个点集是开集,其余集必是闭集;若一个点集是闭集,其余集必是开集.

设 E 为一个平面点集,若对于 E 中的任意两点,都可用一条完全属于 E 的折线(说成曲线亦可)将这两点连接起来,则这样的 E 为(道路)**连通集**(见图 11-7). 连通的开集叫**开区域**. 一个开区域和它的边界点集的并集叫**闭区域**. 开区域、闭区域统称为**区域**.

图 11-7

若 E 是一个平面区域,且 E 内的任一条**简单闭曲线**的内部还在 E 内,则这样的 E 称为**单连通区域**. 否则就叫**多连通区域**.

(5)在这部分的最后,讲两个重要概念.

设 E 是一个平面点集,M_0 为平面上的一个点,若对任意的 $\delta>0$,总有 $\mathring{U}(M_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$,即 M_0 的任意邻域中都含有异于 M_0 的 E 中的点,则称 M_0 为 E **的聚点**. 显然,**非空开集的内点与边界点都是这个点集的聚点,闭区域的任何一点都是它的聚点.**

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

若存在 $\delta>0$，使得 $U(M_0,\delta)\cap E=\{M_0\}$，即如果 M_0 的某一邻域与点集 E 的交集是一个孤立的点 M_0，则称点 M_0 为 E 的**孤立点**，如图 11-8 所示. 显然，**边界点要么是聚点，要么是孤立点**.

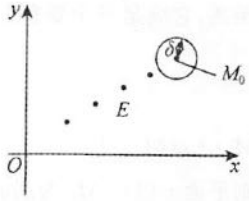


图 11-8

以上这些概念细致入微，需要读者潜心品味，反复琢磨，方可掌握牢固.

2. 极限

关于二元函数的极限，有两种定义. 下面第一种定义是大部分数学分析教材从点集角度出发的；第二种定义是大部分高等数学教材从邻域角度出发的.

第一种定义：

定义 1 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当点 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，那么就称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0)).$$

以上是按集合论知识(以点集趋向方式)定义多元函数的极限，通俗说来，只要 $f(x,y)$ 是“有定义的”，且满足 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$，这里自然“排除”了 (x_0,y_0) 邻域内的无定义点，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

第二种定义：

定义 1′ 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的去心邻域内有定义，且 (x,y) 以任意方式趋向于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 均趋向于 A，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$.

根据定义 1′，由于函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ 在原点的邻域内的坐标轴上处处无定义，如图 11-9 所示，于是 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ 不存在.

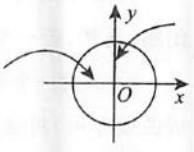


图 11-9

按照两种定义，你会得出

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x+y}=\begin{cases}0, & \text{第一种定义},\\ \text{不存在}, & \text{第二种定义}.\end{cases}$$

所以，为避免这种教材定义不同导致的“矛盾”，命题人目前处理得比较恰当，只考那些无论在哪种定义下极限都存在或都不存在的函数，比如 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$.

3. 连续

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**连续**.

微信公众号：dky66
(顶尖考研视频上岸)

【注】 验证二元函数 $f(x,y)$ 在某一点 (x_0,y_0) 处是否连续是考研的重点，但是如果不连续，对于多元函数是不讨论间断点类型的.

4. 偏导数

定义 2 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的**偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{ 或 }f'_x(x_0,y_0).$$

于是

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0},$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的偏导数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 仍具有偏导数，则它们的偏导数称为函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**. 按照对变量求导次序的不同，有如下四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y),$$

其中 $f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$ 称为**混合偏导数**. 同样可得三阶、四阶以及 n 阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**.

5. 可微

先看一个引例. 如图 11-10 所示，设矩形的长和宽分别为 x 和 y，则此矩形的面积 $S=xy$.

若 x,y 分别增长 $\Delta x,\Delta y$，则该矩形面积的增量为

$$\Delta S=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y.$$

上式右端由两部分组成：一部分是 $y\Delta x+x\Delta y$，它是关于 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数；另一部分是 $\Delta x\Delta y$，因为

Δy	$x\Delta y$	$\Delta x\Delta y$
y	$S=xy$	$y\Delta x$
	x	Δx

图 11-10

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{2}=0,$$

所以当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时，$\Delta x\Delta y$ 是比 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小量，即

$$\Delta S=y\Delta x+x\Delta y+o(\rho)(\rho\to 0).$$

$y\Delta x+x\Delta y$ 是 ΔS 的主要部分，$o(\rho)$ 是 ΔS 与主要部分 $y\Delta x+x\Delta y$ 之间的误差

$$\Delta S\approx y\Delta x+x\Delta y.$$

称 $y\Delta x+x\Delta y$ 为函数 $S=xy$ 在点 (x,y) 处的全微分.

定义 3 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$A,B$ 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 而仅与 x,y 有关，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，而称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分，记作 $\mathrm{d}z$，即 $\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

在第 4 讲中，已经详细阐述了一元函数可微的深刻含义，二元函数可微的概念也是如此（请注意对比，加深理解）. 判断函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是否可微，步骤如下：

①写出全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$；

②写出线性增量 $A\Delta x+B\Delta y$，其中 $A=f'_x(x_0,y_0)$，$B=f'_y(x_0,y_0)$；

③作极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，若该极限等于 0，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，否则，就不可微.

用形式简单的“线性增量 $A\Delta x+B\Delta y$”去代替形式复杂的“全增量 Δz”，且其误差“$\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)$”是 $o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$. 这就是说，用简单的代替了复杂的，且产生的误差可以忽略不计，这就是可微的真正含义. 在实际问题中，有时直接计算 Δz，有时算出 $A\Delta x+B\Delta y$ 来近似 Δz.

6. 偏导数的连续性

对于 $z=f(x,y)$，讨论其在某特殊点 (x_0,y_0)（比如二元分段函数的分段点）处偏导数是否连续，是考研的重点，其步骤为

①用定义法求 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$；

②用公式法求 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$；

③计算 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_x(x,y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_y(x,y)$.

看 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_x(x,y)=f'_x(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_y(x,y)=f'_y(x_0,y_0)$ 是否成立. 若成立，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数是连续的.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

二、多元函数微分法则

1. 链式求导规则

(1)复合函数的中间变量均为一元函数的情形. 复合结构图如图 11-11 所示.

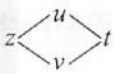


图 11-11

设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$，则 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$，且 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

(2)复合函数的中间变量均为多元函数的情形. 复合结构图如图 11-12 所示.

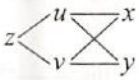


图 11-12

设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

(3)复合函数的中间变量既有一元函数，又有多元函数的情形. 复合结构图如图 11-13所示.

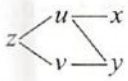


图 11-13

设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(y)$，则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 无论 z 对哪个变量求导，也无论 z 已经求了几阶导，求导后的新函数仍然具有与原函数完全相同的复合结构.

2. 隐函数存在定理（公式法）

在本书第 1 讲提出的函数定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为

单值函数. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不是唯一的，于是，这样的对应法则就不符合函数的定义了，我们称这种法则确定了一个**多值函数**. 在考研中所提到的函数是指单值函数，也就是当自变量 x 取一个值时，这个对应法则 f 要保证因变量 y 有唯一的实数值与之对应，否则就必须分成若干个单值函数去研究，比如下述的“隐函数存在问题”.

一般说来，只要在满足定义域的条件下，形如 $y=f(x)$ 的函数称为**显函数**，例如 $y=\sin x$；由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数称为**隐函数**，例如由方程 $x+y^3-1=0$ 确定的隐函数（其显式表示为 $y=\sqrt[3]{1-x}$）. 但“隐函数存在”是有前提的，大多数教材都是这样的提法：“如果 x 与 y 满足方程 $F(x,y)=0$，那么在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数.”读者是否注意到“在一定条件下”和“唯一的 y 值”这样的语句？请看下面的两个定理.

隐函数存在定理 1 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，$F(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

这里的 $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$（也就是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 存在）是定理的关键. 由此看来，所谓的“隐函数存在”，是要求在一个“指定的位置”，方程 $F(x,y)=0$ 能确定一个“不仅有意义，而且要有可导这种良好性质的函数”. 而在一个指定位置处可导的函数必然首先得是单值的.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

举个例子供读者理解，给出方程 $x^2+y^2-1=0$，设 $F(x,y)=x^2+y^2-1$，则 $F'_x=2x$，$F'_y=2y$，$F(0,1)=0$，$F'_y(0,1)=2\neq 0$，由上述隐函数存在定理 1 可知，方程 $x^2+y^2-1=0$ 在点 $(0,1)$ 的某一邻域内能确定一个有连续导数的隐函数 $y=f(x)$；而在点 $(-1,0)$ 和点 $(1,0)$ 的邻域内就不存在这样一个有连续导数的隐函数，因为在点 $(-1,0)$ 和点 $(1,0)$ 处的切线都是竖直方向的，显然导数不存在，在这两个点的任何去心邻域中，一个 x 对应着两个 y 的值，这就不符合函数定义了（见图 11-14）.

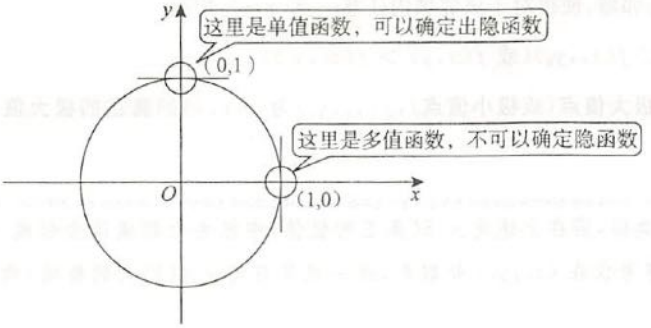


图 11-14

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

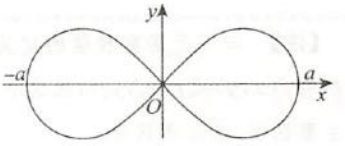


图 11-15

再看个典型的例子，对于伯努利双纽线（见图 11-15），设 $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$，在点 $(0,0)$，$(a,0)$，$(-a,0)$ 处，隐函数不存在；而在其他位置，隐函数都存在.

这里还要指出的是，定理最后给出的 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$，这个公式就是**隐函数求导公式**，证明如下：

将 $y=f(x)$ 代入 $F(x,y)=0$，得恒等式 $F(x,f(x))\equiv 0$，在这个恒等式两边对 x 求导，得 $\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，由于 F'_y 连续且 $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，因此存在 (x_0,y_0) 的一个邻域，在这个邻域内 $F'_y\neq 0$，于是得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

于是，很自然地，可以把二元函数的隐函数存在定理推广到多元函数. 既然一个二元方程 $F(x,y)=0$ 有可能确定一个一元隐函数，那么一个三元方程 $F(x,y,z)=0$ 也就有可能确定一个二元隐函数.

隐函数存在定理 2 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

上式的证明同样简单，将 $z=f(x,y)$ 代入 $F(x,y,z)=0$，得 $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$，式子两端分别对 x 和 y 求偏导数，得 $F'_x+F'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$F'_y+F'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

因为 F'_z 连续且 $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，所以存在点 (x_0,y_0,z_0) 的一个邻域，使 $F'_z\neq 0$，于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

同理，$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$（也就是 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在且连续）是定理的关键，见例 11.6.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

三、多元函数的极值与最值

1. 概念

定义 4 若存在 (x_0,y_0) 的某个邻域，使得在该邻域内任意一点 (x,y)，均有

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)\ (\text{或 } f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0))$$

成立，则称 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的**广义的极大值点（或极小值点）**，$f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的**广义的极大值（或极小值）**.

定义 5 若存在 (x_0,y_0) 的某个去心邻域，使得对于该邻域内任意一点 (x,y)，均有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)\ (\text{或 } f(x,y)>f(x_0,y_0))$$

成立，则称 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的**真正的极大值点（或极小值点）**，$f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的**真正的极大值（或极小值）**.

> **【注】** 与一元函数极值的定义类似，若在上述定义 5（真正的极值）中把去心邻域改为邻域，则当然有 $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$，但这个等号仅在 (x_0,y_0) 处取到，这一点是与定义 4（广义的极值）的一个主要区别，请注意区分.

定义 6 设 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 定义域内一点，若对于 $f(x,y)$ 的定义域内任意一点 (x,y)，均有

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)\ (\text{或 } f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0))$$

成立，则称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的**广义的最大值（或最小值）**.

定义 7 设 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 定义域内一点，若对于 $f(x,y)$ 的定义域内任意一个异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y)，均有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)\ (\text{或 } f(x,y)>f(x_0,y_0))$$

成立，则称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的**真正的最大值（或最小值）**.

【注】 若题目只问极值(或最值),未指明是广义的极值(或最值)还是真正的极值(或最值),读者按广义的极值(或最值)来解答.

2. 无条件极值

(1)二元函数取极值的必要条件(类比一元函数).

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) $\begin{cases}\text{一阶偏导数存在},\\ \text{取极值},\end{cases}$ 则 $f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$.

【注】 该必要条件同样适用于三元及三元以上函数.

(2)二元函数取极值的充分条件.

记 $\begin{cases}f''_{xx}(x_0,y_0)=A,\\ f''_{xy}(x_0,y_0)=B,\\ f''_{yy}(x_0,y_0)=C,\end{cases}$ 则 $\Delta=AC-B^2$ $\begin{cases}>0\Rightarrow\text{极值}\begin{cases}A<0\Rightarrow\text{极大值},\\ A>0\Rightarrow\text{极小值},\end{cases}\\ <0\Rightarrow\text{非极值},\\ =0\Rightarrow\text{方法失效,另谋他法.(方法失效怎么办?见例 11.12)}\end{cases}$

【注】 该充分条件不适用于三元及三元以上函数.

微信公众号:djky66
(陪考研你稳上岸)

综合(1),(2),可用必要条件求出可疑点,用充分条件判别可疑点是否是极值点.

3. 条件极值与拉格朗日乘数法

求目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$ 下的最值,则

①构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$;

②令

$$\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x+\mu\psi'_x=0,\\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y+\mu\psi'_y=0,\\ F'_z=f'_z+\lambda\varphi'_z+\mu\psi'_z=0,\\ F'_\lambda=\varphi(x,y,z)=0,\\ F'_\mu=\psi(x,y,z)=0;\end{cases}$$

③解上述方程组得备选点 P_i, $i=1,2,3,\cdots,n$,并求 $f(P_i)$,取其最大值为 $u_{\max}$,最小值为 $u_{\min}$;

④根据实际问题,必存在最值,所得即为所求.

基础例题精解

一、基本概念

例 11.1 已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x+y}}$,则(　　).

(A) $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ 都存在　　(B) $f'_x(0,0)$ 存在, $f'_y(0,0)$ 不存在

(C) $f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0)$ 存在　　(D) $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ 都不存在

解 应选(B).

根据偏导数定义,有

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,$$

而

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\sqrt{y^2}}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{|y|}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|}{y}$$

不存在,可知 $f'_y(0,0)$不存在.

故选(B).

例 11.2 已知函数 $f(x,y)=x\ln(x+\ln y)$,求 $f'_x(1,e)$,$f'_y(1,e)$.

解 把 y 看成常数,利用乘积函数的求导法则,对 x 求导,得

$$f'_x(x,y)=\ln(x+\ln y)+\frac{x}{x+\ln y},$$

将(1,e)代入,得

$$f'_x(1,e)=\ln(1+\ln e)+\frac{1}{1+\ln e}=\ln 2+\frac{1}{2}.$$

把 x 看成常数,对 y 求导,得

$$f'_y(x,y)=x\cdot\frac{1}{x+\ln y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{x}{xy+y\ln y},$$

将(1,e)代入,得

$$f'_y(1,e)=\frac{1}{1\cdot e+e\ln e}=\frac{1}{2e}.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 11.3 设 $z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则下列四个结论中,

①$f(x,y)$在(0,0)处连续;　②$f'_x(0,0)$,$f'_y(0,0)$存在;

③$f'_x(x,y)$,$f'_y(x,y)$在(0,0)处连续;　④$f(x,y)$在(0,0)处可微.

正确结论的个数为(　　).

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

解 应选(C).

对于结论①,根据连续定义,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\rho^2\sin\frac{1}{\rho}=0,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=f(0,0),$$

①正确;

对于结论②,用定义法,$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{|\Delta x|}-0}{\Delta x}=0$,同理可得 $f'_y(0,0)=0$,②正确;

对于结论③,当$(x,y)\neq(0,0)$时,用公式法,

$$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\right]$$

$$=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

因为当$(x,y)\to(0,0)$时，$2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0$，$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$不存在，故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f'_x(x,y)$不存在，所以$f'_x(x,y)$在$(0,0)$处不连续. 同理，$f'_y(x,y)$在$(0,0)$处也不连续，所以③不正确；

对于结论④，
$$f'_x(0,0)=0,\quad f'_y(0,0)=0,$$
$$\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\rho^2\sin\frac{1}{\rho},$$
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin\frac{1}{\rho}}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho}=0,$$
其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. 故$f(x,y)$在$(0,0)$处可微，所以④正确，答案选择(C).

二、多元函数微分法则

1. 复合函数求偏导问题

例 11.4 设函数$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$具有连续偏导数，则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$(　　).

(A)$2\left(\dfrac{y}{x}f'_1+\dfrac{x}{y}f'_2\right)$　　(B)$2\left(\dfrac{y}{x}f'_1-\dfrac{x}{y}f'_2\right)$

(C)$-2\left(\dfrac{y}{x}f'_1+\dfrac{x}{y}f'_2\right)$　　(D)$-2\left(\dfrac{y}{x}f'_1-\dfrac{x}{y}f'_2\right)$

解　应选(D).

这是偏导数运算的基本题目，只需依复合函数求偏导数的链式求导规则求解.

已知$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$，可采用三种方法求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$. 一是引入中间变量，令$u=\dfrac{y}{x},v=\dfrac{x}{y}$，则$z=f(u,v)$；二是利用$f'_i$表示$f$对第$i$个位置变量的偏导数来求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},i=1,2$；三是直接求微分，然后将$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$的系数分别取为$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$. 由于选项为$f'_i$的形式，因此采用第二种方法求解.

这里引入f'_i表示f对第i个位置变量的偏导数，$i=1,2$.
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x+f'_2\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=-\frac{y}{x^2}f'_1+\frac{1}{y}f'_2,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y+f'_2\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{x}f'_1-\frac{x}{y^2}f'_2,$$
因此
$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left(-\frac{y}{x^2}f'_1+\frac{1}{y}f'_2\right)-y\left(\frac{1}{x}f'_1-\frac{x}{y^2}f'_2\right)$$
$$=-2\left(\frac{y}{x}f'_1-\frac{x}{y}f'_2\right).$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

故选(D).

例 11.5 设$z=f(\mathrm{e}^x\sin y,x^2+y^2)$，其中$f$具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y f'_1+2x f'_2,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}\mathrm{e}^{2x}\sin y\cos y+2\mathrm{e}^x(y\sin y+x\cos y)f''_{12}+4xyf''_{22}+f'_1\mathrm{e}^x\cos y.$$

2. 隐函数求偏导问题

例 11.6 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点(0,1,1)的一个邻域，在此邻域内该方程(　　).

(A)只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

(B)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(C)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(D)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

解 应选(D).

令

$$F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1,$$

则 $F'_x=y+e^{xz}z$，$F'_y=x-\frac{z}{y}$，$F'_z=-\ln y+e^{xz}x$. 于是，

$$F'_x(0,1,1)=2\neq 0,\quad F'_y(0,1,1)=-1\neq 0,\quad F'_z(0,1,1)=0.$$

因此，在点(0,1,1)的某一个邻域 U_1 内，存在一个连续且具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$；在点(0,1,1)的某一个邻域 U_2 内，也存在一个连续且具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$. 于是，在邻域 $U=U_1\cap U_2$ 内，就存在两个连续且具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$，故应选(D).

例 11.7 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin xy-\frac{1}{y-x}=1$ 确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 设 $F(x,y)=\sin xy-\frac{1}{y-x}-1$，则

$$F'_x=y\cos xy-\frac{1}{(y-x)^2},\quad F'_y=x\cos xy+\frac{1}{(y-x)^2}.$$

将 $x=0$ 代入方程 $\sin xy-\frac{1}{y-x}=1$，得 $y=-1$.

又因为

$$F'_x(0,-1)=(-1)\cdot\cos 0-\frac{1}{(-1-0)^2}=-2,$$

$$F'_y(0,-1)=0\cdot\cos 0+\frac{1}{(-1-0)^2}=1,$$

所以 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{F'_x(0,-1)}{F'_y(0,-1)}=2.$

例 11.8 设 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\frac{dz}{dx}$.

解 分别在 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 的两边对 x 求导，得

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=f+x\left(1+\frac{dy}{dx}\right)f',\\ F'_x+F'_y\frac{dy}{dx}+F'_z\frac{dz}{dx}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-xf'\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=f+xf',\\ F'_y\frac{dy}{dx}+F'_z\frac{dz}{dx}=-F'_x.\end{cases}$$

由此解得 $\frac{dz}{dx}=\frac{(f+xf')F'_y-xf'F'_x}{F'_y+xf'F'_z}(F'_y+xf'F'_z\neq 0).$

微信公众号：dikyd6
(临考考研祝您上岸)

例 11.9 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数，求 dz.

解 **方法一** 偏导数法(视二元函数为一元函数).

这是由隐函数确定的二元函数，对方程两边求偏导数(求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时，x 是自变量，z 是因变量，y 是常数；求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 时，y 是自变量，z 是因变量，x 是常数)得

$$\frac{\partial z}{\partial x}-1+e^{z-y-x}+xe^{z-y-x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}-1+xe^{z-y-x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-1\right)=0,$$

解得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

所以
$$dz=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy.$$

方法二 全微分法.

等式两边求微分得 $dz-dy-dx+e^{z-y-x}dx+xe^{z-y-x}(dz-dy-dx)=0$，

整理得
$$dz=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy.$$

方法三 公式法.

设
$$F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x},$$

则
$$F'_x=-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x},\quad F'_y=-1-xe^{z-y-x},\quad F'_z=1+xe^{z-y-x},$$

于是有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=1,$$

所以
$$dz=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy.$$

3. 逆问题

例 11.10 求方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 满足条件 $z(x,0)=x,z(0,y)=y^2$ 的解 $z=z(x,y)$.

解 将 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 两边对 y 积分，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi_1(x);\qquad ①$$

①式两边对 x 积分，得

$$z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\varphi(x)+\psi(y).\qquad ②$$

现在来确定 $\varphi(x)$ 和 $\psi(y)$.

由已知 $z(x,0)=x,z(0,y)=y^2$，代入②式有 $x=\varphi(x)+\psi(0),y^2=\varphi(0)+\psi(y)$，于是

$$z=x+y^2+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2-[\varphi(0)+\psi(0)].$$

又因 $z(0,0)=0$，故 $\varphi(0)+\psi(0)=0$，则

$$z=z(x,y)=x+y^2+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

三、多元函数的极值与最值

1. 无条件极值

例 11.11 设 $z_1=|x+y|$，$dz_2=(3x^2+6x)dx-(3y^2-6y)dy$，则点$(0,0)$(　　).

(A)不是 z_1 的极值点，也不是 z_2 的极值点

(B)是 z_1 的极大值点，也是 z_2 的极大值点

(C)是 z_1 的极大值点，是 z_2 的极小值点

(D)是 z_1 的极小值点，也是 z_2 的极小值点

解 应选(D).

z_1 的解析式为绝对值形式，其在点$(0,0)$处偏导数不存在，只能利用极值的定义来考虑. z_2 是微分的形式，由微分与偏导数的关系可知$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，可判定$(0,0)$是否为驻点，再依极值的充分条件判定.

由于 $z_1=|x+y|$，可知 $z_1(0,0)=0$，当$(x,y)\neq(0,0)$时，总有 $z_1(x,y)\geqslant 0$，可知点$(0,0)$为 z_1 的极小值点.

由于 $dz_2=(3x^2+6x)dx-(3y^2-6y)dy$，可知$\frac{\partial z_2}{\partial x}=3x^2+6x$，$\frac{\partial z_2}{\partial y}=-(3y^2-6y)$. 易知点$(0,0)$为 z_2 的驻点. 又

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}=6x+6,\quad \frac{\partial^2 z_2}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}=-6y+6,$$

则
$$A=\left.\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=6,\quad B=\left.\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=0,\quad C=\left.\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=6,$$

$$AC-B^2=36>0,\quad A>0,$$

可知点$(0,0)$为 z_2 的极小值点.

故选(D).

例 11.12 设 $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$，则(　　).

(A)z 的极小值点为$(-1,-1),(1,1)$

(B)z 的极大值点为$(-1,-1),(0,0)$；极小值点为$(1,1)$

(C)z 的极小值点为$(0,0),(1,1),(-1,-1)$

(D)z 的极小值点为$(0,0)$；极大值点为$(1,1)$

解 应选(A).

由于 $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$，因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2x-2y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2x-2y,$$

解方程组$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$ 得$(0,0),(1,1),(-1,-1)$为 z 的三个驻点.

又

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-2.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

在点(1,1)处，

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=10,\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=-2,\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,1)}=10,$$

$AC-B^2>0$，$A>0$，可知点(1,1)为 z 的极小值点；

在点(−1,−1)处，

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-1,-1)}=10,\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,-1)}=-2,\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-1,-1)}=10,$$

$AC-B^2>0$，$A>0$，可知点(−1,−1)为 z 的极小值点；

在点(0,0)处，

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=-2,\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=-2,\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=-2,$$

$AC-B^2=0$，极值的二阶充分条件失效.

在点(x,y)沿 $y=-x$ 趋近于点(0,0)时，有

$$z=x^4+(-x)^4-x^2-2x(-x)-(-x)^2=2x^4>0;$$

在点(x,y)沿 $y=0$ 趋近于点(0,0)时，有

$$z=x^4+0-x^2-0-0=x^4-x^2,$$

当 $0<|x|<1$ 时，总有 $z<0$. 从而知点(0,0)不是 z 的极值点. 故选(A).

微信公众号：djky66
(顶尖考研视您上岸)

【注】 二元函数极值的充分条件中，在驻点处 $AC-B^2\neq 0$ 时，可以直接判定驻点是否为极值点，当 $AC-B^2=0$ 时，可考虑用极值的定义来考查.

例 11.13 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，则 $z=z(x,y)$(　　).

(A)极大值点为(−9,−3)，极大值为−3；没有极小值

(B)极小值点为(−9,−3)，极小值为−3；没有极大值

(C)极大值点为(9,3)，极大值为3；极小值点为(−9,−3)，极小值为−3

(D)极小值点为(9,3)，极小值为3；极大值点为(−9,−3)，极大值为−3

解 应选(D).

所给问题为隐函数求极值问题，其求解方法与显函数相应问题的求解方法相同，只需先求出驻点，再利用极值的充分条件判定.

因为 $z=z(x,y)$ 由方程

$$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$$

确定，将方程两端分别关于 x 和 y 求偏导数，可得

$$\begin{cases}2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, & ①\\[2ex] -6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0, & ②\end{cases}$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，可得

$$\begin{cases}x-3y=0,\\ -3x+10y-z=0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=3y, \\ z=y. \end{cases}$

将上式代入原方程可解得

$$\begin{cases} x=9, \\ y=3, \\ z=3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-9, \\ y=-3, \\ z=-3. \end{cases}$$

将①式两端分别关于 x,y 求偏导数，将②式两端关于 y 求偏导数，可得

$$\begin{cases} 2-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, & ③ \\ -6-2\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, & ④ \\ 20-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. & ⑤ \end{cases}$$

当 $x=9,y=3,z=3$ 时，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，代入③，④，⑤式可得

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3)}=\frac{1}{6},\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3)}=-\frac{1}{2},\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3)}=\frac{5}{3},$$

可知 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0,A=\dfrac{1}{6}>0$，从而知点(9,3)为 z 的极小值点，$z=3$ 为极小值.

类似地，将 $x=-9,y=-3,z=-3$ 代入③，④，⑤式可得

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3)}=-\frac{1}{6},\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3)}=\frac{1}{2},\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3)}=-\frac{5}{3},$$

$AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0,A=-\dfrac{1}{6}<0$，故点$(-9,-3)$为 z 的极大值点，$z=-3$ 为极大值.

故选(D).

2. 闭区域边界上的最值

例 11.14 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x+y+z=4 \end{cases}$ 下的最大值与最小值.

解 记 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$.

令

$$\begin{cases} F_x'=2x+2\lambda x+\mu=0, \\ F_y'=2y+2\lambda y+\mu=0, \\ F_z'=2z-\lambda+\mu=0, \\ F_\lambda'=x^2+y^2-z=0, \\ F_\mu'=x+y+z-4=0, \end{cases}$$

解该方程组得 $P_1(1,1,2),P_2(-2,-2,8)$.

根据实际问题，函数 u 在所给约束条件下必存在最值，所得即所求，故 $u_{\max}=72,u_{\min}=6$.

3. 闭区域上的最值

例 11.15 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$ 上的最大值与最小值.

解 对于区域 D 的内部，这是无条件极值，求出可疑点并计算可疑点处的函数值.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

令 $\begin{cases} f_x'=2x-2xy^2=0, \\ f_y'=4y-2x^2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1(\sqrt{2},1), \\ P_2(-\sqrt{2},1) \end{cases} \Rightarrow f(P_1)=f(P_2)=2.$

对于区域 D 的边界，这是条件极值，考虑用拉格朗日乘数法或者直接代入法，这个题目把边界方程代入 $f(x,y)$ 会比较简单.

设 L_1 为 $x^2+y^2=4(y>0)$，于是有 $f(x,y)=f(x,\sqrt{4-x^2})=x^4-5x^2+8 \xlongequal{记} g(x)$，则

$$g'(x)=4x^3-10x=0 \Rightarrow x_1=0, x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, y_1=2, y_{2,3}=\sqrt{\frac{3}{2}},$$

即 $$P_3(0,2), P_4\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right), P_5\left(-\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow f(P_3)=8, f(P_4)=f(P_5)=\frac{7}{4}.$$

设 L_2 为 $y=0(-2\leqslant x\leqslant 2)$，于是 $f(x,y)=f(x,0)=x^2$. 故得

$$P_6(0,0), P_7(-2,0), P_8(2,0) \Rightarrow f(P_6)=0, f(P_7)=f(P_8)=4.$$

比较 $f(P_1)$ 至 $f(P_8)$ 的大小，得 $f_{max}=8, f_{min}=0$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 求函数 $f(x,y)$ 在某区域 D 上的最值的步骤：

①求出 $f(x,y)$ 在 D 内所有可疑点处的函数值；

②求出 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最值；

③比较得到的所有函数值，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值.

在实际问题中，如果可以判断出 $f(x,y)$ 的最大值(最小值)一定在 D 的内部取得，且 $f(x,y)$ 在 D 内只有一个驻点，则可以断定该驻点处的函数值就是 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值(最小值).

基础习题精练

习 题

11.1 设 $f(x,y)=\begin{cases} (x+y)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处(　　).

(A)连续，且偏导数存在　　(B)连续，但偏导数不存在

(C)不连续，但偏导数存在　　(D)不连续，偏导数也不存在

11.2 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处(　　).

(A)偏导数不存在　　(B)偏导数存在，但不可微

(C)可微，但偏导数不连续　　(D)偏导数连续

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

11.3 设函数 $f(x)$ 可微，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)}=$_____.

11.4 设 $z=f(x^2y^2,\mathrm{e}^{xy})$，其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，求 $z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}$.

11.5 用变换 $\begin{cases} u=x-2y, \\ v=x+ay \end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，其中 z 有二阶连续偏导数，求 a 的值.

11.6 设函数 $u=f(x^2,xy,xz)$ 具有一阶连续偏导数，又函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 分别由

$$\sin xy=y,\quad e^z=\int_0^{xz}\sin t\mathrm{d}t$$

确定，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

11.7 求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

11.8 求函数 $u=xyz$ 在约束条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ $(x>0,y>0,z>0,a>0)$ 下的最小值.

11.9 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x+\sin y\mathrm{d}y$，且 $f(1,0)=2$，求 $f(x,y)$.

微信公众号：ljky66
(顶尖考研祝您上岸)

解答

11.1 (B) **解** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$，

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. 又

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{|\Delta x|}$$

不存在，则 $f'_x(0,0)$ 不存在，同理 $f'_y(0,0)$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数不存在.

11.2 (B) **解** $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot 0|}-0}{\Delta x}=0=A$，

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0=B,$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在. 又

$$\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}-0=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|},$$

故有 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-A\Delta x-B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在. 从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

11.3 $4\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$ **解** 令 $u=4x^2-y^2$，则 $z=f(u)$，于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)(4x^2-y^2)'_x=8xf'(u),\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=8f'(0)=4,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)(4x^2-y^2)'_y=-2yf'(u),\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=-4f'(0)=-2,$$

所以 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,2)}=4\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$.

11.4 **解** $z'_x=f'_1\cdot 2xy^2+f'_2\cdot ye^{xy}$，$z'_y=f'_1\cdot 2x^2y+f'_2\cdot xe^{xy}$，

$$\begin{aligned}z''_{xx}&=f''_{11}\cdot(2xy^2)^2+f''_{12}\cdot ye^{xy}\cdot 2xy^2+f'_1\cdot 2y^2+f''_{21}\cdot 2xy^2\cdot ye^{xy}+f''_{22}\cdot(ye^{xy})^2+f'_2\cdot y^2e^{xy}\\&=f''_{11}\cdot 4x^2y^4+f''_{22}\cdot y^2e^{2xy}+f''_{12}\cdot 4xy^3e^{xy}+f'_1\cdot 2y^2+f'_2\cdot y^2e^{xy}.\end{aligned}$$

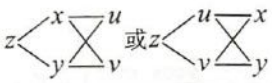
同理可得

$$z''_{yy}=f''_{11}\cdot 4x^4y^2+f''_{22}\cdot x^2e^{2xy}+f''_{12}\cdot 4x^3ye^{xy}+f'_1\cdot 2x^2+f'_2\cdot x^2e^{xy},$$

$$z''_{xy}=f''_{11}\cdot 2x^2y\cdot 2xy^2+f''_{12}\cdot xe^{xy}\cdot 2xy^2+f'_1\cdot 4xy+f''_{21}\cdot 2x^2y\cdot ye^{xy}+f''_{22}\cdot xe^{xy}\cdot ye^{xy}+f'_2\cdot(e^{xy}+xye^{xy})$$

$$=f''_{11}\cdot 4x^3y^3+f''_{22}\cdot xye^{2xy}+f''_{12}\cdot 4x^2y^2e^{xy}+f'_1\cdot 4xy+f'_2\cdot(1+xy)e^{xy}.$$

11.5 解 这类题有两种思路构造复合关系.



由于题中给出的是 z 关于 x,y 的偏导数的方程,采用后一种复合关系,求出 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\cdots$,代入所给方程化简,较为方便.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

代入所给方程,化简得

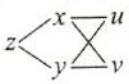
$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

由题设,a 应满足

$$10+5a\neq 0,\quad 6+a-a^2=0,$$

所以 $a=3$.

【注】 本题最后形式 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$ 为已知,所以也可采用如下复合关系,



求出 $\frac{\partial z}{\partial u},\cdots,\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$ 表示为 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\cdots,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 的关系,再利用原方程求得 $a=3$.

微信公众号: djky66
(顶尖考研祝您上岸)

11.6 解 复合函数 $u=f(x^2,xy,xz)$ 两边对 x 求导数得

$$\frac{du}{dx}=f'_1\cdot 2x+f'_2\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+f'_3\cdot\left(z+x\frac{dz}{dx}\right).\qquad①$$

由隐函数 $\sin xy=y$ 求 $\frac{dy}{dx}$. 等式 $\sin xy=y$ 两边对 x 求导数得

$$(\cos xy)\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy}{dx},$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos xy}{1-x\cos xy}.\qquad②$$

由隐函数 $e^z=\int_0^{xz}\sin t\,dt$ 求 $\frac{dz}{dx}$. 等式 $e^z=\int_0^{xz}\sin t\,dt$ 两边对 x 求导数得

$$e^z\frac{dz}{dx}=(\sin xz)\cdot\left(z+x\frac{dz}{dx}\right),$$

解得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z\sin xz}{e^z-x\sin xz}. \qquad ③$$

将②,③式代入①式,得

$$\frac{du}{dx}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot\left(y+x\frac{y\cos xy}{1-x\cos xy}\right)+f_3'\cdot\left(z+x\frac{z\sin xz}{e^z-x\sin xz}\right).$$

11.7 **分析** 因为只求函数 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 D 上的最大值和最小值,而不求极值,所以,只需求出 D 的内部及 D 的边界上的驻点和导数不存在的点(不用判断它们是否为极值点),并求出这些点的函数值,然后比较它们的大小,即可求出最大值和最小值.

解 先求 D 内部 $f(x,y)$ 的驻点和导数不存在的点.

令 $\begin{cases}f_x'=2x=0,\\ f_y'=-2y=0,\end{cases}$ 得唯一驻点 $(0,0)$,$f(x,y)$ 在 D 的内部没有导数不存在的点.

再求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的驻点和导数不存在的点.

这是条件极值问题,边界方程 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 为约束条件. 构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right),$$

令

$$\begin{cases}F_x'=2x+2\lambda x=0,\\ F_y'=-2y+\frac{\lambda}{2}y=0,\\ F_\lambda'=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0,\end{cases}$$

解上述方程组得四个驻点 $(0,2),(0,-2),(1,0),(-1,0)$,计算得

$$f(0,0)=2,\quad f(0,2)=f(0,-2)=-2,\quad f(1,0)=f(-1,0)=3,$$

故函数 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值分别为 $f_{max}=3$,$f_{min}=-2$.

【注】 若将 $x^2=1-\frac{y^2}{4}$ 代入 $f(x,y)=x^2-y^2+2$,得

$$f(y)=1-\frac{y^2}{4}-y^2+2=3-\frac{5}{4}y^2,\ -2\leqslant y\leqslant 2,$$

令 $f'(y)=-\frac{5}{2}y=0$ 得 $y=0$,于是得驻点 $(1,0)$ 及 $(-1,0)$,并把这两点处的函数值和两个端点 $(0,-2)$,$(0,2)$ 处的函数值作比较亦可.

11.8 **解** 构造辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right),$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研陪你上岸)

令
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=yz-\dfrac{\lambda}{x^2}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=xz-\dfrac{\lambda}{y^2}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=xy-\dfrac{\lambda}{z^2}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{a}=0,\end{cases}$$

解得
$$x=y=z=3a,$$

从而根据 $x>0,y>0,z>0$,可知 $u=xyz$ 有最小值为 $u_{\min}=3a\cdot 3a\cdot 3a=27a^3$.

11.9 解 由全微分定义知
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\sin y,$$

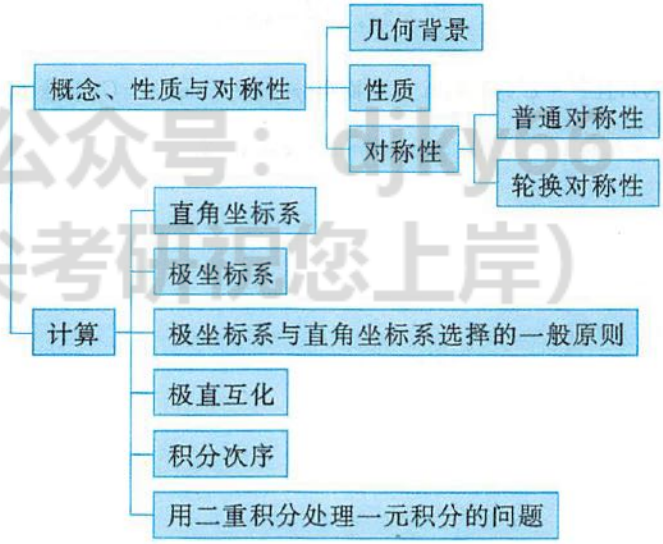
于是 $f(x,y)=x^2+\varphi(y)$,且$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\varphi'(y)=\sin y$,从而得 $\varphi(y)=-\cos y+C$,于是 $f(x,y)=x^2-\cos y+C$.

再由$f(1,0)=1-1+C=2$,得 $C=2$,所以 $f(x,y)=x^2-\cos y+2$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第12讲 二重积分

基础知识结构



微信公众号：(顶尖考研陪您上岸)

基础内容精讲

一、概念、性质与对称性

1. 几何背景

二重积分的几何背景就是**曲顶柱体的体积**.

简要说来，第 8 讲按照“分割、近似、求和、取极限”的步骤求出了二维平面上“曲边梯形的面积”，现在我们可以用同样的办法求出“曲顶柱体的体积”，这就是二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

具体说来，设 $f(x,y)\geqslant 0$，如图 12-1 所示，被积函数 $f(x,y)$ 可作为曲顶柱体在点 (x,y) 处柱体微元的竖坐标(高)，用底面积 $\mathrm{d}\sigma$ 乘以高 $f(x,y)$，得到一个“小竖条”的体积，再在区域 D 上把所有的“小竖条”累加起来，就得到了整个曲顶柱体的体积. 若 $f(x,y)<0$，柱体就在 xOy 面的下方，二重积分的绝对值仍等于柱体的体积，但二重积分的值是负的. 不过，无论高 $f(x,y)$ 是正还是负，底面积 $\mathrm{d}\sigma$ 不能是负

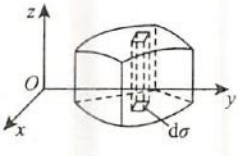


图 12-1

的，即 $d\sigma>0$，否则就不符合二重积分的定义了，这一点要注意.

在考研数学中，一般假设 $f(x,y)$ 在 D 上可积，即二重积分总是存在的.

2. 性质

性质 1(求区域面积) $\iint\limits_D 1\cdot d\sigma=\iint\limits_D d\sigma=A$，其中 A 为 D 的面积.

性质 2(可积函数必有界) 当 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积时，$f(x,y)$ 在 D 上必有界.

性质 3(积分的线性性质) 设 k_1,k_2 为常数，则

$$\iint\limits_D[k_1f(x,y)\pm k_2g(x,y)]d\sigma=k_1\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\pm k_2\iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

性质 4(积分的可加性) 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，且 $D_1\cup D_2=D$，$D_1\cap D_2=\varnothing$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

性质 5(积分的保号性) 当 $f(x,y),g(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积时，若在 D 上，

$$f(x,y)\leqslant g(x,y),$$

则有

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

特殊地，有

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right|\leqslant\iint\limits_D|f(x,y)|d\sigma.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

性质 6(二重积分的估值定理) 设 M,m 分别是 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的最大值和最小值，A 为 D 的面积，则有

$$mA\leqslant\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\leqslant MA.$$

性质 7(二重积分的中值定理) 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，A 为 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)A.$$

3. 普通对称性与轮换对称性

前面已经叙述过，二重积分的几何背景是曲顶柱体的体积. 请理解并牢记下面这句话："用底面积 $d\sigma$ 乘以高 $f(x,y)$，得到一个'小竖条'的体积，再在区域 D 上把所有的'小竖条'累加起来，就得到了整个曲顶柱体的体积."基于这个思路，就可以谈普通对称性和轮换对称性了.

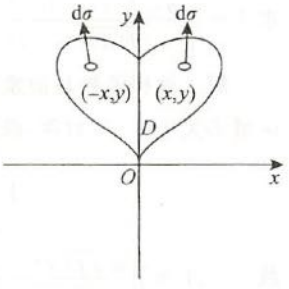


图 12-2

第一，**普通对称性**. 设区域 D 关于 y 轴对称，如图 12-2 所示，取对称的两块小面积 $d\sigma$，对称点分别为 (x,y) 与 $(-x,y)$，则对称点处的高分别为 $f(x,y)$ 与 $f(-x,y)$. 依据定义，对称位置的两个"小竖条"的体积分别为 $f(x,y)d\sigma$ 与 $f(-x,y)d\sigma$. 因为 $d\sigma$ 一样，所以，当 $f(x,y)=f(-x,y)$ 时，$f(x,y)d\sigma=f(-x,y)d\sigma$，体积相同，此时只需计算对称区域的一半，然后乘以 2，即可得到整个积分值；而当 $f(x,y)=-f(-x,y)$ 时，$f(x,y)d\sigma=-f(-x,y)d\sigma$，对称区域的体积正好相反，这样累加起来的总体积自然就是 0. 于是，我们有

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy, & f(x,y)=f(-x,y),\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,y),\end{cases}$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

其中 D_1 是 D 在 y 轴右边的部分.

你看，这种基于概念的分析方法，不用死记硬背，而且真正理解了本质. 区域 D 关于 x 轴对称、关于原

点对称的问题，都与此类似.

第二，**轮换对称性**. 这是考研的重点，也是很多考生始终弄不明白的地方. 先看下面的一个问题：请问 $\iint\limits_{D_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\leqslant 1}(2x^2+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是否等于 $\iint\limits_{D_2:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}\leqslant 1}(2y^2+3x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$？答案显然是肯定的. 因为上述两个积分只是将 x 与 y 这两个字母对调了，而**积分值与用什么字母表示是无关的**，这里并无任何对称性可言. 抽象来说，便有

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \equiv \iint\limits_{D_{yx}} f(y,x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

再看一个问题：请问 $\iint\limits_{D:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\leqslant 1}(2x^2+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是否等于 $\iint\limits_{D:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{4}\leqslant 1}(2y^2+3x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$？答案当然也是肯定的. 理由如上，不再重复. 不过，你是否注意到，这个问题中的区域 D 有个特点，就是当你把 x 与 y 对调后，区域 D 不变（事实上，区域 D 关于 $y=x$ 对称）. 于是抽象化写出的式子为

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

令 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}y\mathrm{d}x$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma$.

整理一下，我们可以这样来描述：

若把 x 与 y 对调后，区域 D 不变（或区域 D 关于 $y=x$ 对称），则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma,$$

这就是**轮换对称性**.

轮换对称性在解决某些“棘手”问题时往往很巧妙. 看个例子.

注例 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，求 $I=\iint\limits_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma$.

解 被积函数是抽象的，无法直接计算，不过我们发现，若把 x 与 y 对调后，区域 D 不变，也就是说区域 D 关于 $y=x$ 对称，根据轮换对称性，有

$$I=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma,$$

故 $$2I=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D (a+b)\mathrm{d}\sigma=(a+b)\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2,$$

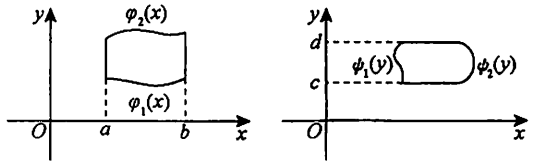
于是 $$I=\frac{a+b}{8}\pi.$$

二、计算

1. 直角坐标系下的计算法

在直角坐标系下，按照积分次序的不同，一般将二重积分的计算分为两种情况，如图 12-3 所示.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）



(a)　　(b)

图 12-3

(1) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$，其中 D 为 X 型区域：$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$；

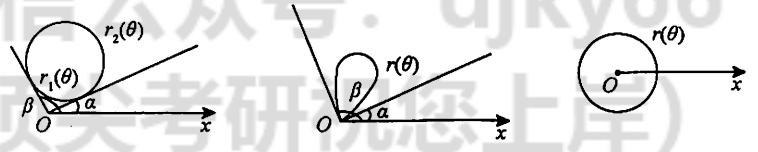
(2) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$，其中 D 为 Y 型区域：$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$.

有一点需要指出，这里的下限都必须小于等于上限.

2. 极坐标系下的计算法

在极坐标系下，按照积分区域与极点位置关系的不同，一般将二重积分的计算分为三种情况，如图 12-4 所示.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)



(a)　　(b)　　(c)

图 12-4

(1) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$（极点 O 在区域 D 外部）；

(2) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$（极点 O 在区域 D 边界上）；

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$（极点 O 在区域 D 内部）.

需要指出的是，有很多同学在复习的过程中提问，为什么在极坐标系下不讨论积分次序的交换问题呢？问得好. 事实上，在极坐标系下，几乎所有的计算都是先积 r，后积 θ，所以一般不讨论.

3. 极坐标系与直角坐标系选择的一般原则

一般来说，给出一个二重积分.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

①看被积函数是否为 $f(x^2+y^2)$，$f\left(\frac{y}{x}\right)$，$f\left(\frac{x}{y}\right)$ 等形式；

②看积分区域是否为圆或者圆的一部分.

如果两者兼是，那么优先选用极坐标系. 否则，就优先考虑直角坐标系.（这只是一般原则，是大方向，请大家一定不要教条化）

4. 极坐标系与直角坐标系的互相转化

把握两个桥梁就可以，一是用好 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 这个公式；二是画出区域 D 的图形，做好上、下限的转化. 请看后面例题中对具体问题的分析.

基础例题精解

1. 直角坐标系下的计算

例 12.1 设 $I_1=\iint\limits_D \sin\left|\frac{x-y}{2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2=\iint\limits_D \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_3=\iint\limits_D \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2\}$，则(　　).

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_2<I_3<I_1$　　(C) $I_3<I_1<I_2$　　(D) $I_3<I_2<I_1$

解　应选(D).

当 $(x,y)\in D$ 时，$-2\leqslant x-y\leqslant 2$，$-1\leqslant\frac{x-y}{2}\leqslant 1$，则当 $(x,y)\in D$，且 $(x,y)\neq(0,2)$，$(x,y)\neq(2,0)$ 时，$0<\left|\frac{x-y}{2}\right|<1$，从而

$$0<\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\left|\frac{x-y}{2}\right|^2<\left|\frac{x-y}{2}\right|<1,$$

所以

$$0<\iint\limits_D \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_D \sin\left|\frac{x-y}{2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又由轮换对称性知，$I_3=\iint\limits_D \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 于是 $I_3<I_2<I_1$.

微信公众号：dlky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 12.2 计算 $\iint\limits_D y\left(1+x\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中平面区域 D 由直线 $y=x, y=-1$ 及 $x=1$ 所围成.

解　积分区域 D 如图 12-5 所示，

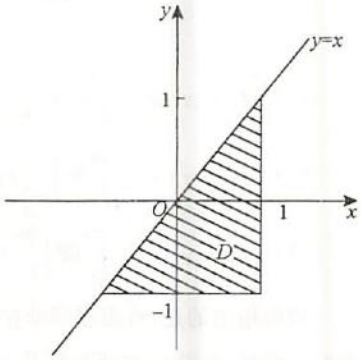


图 12-5

$$\iint\limits_D y\left(1+x\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可直接由区域对称性和函数奇偶性得其值为 0，或者先化为累次积分，再根据对称性得出 0，如下：

$$\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}y\mathrm{d}y\int_{y}^{1}x\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}y\left(\mathrm{e}^{\frac{1+y^2}{2}}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}y=0.$$

而 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{1}y\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}y(1-y)\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}$，故 $\iint\limits_D y\left(1+x\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}$.

例 12.3 计算 $\iint\limits_D |y-x^2|\max\{x,y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

解　用曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=x$ 将区域 D 分为三块：D_1, D_2, D_3，如图 12-6 所示.

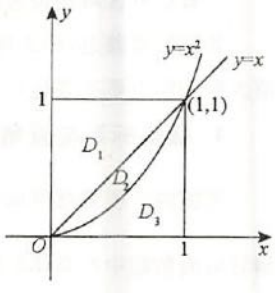


图 12-6

在 D_1 上，$\begin{cases} y\geqslant x^2\Rightarrow |y-x^2|=y-x^2, \\ y\geqslant x\Rightarrow \max\{x,y\}=y. \end{cases}$

在 D_2 和 D_3 上可做类似分析，故

$$\iint_D |y-x^2|\max\{x,y\}\,dxdy=\iint_{D_1}(y-x^2)y\,dxdy+\iint_{D_2}(y-x^2)x\,dxdy+\iint_{D_3}(x^2-y)x\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^1(y^2-x^2y)dy+\int_0^1 dx\int_{x^2}^x(xy-x^3)dy+\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(x^3-xy)dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}\right)dx+\int_0^1\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{2}-x^4+x^5\right)dx+\int_0^1\left(x^5-\frac{x^5}{2}\right)dx=\frac{11}{40}.$$

2. 极坐标系下的计算

例 12.4 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，计算 $\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$.

解 $$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\left(\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}\right)r\,dr=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)d\theta\int_0^R r^3\,dr$$

$$=\frac{r^4}{4}\Big|_0^R\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)d\theta=\frac{\pi R^4(a^2+b^2)}{4a^2b^2}.$$

【注】 本题还可以用轮换对称性来求解.

$$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\iint_D\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)dxdy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint_D(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)r\,dr=\frac{\pi R^4(a^2+b^2)}{4a^2b^2}.$$

微信公众号：diky66
(顶尖考研祝您上岸)

3. 直角坐标系与极坐标系互相转化后的计算

二重积分的考研题有个基本特点，就是命题人所给的坐标系往往是不容易甚至是不能做出积分的. 这就出现了两个出题角度：一是给出极坐标系，你需要转化成直角坐标系去计算；二是反过来，给出直角坐标系，你需要转化成极坐标系去计算. 如此“伎俩”，命题人用心良苦，不过我们早已看透，见怪不怪，请看两个典型的例子.

例 12.5 计算二重积分 $I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,dr d\theta$，其中

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

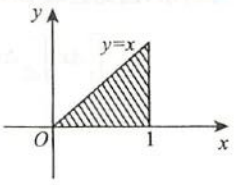


图 12-7

分析 这就是将一个普通的课后练习题改编为 2010 年数学二的考研题，如果题目直接告诉我们，请计算 $I=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dxdy$，其中 D 是由 $y=x,x=1,y=0$ 所围成的平面区域(见图 12-7)，恐怕没有人一上来就用极坐标去计算，因为显然，被积函数中不含 x^2+y^2 的形式，且积分区域不是圆的一部分，所以优先考虑的应该是直角坐标系. 而当命题人“故意选择错误的路子”去做题，做到某一步做不下去的时候，他停下来，请你帮他继续做下去，就出现了如上的考题. 最后不得不指出的是，此题的得分率极低.

解 我们先画出积分区域 D，然后将积分化为直角坐标系下的二重积分，再去计算，即

$$I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\,dr d\theta=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\,d(1-x^2+y^2)=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x.$$

设 $x=\sin t$，则 $I=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$.

例 12.6 计算 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

解 本题乍一看，也许我们会先考虑题目是否在积分次序上设置了障碍，是否需要交换积分次序再做积分，但是，细致做来，我们会发现不管是先对 x 积分，还是先对 y 积分，都不容易计算. 看来这不是积分次序上的问题，这时想想看是不是选择何种坐标系的问题呢？被积函数中含有 x^2+y^2 的形式，且积分区域是圆的一部分，如图 12-8 所示，显然应该优先考虑极坐标系，题目给出的却是直角坐标系，我们需要改变一下. 于是，有

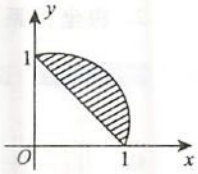


图 12-8

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2}r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta$$

$$=1+1-\frac{\pi}{2}=2-\frac{\pi}{2}.$$

微信公众号：gkxy66
(顶尖考研祝您上岸)

4. 积分次序

例 12.7 计算 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^x\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

解 由于 $\sin\frac{\pi x}{2y}$ 作为 y 的函数，其原函数不能用初等函数表示，因此交换积分次序.

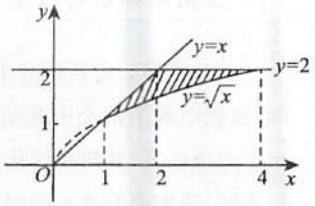


图 12-9

区域 D 由直线 $y=x$，$y=2$ 及抛物线 $y=\sqrt{x}$ 所围成，如图12-9的阴影部分所示，因此区域 D 可以写成 $D=\{(x,y)\,|\,1\leqslant y\leqslant 2,y\leqslant x\leqslant y^2\}$，故

$$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^x\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y=\iint_D\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\frac{2y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}y\right)\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi^3}(2+\pi).$$

5. 用二重积分处理一元积分的问题

例 12.8 设 $f(x)=\int_x^1\sin(\pi u^2)\mathrm{d}u$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解 方法一

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{d}[f(x)]$$

$$=0-\int_0^1 x\mathrm{d}\left[\int_x^1\sin(\pi u^2)\mathrm{d}u\right]$$

$$=\int_0^1 x\sin(\pi x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}.$$

方法二 化为二重积分，交换积分次序.

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\sin(\pi u^2)\mathrm{d}u=\iint_D\sin(\pi u^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^u \sin(\pi u^2)\mathrm{d}x=\int_0^1 u\sin(\pi u^2)\mathrm{d}u=\frac{1}{\pi},$$

这里，$D=\{(x,u)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, x\leqslant u\leqslant 1\}$.

例 12.9 设 $f(x)$ 为恒大于零的连续函数，证明 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 1$.

证明 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，则

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此

$$I=\frac{1}{2}\left[\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\frac{1}{2}\iint_D 2\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}\cdot\frac{f(y)}{f(x)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 12.10 计算 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解 设 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，则

$$I^2=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y=\iint_{\substack{0\leqslant x<+\infty\\0\leqslant y<+\infty}}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{用极坐标变换}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}(-r^2)$$

$$=-\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4},$$

由积分保号性知 $I>0$，故 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

【注】 这一结果经常用到，最好记住.

基础习题精练

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

习题

12.1 按两种不同积分次序化二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为累次积分，其中 D 为：

(1) 直线 $y=x$，抛物线 $y^2=4x$ 所围闭区域；

(2) 直线 $y=0$，曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 所围闭区域；

(3) $(x-1)^2+(y+1)^2\leqslant 1$ 所确定的闭区域.

12.2 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 可以写成(　　).

(A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$　　(B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$　　(D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$

12.3 证明：$\iint\limits_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})dxdy \geqslant 2\pi^2$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$.

12.4 交换积分次序：$\int_0^{\frac{1}{4}} dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{\frac{1}{2}} f(x,y)dx =$ _____.

12.5 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}} dxdy$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

12.6 计算 $I = \iint\limits_D \frac{2e^{x^2} + 3e^{y^2}}{e^{x^2} + e^{y^2}} dxdy$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

12.7 设区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0\}$，计算二重积分 $I = \iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dxdy$.

12.8 设 $F(t) = \iint\limits_{x+y<t} f(x,y)dxdy$，其中 $f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 求 $F(t)$ 的表达式.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝你上岸)

解答

12.1 解　(1) 如图 12-10 所示，则此二重积分可化为累次积分

$$\int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy \text{ 或 } \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^y f(x,y)dx.$$

(2) 如图 12-11 所示，则两种不同累次积分为

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy \text{ 或 } \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)dx.$$

(3) 如图 12-12 所示，则累次积分为

$$\int_0^2 dx \int_{-1-\sqrt{2x-x^2}}^{-1+\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy \text{ 或 } \int_{-2}^0 dy \int_{1-\sqrt{-2y-y^2}}^{1+\sqrt{-2y-y^2}} f(x,y)dx.$$

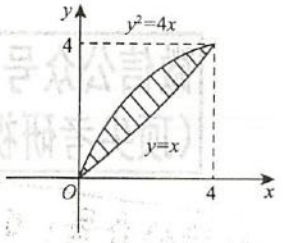


图 12-10

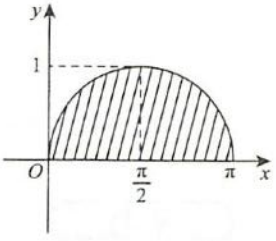


图 12-11

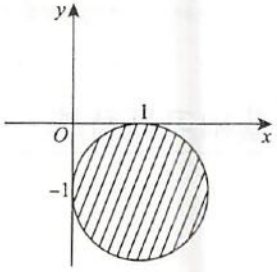


图 12-12

12.2 (D)　解　积分区域 $D = \left\{(r,\theta) \middle| 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant \cos\theta\right\}$，化为直角坐标，可表示为

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x-x^2}\}$$
$$= \left\{(x,y) \middle| 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}\right\}.$$

12.3　证明　积分区域 D 如图 12-13 所示，且关于 $y=x$ 对称.

$$I=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy=\iint_D e^{\sin y}dxdy+\iint_D e^{-\sin x}dxdy,$$

由于 $\iint_D e^{\sin y}dxdy \xlongequal{\text{轮换对称性}} \iint_D e^{\sin x}dxdy$，故

$$I=\iint_D e^{\sin x}dxdy+\iint_D e^{-\sin x}dxdy=\iint_D(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dxdy\geqslant\iint_D 2dxdy=2\pi^2,$$

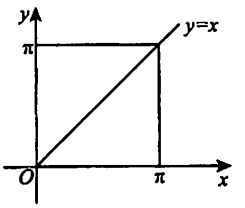


图 12-13

其中 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\geqslant 2\sqrt{e^{\sin x}\cdot e^{-\sin x}}=2$.

12.4　$\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy$　**解**　积分区域为 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},x^2\leqslant y\leqslant x\right\}$，故应填

$$\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy.$$

12.5　解　设 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant y\leqslant 1\}$，则

$$\iint_D e^{\max(x^2,y^2)}dxdy=\iint_{D_1}e^{\max(x^2,y^2)}dxdy+\iint_{D_2}e^{\max(x^2,y^2)}dxdy=\iint_{D_1}e^{x^2}dxdy+\iint_{D_2}e^{y^2}dxdy$$

$$=\int_0^1dx\int_0^x e^{x^2}dy+\int_0^1dy\int_0^y e^{y^2}dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx+\int_0^1 ye^{y^2}dy=e-1.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

12.6　解　积分区域 D 如图 12-14 所示，D 关于直线 $y=x$ 对称.

由轮换对称性，得

$$I=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{2e^x+3e^y}{e^x+e^y}+\frac{2e^y+3e^x}{e^y+e^x}\right)dxdy$$

$$=\frac{5}{2}\iint_D dxdy=\frac{5}{2}\times 1=\frac{5}{2}.$$

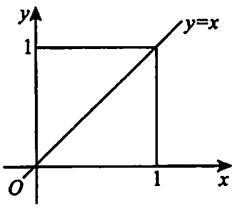


图 12-14

12.7　解　因为 $I_1=\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{1}{1+r^2}rdr=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$，

$$I_2=\iint_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{1+r^2}dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1\frac{r^3}{1+r^2}dr=0,$$

所以

$$I=I_1+I_2=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

12.8　解　由被积函数 $f(x,y)$ 的表达式，可知 $F(t)$ 在数值上等于区域 $x+y\leqslant t$ 与正方形 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 的公共部分的面积.

当 $t\leqslant 0$ 时，$F(t)=0$；当 $0<t\leqslant 1$ 时，$F(t)=\frac{1}{2}t^2$；当 $1<t\leqslant 2$ 时，$F(t)=1-\frac{1}{2}(2-t)^2$；当 $t>2$ 时，$F(t)=1$.

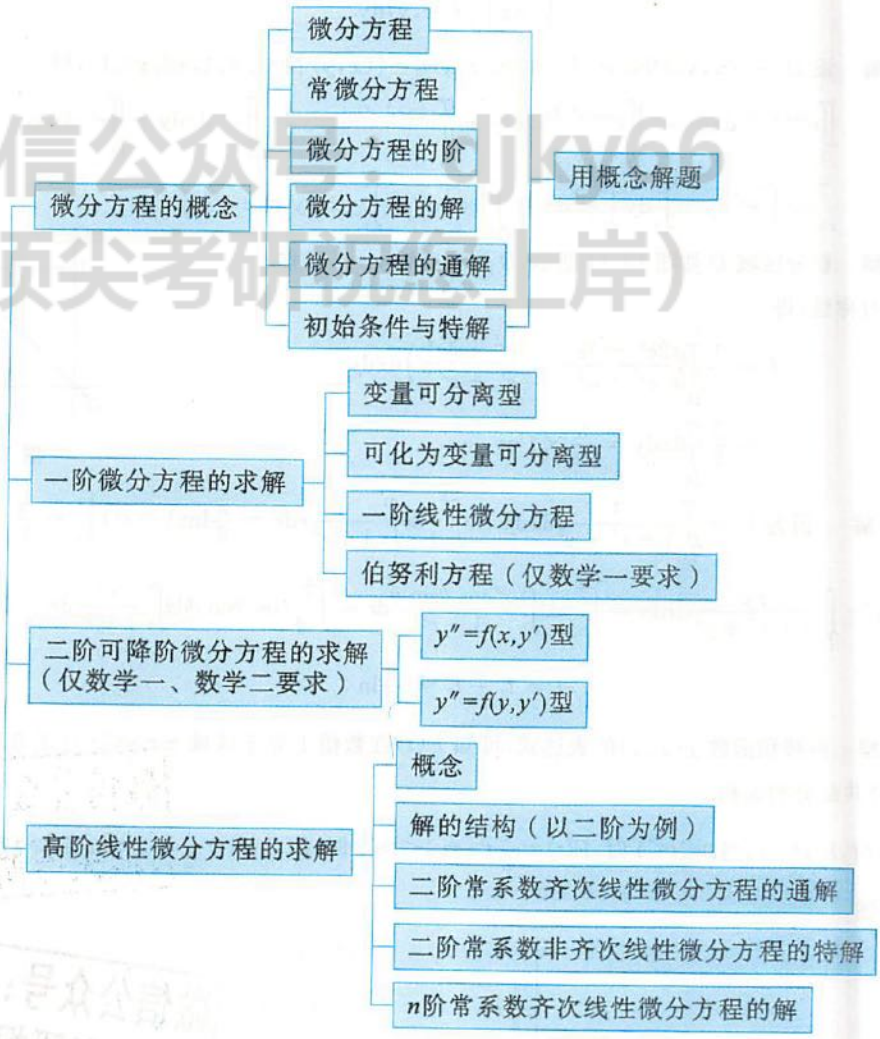
综上所述，

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}t^2, & 0<t\leqslant 1,\\ -\frac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第13讲 常微分方程

基础知识结构



微信公众号：djky66
（顶尖考研陪你上岸）

基础内容精讲

一、微分方程的概念

1. 微分方程

表示未知函数及其导数(或者微分)与自变量之间关系的方程称为**微分方程**. 一般写成

$$F[x,y,y',\cdots,y^{(n)}]=0 \text{ 或 } y^{(n)}=f[x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}].$$

2. 常微分方程

未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**. 如:$y'''-y''+6y=0$,$y\mathrm{d}x-(x+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y=0$.

3. 微分方程的阶

方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶**. 如:$y'''-y''+6y=0$ 就是三阶微分方程.

4. 微分方程的解

若将函数代入微分方程,使方程成为恒等式,则该函数称为**微分方程的解**. 设 $y=y(x)$ 在区间 I 上连续且有直到 n 阶的导数,使 $F[x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x)]\equiv 0$,则称 $y=y(x)$ 为该微分方程在区间 I 上的一个解.

5. 微分方程的通解

若微分方程的解中含有的独立常数的个数等于微分方程的阶数,则该解称为微分方程的**通解**.

也就是说,若 $y=y(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 是 n 阶微分方程 $F[x,y,y',\cdots,y^{(n)}]=0$ 在区间 I 上的解,其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为 n 个独立的常数,则称它为该微分方程的通解.

6. 初始条件与特解

确定通解中常数的条件就是**初始条件**. 如:$y(x_0)=a_0$,$y'(x_0)=a_1$,$\cdots$,$y^{(n-1)}(x_0)=a_{n-1}$,其中 a_0,$a_1,\cdots,a_{n-1}$ 为 n 个给定的数. 确定了通解中的常数后,解就成了**特解**.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

二、一阶微分方程的求解

1. 变量可分离型

能写成 $y'=f(x)g(y)$ 形式的方程称为**变量可分离型方程**. 其解法为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例如:$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x-y}=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-y}\Rightarrow\int\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^x+C(\text{隐式解}),\\ y=\ln(\mathrm{e}^x+C)(\text{显式解}).\end{cases}$

见例 13.1.

【注】 有时将 $g(y)$ 放到分母中,即要求 $g(y)\neq 0$,但 $g(y)$ 本身并没有非零的要求,可能会丢解,丢的什么解?该如何处理?见例 13.2 的“解”与“注”.

2. 可化为变量可分离型

(1)形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)$ 的方程,其中常数 a,b 全都不为零. 其解法为令 $u=ax+by+c$,则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+$

$b\dfrac{dy}{dx}$，代入原方程得$\dfrac{du}{dx}=a+bf(u)$. 见例 13.2.

(2)齐次型微分方程.

如，对于微分方程

$$\left(x+y\cos\frac{y}{x}\right)dx-x\cos\frac{y}{x}dy=0,$$

将其变形为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y\cos\frac{y}{x}}{x\cos\frac{y}{x}}=\frac{1+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}}{\cos\frac{y}{x}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

形如$\dfrac{dy}{dx}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$的方程叫作齐次型微分方程. 其解法为令 $u=\dfrac{y}{x}$，则

$$y=ux\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

于是原方程变为 $x\dfrac{du}{dx}+u=\varphi(u)$，即$\dfrac{du}{\varphi(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$. 见例 13.3.

3. 一阶线性微分方程

形如 $y'+p(x)y=q(x)$的方程，其中 $p(x)$，$q(x)$为已知的连续函数，其通解公式为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx+C\right].$$

具体见例 13.4.

请大家一定要掌握该公式的推导过程，这是一个很好的锻炼机会，不要错过.

推导计算公式 在方程两边同时乘以 $e^{\int p(x)dx}$，得

$$e^{\int p(x)dx}\cdot y'+e^{\int p(x)dx}p(x)\cdot y=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x),$$

于是

$$\left[e^{\int p(x)dx}\cdot y\right]'=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x),$$

两边积分，得

$$e^{\int p(x)dx}\cdot y=\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx+C,$$

则

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx+C\right].$$

【注】 在一阶线性微分方程的通解公式 $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx+C\right]$中，若

$$\int p(x)dx=\ln|\varphi(x)|,$$

则

$$e^{\int p(x)dx}=|\varphi(x)|=\pm\varphi(x),\quad e^{-\int p(x)dx}=\pm\frac{1}{\varphi(x)},$$

代入上述公式中，有

$$\begin{aligned}y&=\pm\frac{1}{\varphi(x)}\left[\int\pm\varphi(x)\cdot q(x)dx+C\right]\\&=\frac{1}{\varphi(x)}\left[\int\varphi(x)\cdot q(x)dx\pm C\right]\\&\xrightarrow{\text{令}\pm C=D}\frac{1}{\varphi(x)}\left[\int\varphi(x)\cdot q(x)dx+D\right],\end{aligned}$$

其中 D 依然为任意常数，故 $e^{\int p(x)dx}=|\varphi(x)|$ 可不加绝对值.

在其他计算过程中，若出现 $\ln u$，且 u 不知正负，一律加绝对值.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

4. 伯努利方程(仅数学一要求)

形如 $y'+p(x)y=q(x)y^n(n\neq 0,1)$ 的方程,其中 $p(x),q(x)$ 为已知的连续函数. 其解法具体步骤为

(1)先变形为 $y^{-n}\cdot y'+p(x)y^{1-n}=q(x)$;

(2)令 $z=y^{1-n}$,得 $\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$,则 $\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$;

(3)解此一阶线性微分方程即可.

见例 13.5.

三、二阶可降阶微分方程的求解(仅数学一、数学二要求)

1. $y''=f(x,y')$型(方程中不显含未知函数 y)

(1)令 $y'=p(x)$,$y''=p'$,则原方程变为一阶方程 $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$;

(2)若求得其通解为 $p=\varphi(x,C_1)$,即 $y'=\varphi(x,C_1)$,则原方程的通解为 $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$.

见例 13.6.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

2. $y''=f(y,y')$型(方程中不显含自变量 x)

(1)令 $y'=p$,$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$,则原方程变为一阶方程 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$;

(2)若求得其通解为 $p=\varphi(y,C_1)$,则由 $p=\frac{dy}{dx}$ 可得 $\frac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1)$,分离变量得 $\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx$;

(3)两边积分得 $\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$,即可求得原方程的通解.

见例 13.7.

四、高阶线性微分方程的求解

1. 概念

(1)方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 称为**二阶变系数线性微分方程**,其中 $p(x),q(x)$ 叫系数函数,$f(x)$ 叫自由项,均为已知的连续函数.

当 $f(x)\equiv 0$ 时,$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 为**齐次方程**;

当 $f(x)$ 不恒等于 0 时,$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 为**非齐次方程**.

(2)方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 称为**二阶常系数线性微分方程**,其中 p,q 为常数,$f(x)$ 叫自由项,为连续函数.

当 $f(x)\equiv 0$ 时,$y''+py'+qy=0$ 为**齐次方程**;

当 $f(x)$ 不恒等于 0 时,$y''+py'+qy=f(x)$ 为**非齐次方程**.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

2. 解的结构(以二阶为例)

(1)若 $y_1(x),y_2(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个解,且 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq C$(常数),则称 $y_1(x),y_2(x)$ 是该方程的两个**线性无关的解**,且 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的通解.

(2)若 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的通解,$y^*(x)$ 是

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

的一个特解，则 $y(x)+y^*(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的通解.

(3)若 $y_1^*(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$ 的解，$y_2^*(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$ 的解，则 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的解.

3. 二阶常系数齐次线性微分方程的通解

对于 $y''+py'+qy=0$，其对应的特征方程为 $r^2+pr+q=0$，求其特征根，有以下三种情况请大家牢记(其中 C_1，C_2 为任意常数).

(1)若 $p^2-4q>0$，设 r_1，r_2 是特征方程的两个不等实根，即 $r_1\neq r_2$，可得其通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}.$$

(2)若 $p^2-4q=0$，设 r_1，r_2 是特征方程的两个相等的实根，即二重根，令 $r_1=r_2=r$，可得其通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{rx}.$$

(3)若 $p^2-4q<0$，设 $\alpha\pm\beta i$ 是特征方程的一对共轭复根，可得其通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

4. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

对于 $y''+py'+qy=f(x)$，《考试大纲》规定我们需要会解以下两种情况.

设 $P_n(x)$，$P_m(x)$ 分别为 x 的 n 次、m 次多项式.

(1)当自由项 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ 时，特解要设为 $y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k$，

其中
$$\begin{cases} e^{\alpha x}\text{照抄}, \\ Q_n(x)\text{为 } x \text{ 的 } n \text{ 次多项式}, \\ k=\begin{cases} 0, & \alpha \text{ 不是特征根}, \\ 1, & \alpha \text{ 是单特征根}, \\ 2, & \alpha \text{ 是二重特征根}. \end{cases} \end{cases}$$

(2)当自由项 $f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$ 时，特解要设为

$$y^*=e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k,$$

其中
$$\begin{cases} e^{\alpha x}\text{照抄}, \\ l=\max\{m,n\},Q_l^{(1)}(x),Q_l^{(2)}(x)\text{分别为 } x \text{ 的两个不同的 } l \text{ 次多项式}, \\ k=\begin{cases} 0, & \alpha\pm\beta i \text{ 不是特征根}, \\ 1, & \alpha\pm\beta i \text{ 是特征根}. \end{cases} \end{cases}$$

见例 13.8.

5. n 阶常系数齐次线性微分方程的解

方程 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$ 称为 n 阶常系数齐次线性微分方程，其中 p_1，p_2，…，p_n 为常数，其对应的特征方程为 $r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$，求出其特征根. 有如下情况需要大家牢记(其中大写的英文字母均为任意常数).

(1)特征根为单实根 r 时，微分方程通解中对应一项 Ce^{rx}；

(2)特征根为 k 重实根 r 时，微分方程通解中对应 k 项 $(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{rx}$；

(3)特征根为单复根 $\alpha\pm\beta i(\beta>0)$ 时，微分方程通解中对应两项 $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$；

(4)特征根为 k 重复根 $\alpha\pm\beta i(\beta>0)$ 时，微分方程通解中对应 $2k$ 项

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x].$$

见例 13.9.

微信公众号：djky66
(顶尖考研陪您上岸)

基础例题精解

一、一阶微分方程的求解

1. 变量可分离型

例 13.1 微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是_____.

分析 本题为变量可分离的微分方程，也是一阶齐次线性微分方程，任选一种方法解之即可. 由于题中 x 在分母上，故 $x\neq 0$. 以下不再指出.

解 应填 $y=Cxe^{-x}$（C 为任意常数）.

分离变量，并两边积分，设 $y\neq 0$，有

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{1-x}{x}dx,$$

$$\ln|y|=\ln|x|-x+C_1,$$

去掉对数符号，得

$$|y|=e^{C_1}|x|e^{-x}.$$

令 $C_2=e^{C_1}>0$，再去掉等式左、右两边的绝对值符号，得

$$y=Cxe^{-x}(C=\pm C_2\neq 0).$$

另一方面，$y=0$ 也是原方程的一个解，此解可以认为是上式中令 $C=0$ 而得到，故得通解

$$y=Cxe^{-x}(C\text{ 为任意常数}).$$

【注】 本题为 2006 年数学一的实际考试题. 题虽简单，但答题错误不少. 下面 4 种答案都是错的：

①$\ln y=\ln x-x+C$；②$y=e^{C}xe^{-x}$；③$y=Ce^{\ln x-x}$；④$y=e^{\ln x-x+C}$.

其中 ① 限制了 $x>0,y>0$；② 限制了 x 与 y 同号；③ 限制了 $x>0$；④ 限制了 $x>0,y>0$. 这些错误大都源于将积分 $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ 做成了 $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$，$\int\frac{dy}{y}=\ln|y|+C$ 做成了 $\int\frac{dy}{y}=\ln y+C$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

2. 可化为变量可分离型

例 13.2 求微分方程 $dy=\sin(x+y+100)dx$ 的通解.

解 ①方程可写成 $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y+100)$，令 $u=x+y+100$，则 $\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$，于是原方程化为 $\frac{du}{dx}=1+\sin u$，就得到了变量可分离型方程.

②分离变量，得 $\frac{du}{1+\sin u}=dx$，恒等变形，有 $\frac{(1-\sin u)du}{1-\sin^2 u}=dx$，即 $(\sec^2 u-\tan u\sec u)du=dx$.

两边积分，得 $\tan u-\sec u=x+C$. 将 $u=x+y+100$ 代入，得原方程的通解为

$$\tan(x+y+100)-\sec(x+y+100)=x+C,$$

其中 C 为任意常数.

【注】 事实上，在本题解析过程中的②处，分离变量得$\frac{du}{1+\sin u}=dx$时，默认了一件事情，那就是$\sin u\neq -1$，回避了$1+\sin u=0$的情况，从而丢掉了全部解中的部分解（可称为“奇解”）. 当$\sin u=-1$时，得

$$x+y+100=2k\pi-\frac{\pi}{2},$$

其中$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$. 在《考试大纲》中，只要求求通解，并不要求求出全部解.

例 13.3 设L是一条平面曲线，其上任意一点$P(x,y)(x>0)$到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在y轴上的截距，且L经过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$. 求曲线$L$的方程.

解 设曲线L过点$P(x,y)$的切线方程为$Y-y=y'(X-x)$. 令$X=0$，得该切线在y轴上的截距为$y-xy'$.

由题设知$\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$，令$u=\frac{y}{x}$，则此方程可化为$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}$，解之得

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C.$$

由L经过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$，知$C=\frac{1}{2}$. 于是$L$的方程为$y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$，即$y=\frac{1}{4}-x^2(x>0)$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

3. 一阶线性微分方程

例 13.4 设$F(x)=f(x)g(x)$，其中函数$f(x)$与$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足以下条件：

$$f'(x)=g(x),g'(x)=f(x),\text{且 } f(0)=0,f(x)+g(x)=2e^x.$$

(1)求$F(x)$所满足的微分方程；

(2)求出$F(x)$的表达式.

解 (1)
$$\begin{aligned}F'(x)&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=g^2(x)+f^2(x)\\&=[g(x)+f(x)]^2-2f(x)g(x)\\&=4e^{2x}-2F(x),\end{aligned}$$

$F(x)$满足$F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$及初始条件$F(0)=f(0)g(0)=0$.

(2)解关于$F(x)$的一阶线性微分方程$F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$，得

$$F(x)=e^{-2x}\left(\int 4e^{2x}\cdot e^{2x}dx+C\right)=e^{-2x}(e^{4x}+C),$$

再由$F(0)=0$，得$C=-1$，所以$F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$.

4. 伯努利方程（仅数学一要求）

例 13.5 求$ydx=(1+x\ln y)xdy(y>0)$的通解.

解 方程变形为$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=\frac{\ln y}{y}x^2$，这是以$y$为自变量，$x$为未知函数的伯努利方程（如果以$x$为自变量，$y$为未知函数来解方程，是极其困难的，所以当我们遇到困难时，要学会“换位思考”——x与y，谁作为自变量，谁作为未知函数是可以互换的）.

①两边同时除以x^2，并令$z=x^{-1}$，有$\frac{dz}{dy}=-\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dy}$，于是方程化为$\frac{dz}{dy}+\frac{1}{y}z=-\frac{\ln y}{y}$；

②应用一阶线性微分方程的通解公式，得

$$z=\frac{1}{x}=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int\left(-\frac{\ln y}{y}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y+C\right]=\frac{1}{y}[y(1-\ln y)+C],$$

故通解为 $\frac{1}{x}=1-\ln y+\frac{C}{y}$（$y>0$，$C$ 为任意常数）.

二、二阶可降阶微分方程的求解（仅数学一、数学二要求）

1. $y''=f(x,y')$ 型

例 13.6 求 $y''=\frac{2xy'}{1+x^2}$ 的通解.

解 设 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$，将其代入方程后可得 $p'=\frac{2xp}{1+x^2}$.

此方程为变量可分离型方程，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$，两边积分并化简，得 $p=C_1(1+x^2)$，从而有 $y'=C_1(1+x^2)$. 再两边积分可得原方程的通解为 $y=C_1\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)+C_2$，其中 C_1，C_2 为任意常数.

2. $y''=f(y,y')$ 型

例 13.7 求微分方程 $2yy''+(y')^2=0$ 的通解，其中 $y>0$.

解 ①令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，于是原方程可化为一阶方程 $2yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$，即 $p\left(2y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p\right)=0$，故 $2y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p=0$（$p=0$ 暂不考虑），分离变量得 $\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\mathrm{d}y}{2y}$，两边积分后有

$$\ln|p|=-\frac{1}{2}\ln y+\ln C_0,$$

从而 $p=\pm C_0\frac{1}{\sqrt{y}}=C_1\frac{1}{\sqrt{y}}$（$C_1=\pm C_0$）.

②由 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1}{\sqrt{y}}$，分离变量，积分得 $\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=C_1x+C_2$，令 $C=\frac{3}{2}C_1$，$D=\frac{3}{2}C_2$，即

$$y=(Cx+D)^{\frac{2}{3}}，\text{其中 } C,D \text{ 为任意常数，且 } C\neq 0.$$

③由 $p=0$ 可得 $y\equiv$常数，对应②中 $C=0$ 的情况.

综上，原方程的通解为 $y=(Cx+D)^{\frac{2}{3}}$，其中 C，D 为任意常数.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

三、高阶线性微分方程的求解

例 13.8 设 A，B，C 为待定常数，微分方程 $y''-2y'+5y=2\mathrm{e}^x\sin^2x$ 的特解形式为（　　）.

(A) $A\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　(B) $A\mathrm{e}^x\sin^2x$

(C) $A\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　(D) $A\mathrm{e}^x\cos^2x$

解 应选(A).

题中微分方程的自由项可改写为

$$2\mathrm{e}^x\sin^2x=2\mathrm{e}^x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\cos 2x,$$

用解的叠加原理考虑两个方程

$$y''-2y'+5y=e^x \tag{①}$$

及

$$y''-2y'+5y=-e^x\cos 2x. \tag{②}$$

由于题中微分方程对应齐次方程的特征方程为 $r^2-2r+5=0$，特征根为 $1\pm 2i$. 按上述分析，①的特解应设为 $y_1^*=Ae^x$. ②中自由项相应的 $\alpha\pm\beta i=1\pm 2i$，故应设特解

$$y_2^*=x(Be^x\cos 2x+Ce^x\sin 2x).$$

由解的叠加原理，应设特解

$$y^*=y_1^*+y_2^*=Ae^x+xe^x(B\cos 2x+C\sin 2x).$$

例 13.9 已知某 n 阶常系数齐次线性微分方程有特解 $y_1(x)=e^x\cos 2x$，$y_2(x)=x$，且方程中 $y^{(n)}$ 前的系数为 1，则最小的 $n=$_____，该方程为_____.

解 应填 4；$y^{(4)}-2y^{(3)}+5y''=0$.

该方程有解 $y_1(x)=e^x\cos 2x$，必有另一解 $y_3(x)=e^x\sin 2x$，可知对应的特征根为 $1\pm 2i$；该方程有解 $y_2(x)=x$，必有另一解 $y_4(x)=C$（C 为常数），可知 $r=0$ 至少为二重根. 由以上分析可知，原微分方程的特征方程至少有 4 个特征根：$1\pm 2i$，0（二重），故次数最小的特征方程为

$$[r-(1+2i)][r-(1-2i)]r^2=0,$$

即

$$r^4-2r^3+5r^2=0,$$

所以满足条件的阶数最小的微分方程为

$$y^{(4)}-2y^{(3)}+5y''=0.$$

微信公众号：qky66
(顶尖考研祝您上岸)

四、根据微分方程的概念解题

并非所有方程都要求解后才能解决问题，这里给出用微分方程的概念而不用求解的例子.

1. 已知微分方程的解，反求系数

例 13.10 设 y_1，y_2 是一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ，μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则（　　）.

(A) $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{1}{2}$　　(B) $\lambda=-\frac{1}{2}$，$\mu=-\frac{1}{2}$

(C) $\lambda=\frac{2}{3}$，$\mu=\frac{1}{3}$　　(D) $\lambda=\frac{2}{3}$，$\mu=\frac{2}{3}$

解 应选(A).

将解 $\lambda y_1+\mu y_2$ 代入方程 $y'+p(x)y=q(x)$，得 $\lambda[y_1'+p(x)y_1]+\mu[y_2'+p(x)y_2]=q(x)$.

又 $y_1'+p(x)y_1=q(x)$，$y_2'+p(x)y_2=q(x)$，故

$$\lambda+\mu=1. \tag{①}$$

将解 $\lambda y_1-\mu y_2$ 代入方程 $y'+p(x)y=0$，得

$$\lambda[y_1'+p(x)y_1]-\mu[y_2'+p(x)y_2]=0.$$

又 $y_1'+p(x)y_1=q(x)$，$y_2'+p(x)y_2=q(x)$，故

$$\lambda-\mu=0. \tag{②}$$

联立①，②两式，得 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{1}{2}$，所以选择(A).

2. 不解微分方程，而利用方程所隐含的信息解题

$F[y,y',y'',\cdots,y^{(n)}]=0$ 反映了未知函数 y 及其各阶导数之间的关系，故可以充分利用此关系来解决问题.

例 13.11 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0（　　）.

(A)取得极大值　　(B)取得极小值

(C)某个邻域内单调增加　　(D)某个邻域内单调减少

分析 乍一看题目，$y''-2y'+4y=0$ 是《考试大纲》要求的一个很简单的微分方程，于是很多同学便先去写它的解，再去讨论问题. 姑且不论这样做能否解决问题(事实上，由于初始条件不够，是解不出特解的)，考场上时间有限，需要的是效率，是最好的解题方法. 希望大家在平时的复习中，努力研究最“恰当”的方法，这种“恰当”也正是命题人想考查你的地方.

解 应选(A).

由题设，有 $f''(x_0)-2f'(x_0)+4f(x_0)=0$，结合 $f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$，可得 $f''(x_0)=-4f(x_0)<0$，又 $f'(x_0)=0$，由极值判别的第二充分条件知，点 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 答案选择(A).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础习题精练

习题

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

13.1 求微分方程 $\left(x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\right)\arctan\dfrac{y}{x}=x$ 的通解.

13.2 微分方程 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y\Big|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$_____.

13.3 求微分方程 $y'+1=\mathrm{e}^{-y}\sin x$ 的通解.

13.4 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程 $f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $f(t)$.

13.5(仅数学一) 求 $(x+2)y''+x(y')^2=y'$ 的通解.

13.6 求 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^{-x}\cos x+\mathrm{e}^{2x}(4x+5)$ 的通解.

13.7 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma\mathrm{e}^x$ 的一个特解为 $y^*=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$. 确定常数 α,β,γ，并求该方程的通解.

13.8 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数线性微分方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限（　　）.

(A)不存在　　(B)等于 1　　(C)等于 2　　(D)等于 3

13.9 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的特解.

(1)求 $y(x)$;

(2)设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant y(x)\}$,求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解答

13.1 **分析** 所求微分方程为齐次型微分方程,只要作代换 $u=\dfrac{y}{x}$ 解之即可.

解 方程变形为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\arctan\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$,令 $u=\dfrac{y}{x}$,则有 $\arctan u\,du=\dfrac{dx}{x}$,两边积分,得

$$u\arctan u-\int\frac{u}{1+u^2}du=\int\frac{dx}{x},$$

所以有 $u\arctan u-\dfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+\ln C$,即 $u\arctan u=\ln(C\cdot|x|\sqrt{1+u^2})$.

代回 $u=\dfrac{y}{x}$,得 $\dfrac{y}{x}\arctan\dfrac{y}{x}=\ln(C\sqrt{x^2+y^2})$,即得原方程的通解为

$$C\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\arctan\frac{y}{x}},\text{其中 } C \text{ 为任意正常数.}$$

13.2 $\sqrt{x}$ **解** 将微分方程变形为 $\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{x}{y}=3y$,这是一阶线性微分方程,其通解为

$$x=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left(\int 3ye^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right)=\frac{1}{y}\left(\int 3y^2dy+C\right)=y^2+\frac{C}{y}.$$

将 $y\Big|_{x=1}=1$ 代入上式,得 $C=0$,于是 $x=y^2$,即 $y=\pm\sqrt{x}$. 注意到 $y\Big|_{x=1}=1$,故将 $y=-\sqrt{x}$ 舍去,得

$$y=\sqrt{x}.$$

13.3 **解** 将方程 $y'+1=e^{-y}\sin x$ 变形为 $(e^y)'+e^y=\sin x$,这是关于 e^y 的一阶线性微分方程.

利用一阶非齐次线性微分方程的通解公式,得

$$e^y=e^{-\int dx}\left(C+\int\sin x\cdot e^{\int dx}dx\right)=e^{-x}\left(C+\int e^x\sin x\,dx\right)$$

$$=e^{-x}\left[C+\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\right].$$

【注】 变量代换是求解微分方程问题的重要方法.

13.4 **解** 显然 $f(0)=1$,由于

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}r\right)r\,dr=2\pi\int_0^{2t}rf\left(\frac{1}{2}r\right)dr,$$

可见 $$f(t)=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t}rf\left(\frac{1}{2}r\right)dr,\quad f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+8\pi tf(t).$$

解上述关于 $f(t)$ 的一阶非齐次线性微分方程,得

$$f(t)=\left(\int 8\pi te^{4\pi t^2}e^{-\int 8\pi t dt}dt+C\right)e^{\int 8\pi t dt}=\left(8\pi\int t\,dt+C\right)e^{4\pi t^2}=(4\pi t^2+C)e^{4\pi t^2},$$

将 $f(0)=1$ 代入,得 $C=1$. 因此 $f(t)=(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}$.

13.5 **解** 令 $y'=p$,有 $y''=\dfrac{dp}{dx}$,原式成为 $(x+2)\dfrac{dp}{dx}+xp^2=p$,即 $\dfrac{dp}{dx}-\dfrac{p}{x+2}=-\dfrac{x}{x+2}p^2$. 两边同除以

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

$-p^2$，化为$\frac{\mathrm{d}p^{-1}}{\mathrm{d}x}+\frac{p^{-1}}{x+2}=\frac{x}{x+2}$，得

$$p^{-1}=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{x}{x+2}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x+2}\left(\int x\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x+2}\left(\frac{x^2}{2}+C\right).$$

解出 $$p=\frac{2(x+2)}{x^2+2C}\xrightarrow{\text{改写为}}\frac{2x+4}{x^2+C_1}(C_1=2C),\qquad(*)$$

①当$C_1>0$时，得$y=\ln(x^2+C_1)+\frac{4}{\sqrt{C_1}}\arctan\frac{x}{\sqrt{C_1}}+C_2$；

②当$C_1=0$时，得$y=2\ln|x|-\frac{4}{x}+C_2$；

③当$C_1<0$时，得$y=\ln|x^2+C_1|+\frac{2}{\sqrt{-C_1}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{-C_1}}{x+\sqrt{-C_1}}\right|+C_2$，

其中C_2为任意常数.

【注】 若题中给出初始条件，例如$y(0)=1,y'(0)=4$，则应由式$(*)$先定出$C_1=1$，再积分. 由于此时$C_1>0$，所以不必再讨论C_1的各种情况. 可见，应尽早代入初始条件定出任意常数.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

13.6 解 特征方程为$r^2-3r+2=0$. 其解为$r_1=2,r_2=1$. 因此对应的齐次微分方程的通解是

$$\bar{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

为求非齐次微分方程的一个特解，将原方程分解为两个方程：

$$y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^{-x}\cos x,\qquad①$$

$$y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{2x}(4x+5).\qquad②$$

方程①的一个特解可设为$Y_1=\mathrm{e}^{-x}(A\cos x+B\sin x)$，求得

$$Y_1'=\mathrm{e}^{-x}[(B-A)\cos x-(A+B)\sin x],$$

$$Y_1''=\mathrm{e}^{-x}(-2B\cos x+2A\sin x).$$

代入方程①解得$A=\frac{1}{5},B=-\frac{1}{5}$，即$Y_1=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}(\cos x-\sin x)$.

方程②的一个特解设为$Y_2=\mathrm{e}^{2x}\cdot x(ax+b)$，求得

$$Y_2'=\mathrm{e}^{2x}[2ax^2+2(a+b)x+b],\quad Y_2''=\mathrm{e}^{2x}[4ax^2+(8a+4b)x+2a+4b].$$

代入方程②解得$a=2,b=1$，即$Y_2=\mathrm{e}^{2x}(2x^2+x)$.

因此 $$Y=Y_1+Y_2=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}(\cos x-\sin x)+\mathrm{e}^{2x}(2x^2+x)$$

是原方程的一个特解，从而原方程的通解为

$$y=\bar{y}+Y=C_1\mathrm{e}^x+(C_2+x+2x^2)\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x}(\cos x-\sin x),$$

其中C_1,C_2为任意常数.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

13.7 解 由题设特解知原方程的特征根为1和2，所以特征方程为$(r-1)(r-2)=0$，即

$$r^2-3r+2=0,$$

于是$\alpha=-3,\beta=2$. 为确定γ，只需将特解$y_1^*=x\mathrm{e}^x$代入方程，得

$$(x+2)\mathrm{e}^x-3(x+1)\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x=\gamma\mathrm{e}^x,$$

$$\gamma=-1.$$

基础内容精讲

一、常数项级数的概念与性质

1. 引言

古希腊数学家芝诺曾经讲了一个有趣的悖论：一个人从 A 点走到 B 点，先走完路程的 $\frac{1}{2}$，然后走完剩下路程的 $\frac{1}{2}$，再走完剩下路程的 $\frac{1}{2}$，……依此类推，一直走下去，永远走不到终点.

我们不妨将芝诺的文字描述写成如下的数学表达式.

假设此人匀速前进走完路程的 $\frac{1}{2}$ 要用半个小时，则按照芝诺的描述，从 A 点到 B 点所用总时间 T 可以写成：

$$T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots.$$

微信公众号：djky66
(研途考研视频上岸)

这便出现了无穷多项相加的式子，且越往后的项就越小，这“无穷多个越来越小的项加起来”的表达式合理吗？芝诺认为不对，其核心问题就在于以前人们所接触的都是**有限项相加**，项数再多，也加得完；现在出现了无穷多项相加，用所谓的加法是永远加不到尽头的. 接下来，我们就要开始研究这个总时间 T 的表达式到底是什么，该如何处理它.

2. 概念及其敛散性

给定一个无穷数列 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$，将其各项用加号连起来得到的记号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

叫作**无穷级数**，简称**级数**，其中 u_n 叫作该级数的**通项**. 若 u_n 是常数而不是函数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 就被更为细致地称为**常数项无穷级数**，简称**常数项级数**. 正如在引言中所写出的总时间 $T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，这里的通项 $u_n=\frac{1}{2^n}$. 之所以称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一个记号，是说这种相加只是**形式上**的，因为无穷多项是不可能逐一相加求和的，那么该如何处理“无穷多项相加”呢？

现将级数中的各项逐一相加，得到下面这些和：

$$S_1=u_1,\quad S_2=u_1+u_2,\quad S_3=u_1+u_2+u_3,\cdots,$$
$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\cdots,$$

这称为级数的**部分和**，$\{S_n\}$ 就是级数的**部分和数列**. 显然，我们愿意去研究当 $n\to\infty$ 时所发生的事情，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，这便道出了无穷多项相加的方法：用极限工具来处理. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$（一个存在的有限数），则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**，并称 S 为该收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**和**；若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在或为 $\pm\infty$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **发散**. 雅各布·伯努利曾在自己的文章中这样写道：“末项消逝的无穷级数之和**有时有限而有时无限或不定**”. 这里的“有限”与

$-p^2$，化为$\frac{\mathrm{d}p^{-1}}{\mathrm{d}x}+\frac{p^{-1}}{x+2}=\frac{x}{x+2}$，得

$$p^{-1}=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{x}{x+2}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x+2}\left(\int x\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x+2}\left(\frac{x^2}{2}+C\right).$$

解出 $$p=\frac{2(x+2)}{x^2+2C}\xrightarrow{\text{改写为}}\frac{2x+4}{x^2+C_1}(C_1=2C),\qquad(*)$$

①当$C_1>0$时，得$y=\ln(x^2+C_1)+\frac{4}{\sqrt{C_1}}\arctan\frac{x}{\sqrt{C_1}}+C_2$；

②当$C_1=0$时，得$y=2\ln|x|-\frac{4}{x}+C_2$；

③当$C_1<0$时，得$y=\ln|x^2+C_1|+\frac{2}{\sqrt{-C_1}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{-C_1}}{x+\sqrt{-C_1}}\right|+C_2$，

其中C_2为任意常数.

【注】 若题中给出初始条件，例如$y(0)=1,y'(0)=4$，则应由式$(*)$先定出$C_1=1$，再积分. 由于此时$C_1>0$，所以不必再讨论C_1的各种情况. 可见，应尽早代入初始条件定出任意常数.

13.6 解 特征方程为$r^2-3r+2=0$. 其解为$r_1=2,r_2=1$. 因此对应的齐次微分方程的通解是

$$\bar{y}=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

为求非齐次微分方程的一个特解，将原方程分解为两个方程：

$$y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^{-x}\cos x,\qquad①$$

$$y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{2x}(4x+5).\qquad②$$

方程①的一个特解可设为$Y_1=\mathrm{e}^{-x}(A\cos x+B\sin x)$，求得

$$Y_1'=\mathrm{e}^{-x}[(B-A)\cos x-(A+B)\sin x],$$

$$Y_1''=\mathrm{e}^{-x}(-2B\cos x+2A\sin x).$$

代入方程①解得$A=\frac{1}{5},B=-\frac{1}{5}$，即$Y_1=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}(\cos x-\sin x)$.

方程②的一个特解设为$Y_2=\mathrm{e}^{2x}\cdot x(ax+b)$，求得

$$Y_2'=\mathrm{e}^{2x}[2ax^2+2(a+b)x+b],\quad Y_2''=\mathrm{e}^{2x}[4ax^2+(8a+4b)x+2a+4b].$$

代入方程②解得$a=2,b=1$，即$Y_2=\mathrm{e}^{2x}(2x^2+x)$.

因此 $$Y=Y_1+Y_2=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}(\cos x-\sin x)+\mathrm{e}^{2x}(2x^2+x)$$

是原方程的一个特解，从而原方程的通解为

$$y=\bar{y}+Y=C_1\mathrm{e}^{x}+(C_2+x+2x^2)\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x}(\cos x-\sin x),$$

其中C_1,C_2为任意常数.

13.7 解 由题设特解知原方程的特征根为1和2，所以特征方程为$(r-1)(r-2)=0$，即

$$r^2-3r+2=0,$$

于是$\alpha=-3,\beta=2$. 为确定γ，只需将特解$y_1^*=x\mathrm{e}^{x}$代入方程，得

$$(x+2)\mathrm{e}^{x}-3(x+1)\mathrm{e}^{x}+2x\mathrm{e}^{x}=\gamma\mathrm{e}^{x},$$

$$\gamma=-1.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

从而原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

13.8 (C) **解** 不用去求解微分方程，而是利用方程所反映出来的函数与各阶导数之间的关系来解题.

由 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 得 $y''(x)$ 连续，且 $y''(0)=-py'(0)-qy(0)+e^0=1$，而

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{2}{y''(0)},$$

故所求极限等于 2，应选(C).

13.9 **解** (1)由一阶线性微分方程的通解公式，得

$$y(x)=e^{\int x\mathrm{d}x}\left(C+\int\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}e^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=e^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{x}+C).$$

因为 $y(1)=\sqrt{e}$，所以 $C=0$. 从而 $y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.

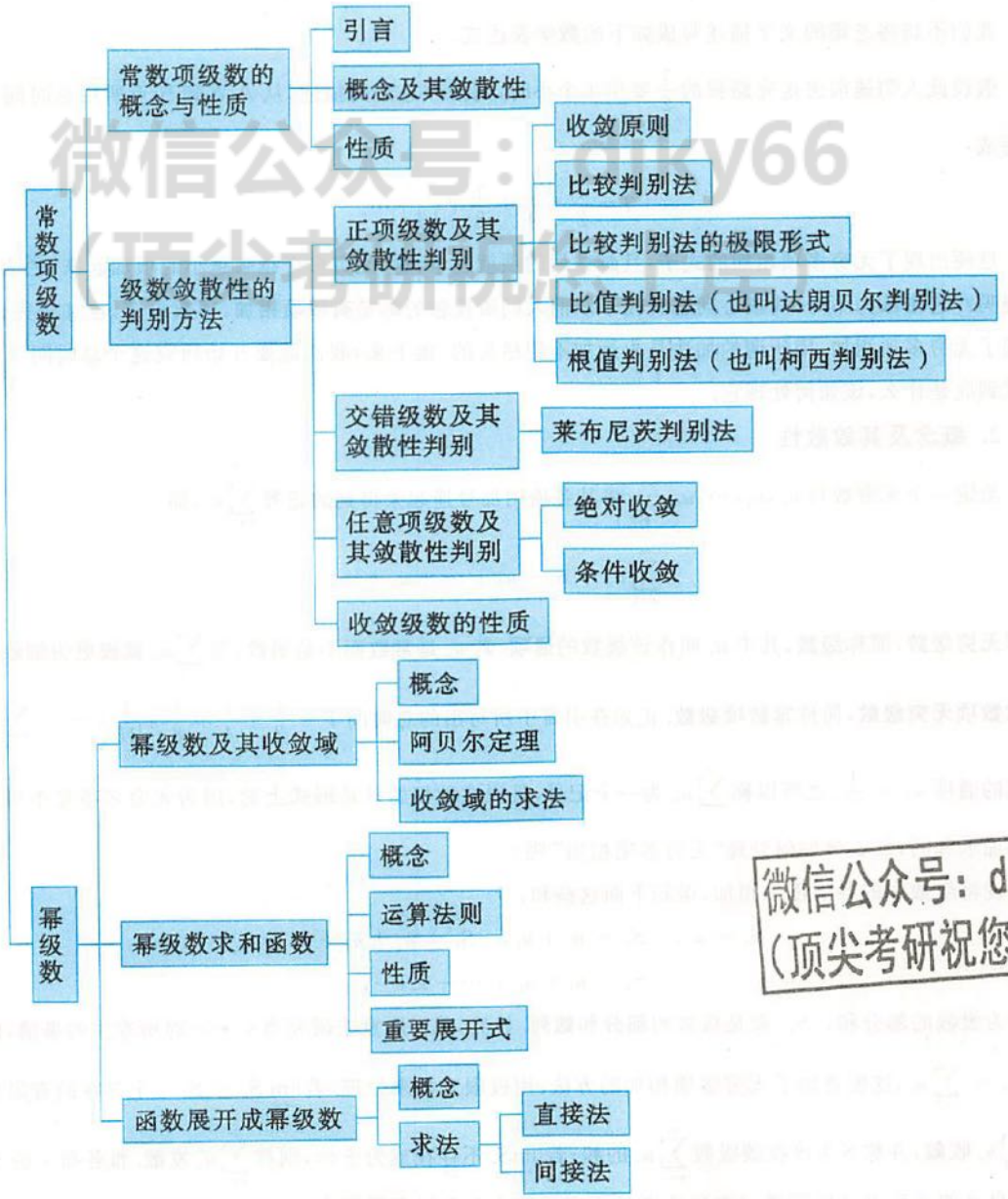
(2) 由(1)可知，D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V=\int_1^2\pi y^2(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\pi xe^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{x^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}(e^4-e).$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第14讲 无穷级数（仅数学一、数学三要求）

基础知识结构



微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

基础内容精讲

一、常数项级数的概念与性质

1. 引言

古希腊数学家芝诺曾经讲了一个有趣的悖论：一个人从 A 点走到 B 点，先走完路程的 $\frac{1}{2}$，然后走完剩下路程的 $\frac{1}{2}$，再走完剩下路程的 $\frac{1}{2}$，……依此类推，一直走下去，永远走不到终点.

我们不妨将芝诺的文字描述写成如下的数学表达式.

假设此人匀速前进走完路程的 $\frac{1}{2}$ 要用半个小时，则按照芝诺的描述，从 A 点到 B 点所用总时间 T 可以写成：

$$T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots.$$

微信公众号：djky66
(更多考研视频下载)

这便出现了无穷多项相加的式子，且越往后的项就越小，这“无穷多个越来越小的项加起来”的表达式合理吗？芝诺认为不对，其核心问题就在于以前人们所接触的都是**有限项相加**，项数再多，也加得完；现在出现了无穷多项相加，用所谓的加法是永远加不到尽头的. 接下来，我们就要开始研究这个总时间 T 的表达式到底是什么，该如何处理它.

2. 概念及其敛散性

给定一个无穷数列 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$，将其各项用加号连起来得到的记号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

叫作**无穷级数**，简称**级数**，其中 u_n 叫作该级数的**通项**. 若 u_n 是常数而不是函数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 就被更为细致地称为**常数项无穷级数**，简称**常数项级数**. 正如在引言中所写出的总时间 $T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，这里的通项 $u_n=\frac{1}{2^n}$. 之所以称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一个记号，是说这种相加只是**形式上**的，因为无穷多项是不可能逐一相加求和的，那么该如何处理“无穷多项相加”呢？

现将级数中的各项逐一相加，得到下面这些和：

$$S_1=u_1,\quad S_2=u_1+u_2,\quad S_3=u_1+u_2+u_3,\cdots,$$
$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\cdots,$$

这称为级数的**部分和**，$\{S_n\}$ 就是级数的**部分和数列**. 显然，我们愿意去研究当 $n\to\infty$ 时所发生的事情，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，这便道出了无穷多项相加的方法：用极限工具来处理. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$（一个存在的有限数），则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**，并称 S 为该收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**和**；若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在或为 $\pm\infty$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **发散**. 雅各布·伯努利曾在自己的文章中这样写道：“末项消逝的无穷级数之和**有时有限而有时无限或不定**”. 这里的“有限”与

“无限或不定”就分别对应着“收敛”与“发散”.

研究一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是收敛还是发散，也可以简单说成研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**敛散性**.

3. 性质

性质1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛，且其和分别为 S,T，则任给常数 a,b，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)$ 也收敛，且其和为 $aS+bT$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)=a\sum_{n=1}^{\infty}u_n+b\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

这个性质称为收敛级数的线性性质.

在讲下一个重要性质前，先给出一个概念.

在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 中**去掉前** m **项**，得

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n=u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+k}+\cdots,$$

这叫作级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的 m **项后余项**.

性质2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则其任意 m 项后余项 $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}u_n$ 也收敛；反之，若存在 m 项后余项 $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

【注】 一个级数去掉或加上任意有限项，不会改变该级数的敛散性. 事实上，也可说成**改变级数任意有限项，不会改变该级数的敛散性.**

性质3 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证明 由于 $u_n=S_n-S_{n-1}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$. 证毕.

证明虽简单，但有几句话要说，此性质是**级数收敛的必要条件**. 其逆否命题：若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必发散. 且即使 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，也不能保证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，见例 14.2.

二、级数敛散性的判别方法

1. 正项级数及其敛散性判别

若通项 $u_n\geqslant0,n=1,2,\cdots$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**正项级数**. 这种级数在形式上的简单性最容易让读者接受，下面就来讲这种级数的各种经典的敛散性判别方法.

(1) 收敛原则.

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

证明 必要性. 由于 $u_n\geqslant0$，故 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\geqslant0$，且 $S_1\leqslant S_2\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant\cdots$，$\{S_n\}$ 天生便是一个单调不减且下界为 0 的数列. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，则 $\{S_n\}$ 必然有上界. 上界、下界都有，则

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

$\{S_n\}$ 有界.

充分性. 若 $\{S_n\}$ 有界，不要忘记 $\{S_n\}$ 天生单调不减，则根据单调有界准则，可得 $\{S_n\}$ 收敛，也即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 证毕.

【注】 读者不难发现，由于 $\{S_n\}$ 天生单调不减，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 只有两种可能的结果：若 $\{S_n\}$ 有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$（有限数）；若 $\{S_n\}$ 无界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$. 除此之外，再无其他结果.

直接使用收敛原则来判别正项级数敛散性的情形并不多见（见习题 14.2），因为正项级数部分和数列有界性的证明往往并不容易. 下面我们将利用收敛原则来给出更为实用的正项级数敛散性判别法.

(2) 比较判别法.

给出两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，如果从某项起有 $u_n\leqslant v_n$ 成立，则

① 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

② 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.

微信公众号：djky66
（张宇考研祝您上岸）

有人通俗地念成：**两个正项级数，若大的收敛，则小的必收敛；若小的发散，则大的必发散**. 对于记忆来讲，这种念法未尝不可.

(3) 比较判别法的极限形式.

作为比较判别法的推论，这个标题下的方法将更为实用. 给出两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，$v_n\neq 0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A.$$

① 若 $A=0$，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

② 若 $A=+\infty$，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散；

③ 若 $0<A<+\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 有相同的敛散性.

(4) 比值判别法（也叫达朗贝尔判别法）.

给出一正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，那么

① 若 $\rho<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

② 若 $\rho>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

【注】 需要指出，若 $\rho=1$，无法用此法判定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性. 比如对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，$u_n=\frac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$；对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$u_n=\frac{1}{n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1$. 你看，前者发散，后者收敛，但都有 $\rho=1$.

(5) 根值判别法(也叫柯西判别法).

给出一正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，那么

① 若 $\rho<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

② 若 $\rho>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

【注】 同样要指出，若 $\rho=1$，根值判别法也会失效. 如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\rho=1$；$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\rho=1$.

2. 交错级数及其敛散性判别

若级数**各项正负相间**出现，称这样的级数为**交错级数**，一般写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots,$$

其中 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$，以使各项的正负号明显地呈现出来，从而表达出各项依次正负相间的独特规律.

显然，交错级数在形式上比正项级数复杂，那么它的敛散性判别是否也同样复杂了呢？莱布尼茨回答了这个问题. 1714 年，在写给约翰·伯努利的信件中，莱布尼茨给出了下面这个定理，后被称为**莱布尼茨判别法**：

给出一交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，$u_n>0$，$n=1,2,\cdots$，若 $\{u_n\}$ **单调不增**且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则该级数收敛.

3. 任意项级数及其敛散性判别

若级数各项可正、可负、亦可为零，称这样的级数为**任意项级数**，写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，这里 u_n 符号不作限制. 对于这种级数敛散性的判别方法，一般认为超出了本科高等数学的教学要求，本书也不予讨论. 在高等数学中，是按下述方式进行研究的.

给任意项级数的每一项加上绝对值，写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$，这样，就使得 $|u_n|\geqslant 0$，成了正项级数，它叫作原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**绝对值级数**.

绝对值级数就自然站到了正项级数的队伍中，前面讲过的五种正项级数的敛散性判别法均可派上用场了. 不过，绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 与原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性有何关系呢？看下面的定义与定理.

定义 1 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**.

定义 2 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**.

定理 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛(即任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛)，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛.

4. 收敛级数的性质

在初等数学中，人们都知道，有限多个数相加，满足结合律及交换律. 对于无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，显然这里所

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

有的项绝非简单的相加. 它所含有的**极限运算过程**导致我们必须相当警觉加法运算律是否还能天然地成立. 如果不能天然地成立,我们还要添加什么前提条件. 下面就来研究这个问题.

性质 1 收敛级数的项任意加括号后所得的新级数仍收敛,且其和不变.

证明 给出一收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,其部分和数列记为 $\{S_n\}$:$S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$(存在). 将此级数的项任意加括号,得新级数

$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots,$$

这个级数的部分和数列记为

$$\{S_{n_k}\}:S_{n_1},S_{n_2},\cdots,S_{n_k},\cdots,k=1,2,\cdots,$$

显然它是 $\{S_n\}$ 的某一个子列,故 $\{S_{n_k}\}$ 亦收敛于 S. 证毕.

根据性质 1,如下两个结论也需注意.

(1) 若加括号后得到的新级数发散,则原级数必然发散(逆否命题).

(2) 若加括号后得到的新级数收敛,不能断言原级数一定收敛. 如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a$,其中常数 $a\neq 0$,若从第一项起,两项两项地加括号,可得 $(a-a)+(a-a)+\cdots=0$ 收敛,但原级数是发散的.

性质 2 若原级数绝对收敛,**不论将其各项如何重新排列**,所得的新级数也绝对收敛,且其和不变. (这个性质就是在说:绝对收敛的级数具有可交换性,此性质是德国数学家狄利克雷给出的.)

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

三、幂级数及其收敛域

1. 概念

(1)函数项级数.

设函数列 $\{u_n(x)\}$ 定义在区间 I 上,称

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

为定义在区间 I 上的**函数项级数**,记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$,当 x 取确定的值 x_0 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 成为常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$.

(2)幂级数.

若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 是 x 的 n 次幂函数,则称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 为**幂级数**,它是一种特殊且常用的函数项级数,其一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots;$$

其标准形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

其中 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 为**幂级数的系数**.

(3)收敛点与发散点.

若给定 $x_0\in I$,有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛,则称点 x_0 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**收敛点**;若给定 $x_0\in I$,有

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 发散，则称点 x_0 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**发散点**.

(4)收敛域.

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的所有收敛点的集合称为它的**收敛域**.

要研究幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，首要任务是判别敛散性，因为只有收敛了才有继续讨论的意义. 具体来说，将某个 x_0 代入级数可得 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$，判别此数项级数是否收敛，我们的目标当然是找到所有收敛点的集合，即收敛域. 但问题来了，有多少个收敛点呢？如果有无穷多个收敛点，难道要一个一个地去验证么？显然，那样做是不可能的. 当人们正为此犯难时，一位年轻人提出了一个重要定理，请看下文.

2. 阿贝尔定理

当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=x_1(x_1\neq 0)$ 处收敛时，对于满足 $|x|<|x_1|$ 的一切 x，幂级数**绝对收敛**；当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=x_2(x_2\neq 0)$ 处发散时，对于满足 $|x|>|x_2|$ 的一切 x，幂级数**发散**.

阿贝尔
(1802－1829)

多么伟大的阿贝尔，多么给力的办法！只是，不得不告诉大家，这样一个天才数学家生于1802年，一生的工作不为世人所重视，穷困潦倒，卒于1829年，仅仅活了27年，太遗憾！

3. 收敛域的求法

①若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 R 的表达式为

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & \rho\neq 0,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$$

②开区间 $(-R,R)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间；单独考查幂级数在 $x=\pm R$ 处的敛散性就可以确定其收敛域为 $(-R,R)$ 或 $[-R,R)$ 或 $(-R,R]$ 或 $[-R,R]$.

【注】 以上讨论的研究对象都是标准幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，对于一般幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，有完全一致的说法，不再赘述.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

四、幂级数求和函数

1. 概念

在收敛域上，记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，并称 $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数.

2. 运算法则

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 $R_b(R_a\neq R_b)$，则有

① $k\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}ka_nx^n$，$|x|<R_a$，$k$ 为常数；

② $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$，$|x|<R=\min\{R_a,R_b\}$.

【注】 在实际运算中，可能出现需要改变通项、下标的问题，现总结求和运算中恒等变形方式如下.

(1)通项、下标一起变.

$$\sum_{n=k}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=k+l}^{\infty}a_{n-l}x^{n-l},$$

其中 l 为整数，可正可负可为 0.

(2)只变下标，不变通项.

$$\sum_{n=k}^{\infty}a_nx^n=a_kx^k+a_{k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{k+l-1}x^{k+l-1}+\sum_{n=k+l}^{\infty}a_nx^n.$$

(3)只变通项，不变下标.

$$\sum_{n=k}^{\infty}a_nx^n=x^l\sum_{n=k}^{\infty}a_nx^{n-l}.$$

举例：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}x^{2n+2}=a_0x^0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^{2n}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^{2n}.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

3. 性质

(1)幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内连续，且如果幂级数在收敛区间的端点 $x=R$(或 $x=-R$)处收敛，则和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R]$(或 $[-R,R)$)上连续.

(2)幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积，且有逐项积分公式

$$\int_0^xS(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\Big)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^xt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\ (x\in I),$$

逐项积分后所得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径，但收敛域可能扩大.

(3)幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，且有逐项求导公式

$$S'(x)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Big)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\ (|x|<R),$$

逐项求导后所得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径，但收敛域可能缩小.

4. 重要展开式

① $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.$

② $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,-1<x<1.$

③ $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,-1<x<1.$

④ $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots,-1<x\leqslant 1.$

⑤ $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.$

⑥ $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

$=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.$

⑦ $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$
$\begin{cases}x\in(-1,1), & \text{当 } \alpha\leqslant -1,\\ x\in(-1,1], & \text{当 } -1<\alpha<0,\\ x\in[-1,1], & \text{当 } \alpha>0,\alpha\notin \mathbf{N}_+,\\ x\in\mathbf{R}, & \text{当 } \alpha\in\mathbf{N}_+.\end{cases}$

这里，①～⑥右端 x 的取值范围是指收敛域，而对于⑦，问题比较复杂，其收敛区间的端点是否收敛与 α 的取值有关，可以证明（这里不证）：

当 $\alpha\leqslant -1$ 时，收敛域为 $(-1,1)$；

当 $-1<\alpha<0$ 时，收敛域为 $(-1,1]$；

当 $\alpha>0,\alpha\notin\mathbf{N}_+$ 时，收敛域为 $[-1,1]$；

当 $\alpha\in\mathbf{N}_+$ 时，收敛域为 $\mathbf{R}$.

比如，当 $\alpha=-1$ 时得到

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,-1<x<1;$$

当 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 时得到

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\times 3}{2\times 4}x^2-\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}x^3+\cdots,-1<x\leqslant 1.$$

五、函数展开成幂级数

1. 概念

如果函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处存在任意阶导数，则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**泰勒级数**，若收敛，则 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

特别地，当 $x_0=0$ 时，则称

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

为函数 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**，若收敛，则 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

它们都被称为函数展开成幂级数.

2. 求法

方法一（直接法）　逐个计算 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ $(n=0,1,\cdots)$，并代入

微信公众号：djky66
（愿考研祝您上岸）

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

但是直接法太麻烦了，我们一般都不用.

方法二(间接法) 利用已知的幂级数展开式，通过变量代换、四则运算、逐项求导、逐项积分和待定系数法等方法得到函数的展开式.

基础例题精解

一、正项级数 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,u_n\geqslant 0\right)$ 的敛散性判别法

例 14.1 判别几何级数(也叫等比级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

的敛散性，其中 $a\neq 0$.

微信公众号：diky66
(顶尖考研祝您上岸)

解 在公比 q 满足 $|q|<1$ 的情形下，初等数学知识告诉我们，部分和

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，这样一来，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}$，这个极限是存在的，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 收敛.

反之，当 $|q|\geqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 是发散的，这是因为：

若 $q>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在；

若 $q=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+a+\cdots+a+\cdots$(无穷个 a 相加)，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 亦不存在；

(读者可轻易看出，当 $q\geqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 为 $\pm\infty$，到底是 $+\infty$ 还是 $-\infty$，由 a 的正负来决定.)

若 $q=-1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+(-a)+a+(-a)+\cdots$，这是一个十分著名且有趣的级数，欧拉、莱布尼茨都在这个级数的敛散性判别上犯了错误，今天的我们当然可以清晰地给出正确答案，你看，部分和 $S_1=a$，$S_2=0$，$S_3=a$，$S_4=0$，…，它们交错着等于 a 和 0，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在(不唯一自然不存在).

若 $q<-1$，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在.

综上所述，当 $|q|\geqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 均不存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 发散. 于是有

$$\text{几何级数}\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}\begin{cases}\text{发散}, & |q|\geqslant 1,\\ \text{收敛，其和为}\dfrac{a}{1-q}, & |q|<1,\end{cases}\quad\text{其中 } a\neq 0.$$

【注】 显然，在引言中提出的芝诺的问题是本题的特例，$T=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，其首项 $a=\dfrac{1}{2}$，公比 $q=\dfrac{1}{2}$，是 $|q|<1$ 的情况，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$. 事实上，此人将恰好用一个小时从 A 走到 B.

例 14.2 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性.

解 显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，但其部分和 $S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$，自然有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$（不存在），则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

例 14.3 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$，这个级数从第二项起，每项都是其左右两个相邻项的调和平均数. 所谓数 c 是数 a 与数 b 的调和平均数是指它们之间满足下面这个式子：

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 叫作**调和级数**.

下面来研究它的敛散性.

易知当 $x>0$ 时，有 $x>\ln(1+x)>0$，所以对于任意正整数 n，显然也有 $\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. 读者可看出我们应该先研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性，然后用比较判别法得出结论.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n},$$

其部分和

$$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]=\ln(n+1),$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散，根据正项级数的比较判别法，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

【注 1】 在 18 世纪初，莱布尼茨与雅各布·伯努利分别独立地证明了“调和级数的和是无限的”这个结论.

【注 2】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 叫作 p **级数**，调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是 p 级数中 $p=1$ 时的特殊情况.

这里不加证明地给出重要结论：

$$p\text{ 级数}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{发散}, & p\leqslant 1,\\ \text{收敛}, & p>1.\end{cases}$$

这个结论十分重要，在以后的多种场合都会派上用场，读者需牢记.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 14.4 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a|^n n!}{n^n}$ 的敛散性，其中 a 为非零常数.

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{|a|^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{|a|}{\mathrm{e}},$$

这里 $\rho=\frac{|a|}{\mathrm{e}}$，显然当 $0<|a|<\mathrm{e}$ 时，原级数收敛；当 $|a|>\mathrm{e}$ 时，原级数发散；当 $|a|=\mathrm{e}$ 时，由于当 $n\to\infty$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调增加且趋向于 e，所以 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1$，$n=1,2,\cdots$，从而知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，由级数收敛的必要条件，知原级数发散.

综上所述，当 $0<|a|<\mathrm{e}$ 时，原级数收敛；当 $|a|\geqslant\mathrm{e}$ 时，原级数发散.

例 14.5 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解 此为正项级数，由通项形式，用根值判别法.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n,$$

此极限为“1^∞”型.

$$\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n=\mathrm{e}^{n\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)},$$

$$\lim_{n\to\infty}n\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right]=-\frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<1,$$

由根值判别法知所给级数收敛.

例 14.6 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n^2}{1+u_n^2}$ 的敛散性，其中 $u_n\neq 0$.

解 由不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，可知 $1+u_n^2\geqslant 2|u_n|$，于是 $\frac{u_n^2}{1+u_n^2}\leqslant\frac{u_n^2}{2|u_n|}=\frac{|u_n|}{2}$，由题设知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|u_n|}{2}$ 收敛，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n^2}{1+u_n^2}$ 是正项级数，根据正项级数的比较判别法知，原级数收敛.

二、莱布尼茨判别法

例 14.7 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$，其中 $u_n=\frac{1}{n}$.

显然有 $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$，即 $u_n>u_{n+1}$，则 $\{u_n\}$ 单调不增，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，由莱布尼茨判别法知，该级数收敛.

【注】 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$ 叫作**交错调和级数**，这是一个经典且常用的例子，请读者知悉.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝你上岸）

例 14.8 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$ 的敛散性，其中 a 为非零常数.

解 由三角公式 $\sin(\alpha+n\pi)=(-1)^n\sin\alpha$，可知

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi+n\pi)=(-1)^n\sin[(\sqrt{n^2+a^2}-n)\pi]=(-1)^n\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n},$$

故原级数是交错级数，当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ 是正的无穷小量，且 $\left\{\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right\}$ 单调减少，所以 $\left\{\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right\}$ 亦单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}=0$，满足莱布尼茨判别法的条件，故原级数收敛.

例 14.9 再次考查级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}$，它是条件收敛还是绝对收敛？

解 由于 $\left|(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 是发散的；而由例 14.7 的答案可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}$ 是收敛的. 故此级数条件收敛.

例 14.10 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(1+n)}{1+n}$ 的敛散性.

解 显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{1+n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x}=0$；

$$u_n=\frac{\ln(1+n)}{1+n}\xrightarrow{\text{连续化为}}f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}\xrightarrow{\text{当}x>\mathrm{e}-1\text{时}}f'(x)=\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}<0,$$

故当 $n\geqslant 2$ 时，有 $u_n\geqslant u_{n+1}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，满足莱布尼茨判别法条件，原级数收敛.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

三、任意项级数的判敛问题

例 14.11 如果数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则以下级数中必收敛的是（　　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

解 应选(D).

分析详见“注”中的“(5)”“(7)”“(10)”“(11)”.

【注】 很多同学在复习数项级数的判敛问题时感觉摸不着头脑，尤其是对于这种抽象的问题，更是害怕. 我想，做题时的“总结不足”可能是一个重要的原因——有些同学说，我已经做了很多题，可是为什么做新的练习题时还是不会呢？答：很可能是你做题的质量不高，为了做题而做题，做完一题扔一题，只追求数量，这肯定不行. 做完一题，就要停下来总结一下这道题你能学到什么技巧，容易错在哪里，有什么值得借鉴的；做完同一知识点下的几道题，就要停下来好好琢磨这几道题之间有没有什么联系，考虑能从哪些角度去解决这类问题. 这种总结做多了，你的做题质量和效率就会越来越高.

下面给大家做一个示范，做了很多题目以后，对于抽象的数项级数的判敛问题，有如下总结.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 是任意项级数（$\sum$ 的上标都是 ∞，而下标并非总是 1）.

(1)设 a,b,c 为**非零**常数，且 $au_n+bv_n+cw_n=0$，则在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 中只要有两个级数是收敛的，另一个必收敛.

(2)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散.

(3)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$ 绝对收敛(提示：$\left|\dfrac{u_n}{n}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\left(u_n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)$).

(4)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 不定(反例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散).

(5)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 不定(反例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散).

(6)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nu_n$ 不定(反例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散).

(7)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$ 不定(反例：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\ln n}$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散).

(8)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}$(偶数项)，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$(奇数项)不定(反例：$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收敛，但是其奇数项和偶数项都发散).

(9)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛(收敛级数任意加括号所得的新级数仍收敛，且和不变).

(10)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 不定(反例：$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+\cdots=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots$ 收敛，但 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\cdots$ 发散).

(11)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})\text{ 收敛},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1}\text{ 收敛},\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})\text{ 收敛},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1}\text{ 收敛}.\end{cases}$

(12)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nu_{n+1}$ 不定(反例：$u_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$u_nu_{n+1}=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=-\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，级数发散).

例 14.12 设有两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则(　　).

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛　　(B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散

(C) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛　　(D) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 发散

解　应选(C).

微信公众号：ejky66
(顶尖考研祝您上岸)

我们都知道，如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 根据极限定义，$\forall\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，必有 $|u_n-0|<\varepsilon$，取 $\varepsilon=1$，则 $|u_n|<1$. 你是否会问，为什么要取 ε 为 1 呢？请你通过下面题目的解答思考一下. 于是，我们可以将一个级数的收敛或者一般项趋向于 0 这样的条件，转化为当 n 充分大时，一般项 $|u_n|<1$，这是一个非常典型的技巧，于是有

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0\Rightarrow$ 存在 $N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，一定有 $|b_n|<1$；

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow$ 存在 $N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，一定有 $|a_n|<1$.

故当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时，有 $0\leqslant a_n^2b_n^2<1\cdot b_n^2=|b_n|\cdot|b_n|<|b_n|\cdot1=|b_n|$，由正项级数的比较判别法易知，当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛，正确答案是(C). 当然，本题举反例也可以排除错误选项，对于选项(A)，取 $a_n=b_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，对于选项(B)和(D)，取 $a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$.

四、幂级数的收敛域

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

我们把它分成两种出题角度，第一种给出的研究对象是具体型的，第二种给出的研究对象是抽象型的，两种类型在考研中均是考查重点.

1. 具体型问题

(1)对于 $\sum u_n(x)$，加绝对值 $\Rightarrow\sum|u_n(x)|$，成为正项级数.

(2)用正项级数的 $\begin{cases}\text{比值}\\ \text{根值}\end{cases}$ 判别法，令 $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}<1,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}<1\end{cases}\Rightarrow x$ 的取值范围，即得收敛区间.

(3)单独讨论收敛区间的两个端点处级数的敛散性.

综合(2)，(3)即可求得幂级数的收敛域为 (a,b) 或 $(a,b]$ 或 $[a,b)$ 或 $[a,b]$.

例 14.13　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域.

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{|x^{n+1}|}{n+1}}{\frac{|x^n|}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{nx}{n+1}\right|=|x|$，所以由比值判别法可知：

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 绝对收敛；当 $|x|>1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 发散.

又因为当 $x=1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散；当 $x=-1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，所以收敛域为 $[-1,1)$.

2. 抽象型问题

有如下几个结论请大家记住.

结论 1 根据阿贝尔定理,已知 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在某点 $x_1(x_1\neq x_0)$ 的敛散性,确定该幂级数的收敛半径可分为以下三种情况.

(1)若在 x_1 处收敛,则收敛半径 $R\geqslant|x_1-x_0|$.

(2)若在 x_1 处发散,则收敛半径 $R\leqslant|x_1-x_0|$.

(3)若在 x_1 处条件收敛,则 $R=|x_1-x_0|$.【重要考点】

结论 2 已知 $\sum a_n(x-x_1)^n$ 的敛散性信息,要求讨论 $\sum b_n(x-x_2)^m$ 的敛散性.

(1) $(x-x_1)^n$ 与 $(x-x_2)^m$ 的转化一般通过初等变形来完成,包括①"平移"收敛区间;②提出或者乘以因式 $(x-x_0)^k$ 等.

(2) a_n 与 b_n 的转化一般通过微积分变形来完成,包括①对级数逐项求导;②对级数逐项积分等.

(3)以下三种情况,级数的收敛半径不变,收敛域要具体问题具体分析.

①对级数提出或者乘以因式 $(x-x_0)^k$,或者作平移等,收敛半径不变.

②对级数逐项求导,收敛半径不变,收敛域可能缩小.

③对级数逐项积分,收敛半径不变,收敛域可能扩大.

这样说可能有些抽象,我们来看下面一个具体的例题,请大家结合这个例题来理解和掌握上述理论.

微信公众号:shkw66
(张宇考研上岸)

例 14.14 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$ 在点 $x=1$ 处条件收敛,则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 在点 $x=2$ 处(　　).

(A)绝对收敛　　(B)条件收敛　　(C)发散　　(D)敛散性不确定

解 应选(A).

根据结论 1 的(3),由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛,则

$$R=|x_1-x_0|=|1-(-1)|=2,$$

且收敛区间为 $(-3,1)$;

根据结论 2 的(1)和(3),将 $(x+1)^n$ 转化为 $(x-1)^n$,也就是把级数的中心点由 -1 转移到 1,即将收敛区间平移到 $(-1,3)$,得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$,收敛半径不变;

根据结论 2 的(1),(2)和(3),对 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 逐项求导,得 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$,再逐项乘以 $(x-1)$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$,收敛半径不变.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛区间为 $(-1,3)$,$x=2$ 在收敛区间内部,在该点处级数绝对收敛,答案选择(A).

五、求和函数

例 14.15 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和函数.

解 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，逐项求导，得 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，$|x|<1$，然后两边积分，得 $S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln(1-x)$，又因 $S(0)=0$，当 $x=-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，故和函数

$$S(x)=-\ln(1-x)+S(0)=-\ln(1-x),x\in[-1,1).$$

例 14.16 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=xS(x)$.

对 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 两边积分，得 $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$，$|x|<1$.

再两边求导，得 $\left[\int_0^x S(t)\mathrm{d}t\right]'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=xS(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$，$|x|<1$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

【注】 (1)幂级数求和函数的突破口：

①当 $(an+b)^c$ 在分母上时，先导后积，见例 14.15.

②当 $(an+b)^c$ 在分子上时，先积后导，见例 14.16.

(2)对于先导后积的处理办法：

这里有个细致的问题需要大家做扎实、做准确，请问 $\int S'(x)\mathrm{d}x$ 是否等于 $S(x)$ 呢？

事实上，由于 $\int_a^x S'(t)\mathrm{d}t=S(t)\Big|_a^x=S(x)-S(a)$，故 $S(x)=\int_a^x S'(t)\mathrm{d}t+S(a)$；

又由于当 a 为中心点时，$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\xlongequal{x=0}a_0,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\xlongequal{x=x_0}a_0\end{cases}$ 都收敛，故下限通常取中心点.

(3)始终不要忘记在解题过程中标注收敛域.

(4)建议大家记住由这两个例题所得到的结果：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),-1\leqslant x<1;\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},-1<x<1,$$

利用这两个公式可直接得到如下常数项级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=\ln 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 14.17 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解 先求收敛域.

记 $u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}x^2=x^2$，故

当 $|x|<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛；

当 $|x|>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 发散；

当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(\pm1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，根据莱布尼茨判别法知此级数收敛.

所以，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

再求和函数.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}(-1\leqslant x\leqslant1)$，由于 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\dfrac{1}{1+x^2}$，且 $S(0)=0$，所以 $S(x)=\int_0^x\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}+S(0)=\arctan x$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS(x)=x\arctan x(-1\leqslant x\leqslant1).$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

六、函数展开成幂级数

例 14.18 将 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数，写出成立范围，并求 $f^{(n)}(3)$，$n=1,2,\cdots$.

解 拆项：

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}\\&=\frac{1}{2+(x-3)}+\frac{1}{5+(x-3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{2}}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{5}}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{2}\right)^n+\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{5}\right)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{5^{n+1}}\right)(x-3)^n,1<x<5,\end{aligned}$$

从而

$$f^{(n)}(3)=(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{5^{n+1}}\right)\cdot n!,n=1,2,\cdots.$$

【注】 因为要求展开成 $(x-3)$ 的幂级数，所以先要写成 $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{2+(x-3)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-3}{2}}$，然后才能去套公式.

例 14.19 求函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开.

解 因为 $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$，且

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots,\ |x|<1,$$

所以

$$f(x)=\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x(1-t^2+t^4-t^6+\cdots)\mathrm{d}t$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|\leqslant 1.$$

【注】 取 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 代入上式，得到一个 π 的级数展开，即

$$\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{(\sqrt{3})^3}{3^3\cdot 3}+\frac{(\sqrt{3})^5}{3^5\cdot 5}-\cdots=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\cdots\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)3^n};$$

取 $x=1$，则有 $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$.

这是求 π 的两个计算公式.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

基础习题精练

习题

14.1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

14.2 判别级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 的敛散性.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

14.3 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，证明：

(1)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛；

(2)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛，且 u_n 单调减少，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(3)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛；

(4)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$ 收敛.

14.4 判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$ 的敛散性.

14.5 判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性.

14.6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

14.7 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}(x-1)^n$ 的收敛半径和收敛域.

14.8 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

14.9 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$，且满足 $\begin{cases}f''(x)-f'(x)-2f(x)=0,\\ f(0)=0,f'(0)=1.\end{cases}$ 求：(1) $f(x)$；(2) a_n.

14.10 将幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-2}}x^{2n-1}$ 的和函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解答

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

14.1 **解** 记 $u_n=\dfrac{2^n}{n!}>0$，则所求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$ 可视为正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般项的极限. 如果该级数收敛，则由级数收敛的必要条件就可求其极限. 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1,$$

由正项级数的比值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$ 收敛，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

【注】 该题与习题 14.6 是关于级数理论的极限问题.

14.2 **解** 首先，我们要确认一般项 $u_n=\dfrac{1}{n!}>0$，也就是要确认所研究的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 为正项级数. 接下来可去掉级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 的第一项，也就是当 $n=0$ 时的那一项，即 $\dfrac{1}{0!}=1$，由常数项级数的性质 2，这不会改变该级数的敛散性，于是我们来研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 的敛散性. 其部分和 S_n 满足

$$\begin{aligned}0<S_n&=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&\leqslant 1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\&=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2,\end{aligned}$$

即 $\{S_n\}$ 有界，由收敛原则，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 收敛，也即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 收敛.

【注】 这个级数的和是著名的欧拉数 e. 可在 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 中，令 $x=1$，则有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=e$.

14.3 证明 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且有 $\sqrt{u_nu_{n+1}}\leqslant\frac{1}{2}(u_n+u_{n+1})\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛.

(2) u_n 单调减少 $\Rightarrow u_{n+1}\leqslant u_n\Rightarrow u_{n+1}^2\leqslant u_nu_{n+1}\Rightarrow u_{n+1}\leqslant\sqrt{u_nu_{n+1}}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 收敛，且 $u_nv_n\leqslant\frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2)\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，且 $\frac{u_n}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(u_n^2+\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 收敛.

14.4 分析 这是交错级数，但不易判别$\{|u_n|\}$的单调性，因此不能使用莱布尼茨判别法. 为了能掌握一般项 $u_n=\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$ 的级别，需使用泰勒公式.

解 由泰勒公式，$\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$，

由比较判别法，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n}-o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$，而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 是(条件)收敛的，故原级数发散.

14.5 解 事实上，其一般项为

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}-1}{n-1}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}-\frac{1}{n-1},$$

易知$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}=0$，满足莱布尼茨判别法的条件，因此交错级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}$ 是收敛的，而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，故原级数发散.

14.6 解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2^i}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})$，用先积分后求导的方法，则

$$S(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}\mathrm{d}t\right)'=\left[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right]'=\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}\right)'=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},$$

故原极限 $=S(1)=3$.

14.7 解 用比值判别法，因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n(x-1)^n}{3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}|x-1|=\frac{1}{3}|x-1|,$$

所以，当$\frac{1}{3}|x-1|<1$，即$|x-1|<3$时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}(x-1)^n$ 绝对收敛；当$\frac{1}{3}|x-1|>1$，即$|x-1|>3$时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}(x-1)^n$ 发散.

根据收敛半径的定义可知收敛半径 $R=3$，收敛区间为$(-2,4)$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

又因为当 $x=4$ 时，幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$，发散；当 $x=-2$ 时，幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$，发散，所以收敛域为 $(-2,4)$.

14.8 解 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

设 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\right)''=\dfrac{2}{(1-x)^3}$，$|x|<1$，则

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n=\frac{2x^2}{(1-x)^3},\quad \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{4}{27},$$

所以 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}.$$

14.9 解 (1)特征方程为 $r^2-r-2=0$，得 $r_1=-1$，$r_2=2$，故通解为

$$f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}.$$

由 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\-C_1+2C_2=1,\end{cases}$$

故 $C_1=-\dfrac{1}{3}$，$C_2=\dfrac{1}{3}$，所以 $$f(x)=-\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}.$$

(2) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=-\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)(-1)^n+\frac{2^n}{3}\right]\frac{x^n}{n!},$$

故 $a_n=\dfrac{1}{3}[(-1)^{n+1}+2^n]$.

14.10 解 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-2}}x^{2n-1}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n-1}$

$$=2\sin\frac{x}{2},\ -\infty<x<+\infty,$$

利用三角函数公式展开，得

$$S(x)=2\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{1+x-1}{2}=2\left(\sin\frac{1}{2}\cos\frac{x-1}{2}+\cos\frac{1}{2}\sin\frac{x-1}{2}\right)$$

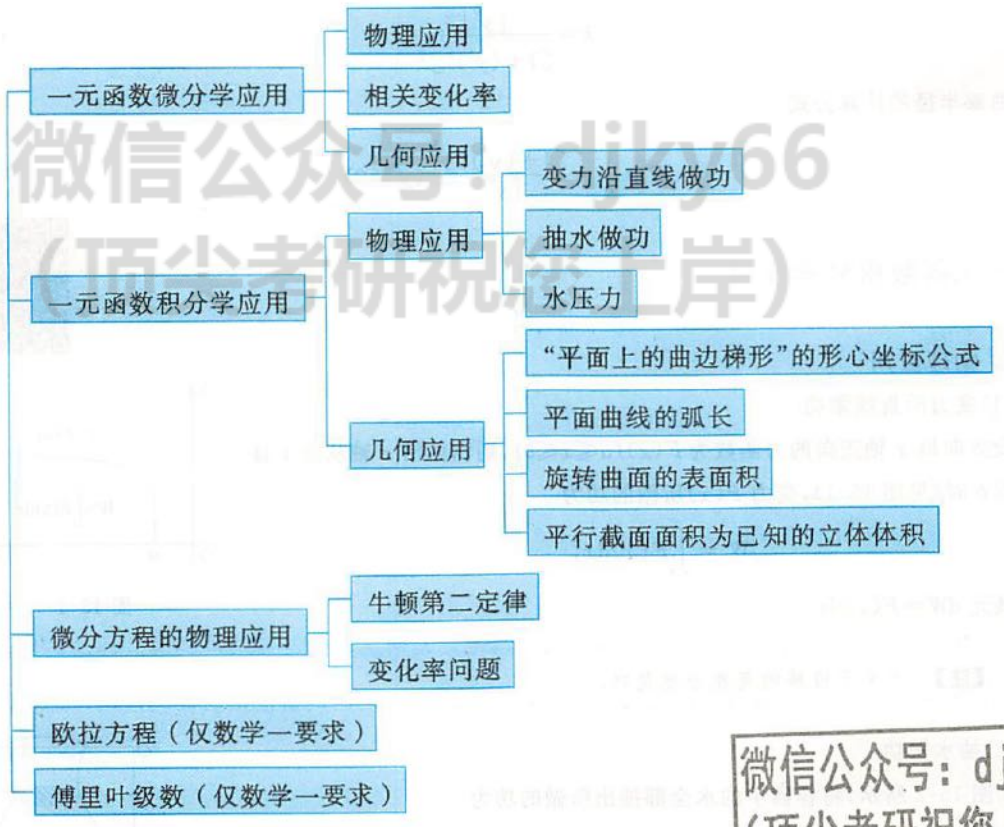
$$=2\sin\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}+2\cos\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n+1},\ -\infty<x<+\infty.$$

【注】 本题用幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-2}}x^{2n-1}$ 来包装函数 $2\sin\dfrac{x}{2}$，这种包装要能识别出来.

微信公众号：djky66
(顶尖考研视频上岸)

第15讲 数学一、数学二专题内容

基础知识结构



微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

基础内容精讲

一、一元函数微分学应用

1. 物理应用

已知质点运动的位移 s 关于时间 t 的函数为 $s=s(t)$，称它为质点的运动方程（位移方程），则其速度为

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t), \tag{15-1}$$

其加速度为

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=v'(t)=s''(t). \tag{15-2}$$

这就是导数的物理意义.

2. 相关变化率

若函数 $y=f(x)$，$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ 均可导，则 $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}=f'(x)\dfrac{dx}{dt}$，上式中，$\dfrac{dy}{dt}$ 与 $\dfrac{dx}{dt}$ 由 $f'(x)$ 联系在一起，称这种相互关联的变化率为**相关变化率**.

3. 几何应用

设 $y(x)$ 二阶可导，则曲线 $y=y(x)$ 在其上点 $(x,y(x))$ 处的**曲率公式**为

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{15-3}$$

曲率半径的计算公式

$$R=\frac{1}{k}=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\ (y''\neq 0). \tag{15-4}$$

微信公众号：hjky66
(顶尖考研祝您上岸)

二、一元函数积分学应用

1. 物理应用

(1)变力沿直线做功.

设方向沿 x 轴正向的力函数为 $F(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则物体沿 x 轴从点 a 移动到点 b 时(见图 15-1)，变力 $F(x)$ 所做的功为

$$W=\int_a^b F(x)\,dx,$$

功的微元 $dW=F(x)dx$.

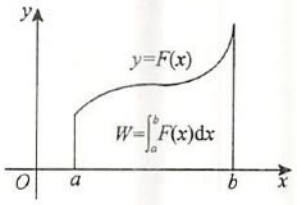


图 15-1

【注】 力关于位移的定积分就是功.

(2)抽水做功.

如图 15-2 所示，将容器中的水全部抽出所做的功为

$$W=\rho g\int_a^b xA(x)\,dx,$$

其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度.

功的微元 $dW=\rho g x A(x)dx$ 为位于 x 处厚度为 dx，水平截面面积为 $A(x)$ 的一层水被抽出(路程为 x)所做的功.

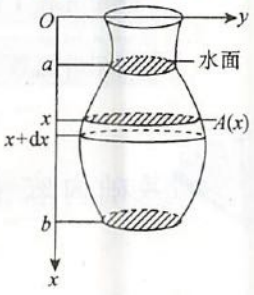


图 15-2

【注】 抽水做功的特点：力(重力)不变，路程在变. 求解这类问题的关键是确定 x 处的水平截面面积 $A(x)$，其余的量都是固定的.

(3)水压力.

垂直浸没在水中的平板 $ABCD$(见图 15-3)的一侧受到的水压力为

$$P=\rho g\int_a^b x[f(x)-h(x)]\mathrm{d}x,$$

其中 ρ 为水的密度,g 为重力加速度.

压力微元 $\mathrm{d}P=\rho g x[f(x)-h(x)]\mathrm{d}x$,即图中矩形条所受到的压力.$x$ 表示水深,$f(x)-h(x)$ 是矩形条的宽度,$\mathrm{d}x$ 是矩形条的高度.

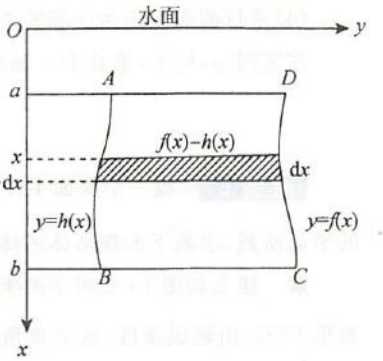


图 15-3

【注】 水压力问题的特点:压强随水的深度的改变而改变.求解这类问题的关键是确定水深 x 处的平板的宽度 $f(x)-h(x)$.

微信公众号:djky66
(顶尖考研陪你上岸)

2. 几何应用

(1)"平面上的曲边梯形"的形心坐标公式.

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant f(x),a\leqslant x\leqslant b\}$,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,如图 15-4 所示.现推导 D 的形心坐标 $\bar{x},\bar{y}$ 的计算公式.

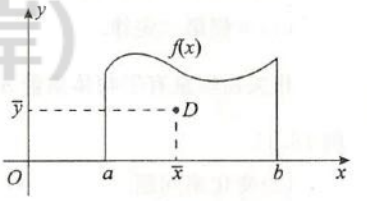


图 15-4

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_a^b \mathrm{d}x\int_0^{f(x)} x\,\mathrm{d}y}{\int_a^b \mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}=\frac{\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x};$$

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_a^b \mathrm{d}x\int_0^{f(x)} y\,\mathrm{d}y}{\int_a^b \mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

【注】 在考研题中出现过此类考题,见例 15.6.

(2)平面曲线的弧长.

①若平面光滑曲线由直角坐标方程 $y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出,则 $s=\int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x$.

②若平面光滑曲线由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出,则 $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$.

③若平面光滑曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出,则 $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$.

(3)旋转曲面的表面积.

①曲线 $y=y(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的曲线弧段绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的表面积

$$S=2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

②曲线 $x=x(t),y=y(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta,x'(t)\neq 0)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的曲线弧段绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的表面积

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

(4)平行截面面积为已知的立体体积.

在区间$[a,b]$上,垂直于x轴的平面截立体Ω所得到的截面面积为x的连续函数$A(x)$,则Ω的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

注例 1 设一个底面半径为 3 的圆柱体,被一个与圆柱的底面相交、夹角为$\frac{\pi}{4}$且过底面直径AB的平面所截,求截下的楔形体的体积.

解 建立如图 15-5 所示的坐标系,垂直于x轴的截面是直角三角形EFG,由题设条件,这个直角三角形的底边EG长为$\sqrt{3^2-x^2}$,对边FG长为$\sqrt{3^2-x^2}\tan\frac{\pi}{4}=\sqrt{3^2-x^2}$.

故截面面积$S=\frac{1}{2}(3^2-x^2)$,则$V=\int_{-3}^{3}\frac{1}{2}(3^2-x^2)\mathrm{d}x=18$.

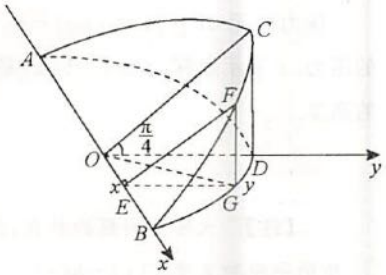


图 15-5

三、微分方程的物理应用

主要涉及以下两个方面的问题.

(1)牛顿第二定律.

相关物理量有①物体质量m;②力f(包括重力、阻力、浮力);③加速度$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. 见例 15.11.

(2)变化率问题.

提法多为"t时刻某量y对t的变化率与t时刻某量成正比",如

①考题 1(事实上此题叫冷却定律).

"t时刻物体温度$T(t)$对时间的变化率与t时刻物体和介质的温差$T-T_0$成正比$(T>T_0)$",应写成$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-T_0)$,负号代表$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}<0$(温度随着时间的增加而降低). 见例 15.12.

②考题 2.

设总人数为N,"t时刻已掌握新技术的人数x的变化率和已掌握新技术与未掌握新技术的人数之积成正比",应写成$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=+kx(N-x)$,正号代表$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>0$(人数随着时间增加而增多). 见习题 15.3.

四、欧拉方程(仅数学一要求)

形如$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+px\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+qy=f(x)$的方程称为**欧拉方程**,其中$p$与$q$为常数,$f(x)$为已知连续函数. 它有固定的解法.

(1)当$x>0$时,令$x=\mathrm{e}^t$,则$t=\ln x$,$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$,于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},$$

方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(p-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+qy=f(\mathrm{e}^t),$$

微信公众号: djky66
(顶尖考研祝您上岸)

即可求解(别忘了用 $t=\ln x$ 回代成 x 的函数).

(2)当 $x<0$ 时,令 $x=-e^t$,同理可得.

五、傅里叶级数(仅数学一要求)

1. 引言

在中学数学中我们就认识了**周期函数**:设常数 $T>0$,若对于定义域内的任意 x,$x+T$,$\varphi(x+T)=\varphi(x)$均成立,则称 $\varphi(x)$是以 T 为周期的周期函数.这个概念的提出是为了什么呢?事实上,人们在生活中确实常常见到**周期现象**,即每经过一段时间 T(称为周期),事物又重新呈现其原先状态的现象.如汽车发动机中的活塞运动、交流电的电流和电压等,都是科学技术中常见的周期现象,每位读者都可根据自己的专业背景与生活感受提出不同的周期现象.在周期现象中的各种数量,不论 x 是从什么时刻开始,经历时间 T 后又重新回到其原先的取值,可用 $\varphi(x+T)=\varphi(x)$来表示,这就是周期函数的实际意义.读者若将此处的 x 当作时间 t,甚至直接写成 t,那是更好的.

傅里叶
(1768—1830)

除去常数函数这种特殊的略显无趣的周期函数,最简单的周期函数是**正弦型函数**:$A\sin(wt+\varphi)$,其中 w 叫角频率,A 叫振幅,φ 叫初相角,且 $w=\dfrac{2\pi}{T}$.我们给出这种函数的如下序列:

$$A_0,\quad A_1\sin(wt+\varphi_1),\quad A_2\sin(2wt+\varphi_2),\quad \cdots,\quad A_n\sin(nwt+\varphi_n),\quad \cdots,$$

一个著名的问题出现了:给出一个周期为 T 的函数 $\varphi(t)$,它是否可由上面的序列的和表示出来?即

$$\varphi(t)\overset{?}{=\!=}A_0+A_1\sin(wt+\varphi_1)+A_2\sin(2wt+\varphi_2)+\cdots+A_n\sin(nwt+\varphi_n)+\cdots$$

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nwt+\varphi_n).$$

一批杰出的数学家(你至少应该记住傅里叶、欧拉、达朗贝尔和狄利克雷这几个名字,我说的是"至少应该")为此做了一项艰辛且极具价值的工作,他们最终得出的结论是在极为广泛的条件(这条件要留在后面详细讲出来)下,答案是肯定的——**周期函数可由一个序列的正弦型函数叠加得到——从几何上讲,周期函数的图像可由一个序列的正弦型曲线合成**,这是一个多么美妙的结论.后面我们就称 $A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nwt+\varphi_n)$ 为**三角级数**.

1744 年,欧拉写信给他的好朋友哥德巴赫,信中提到了一些重要信息,下面我将尽量用容易被你所理解的语言来描述这些重要信息.

设 $\varphi(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数,且其在 $-\pi<x<\pi$ 上的函数表达式为 $\varphi(x)=x$,在 $x=\pm\pi$ 时,$\varphi(x)=0$.现在你可与我一同画出其图像(见图 15-6).

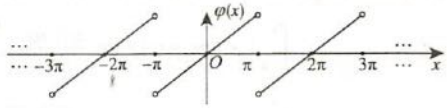


图 15-6

这样的一个周期函数是否像前面所言,可由一个序列的正弦型函数叠加得到呢?答案是肯定且精彩的.

事实上,

$$2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

的图像竟然和图 15-6 中 $\varphi(x)$ 的图像重合了!

如图 15-7 所示,n 仅仅取到 5 时,也就是 $\varphi_5(x)=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 5x}{5}\right)$ 的图像:

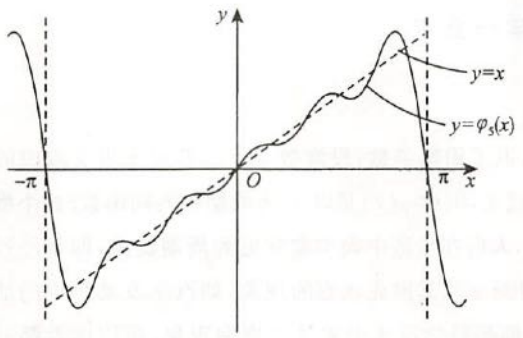


图 15-7

你看这 $\varphi_5(x)$ 的图像在 $(-\pi,\pi)$ 内不是已经有了"趋向"于直线 $y=x$ 的势头了吗?

看来,此问题的研究是相当有价值的.接下来,我们就让欧拉和傅里叶这两位大师一起登场.

2. 欧拉-傅里叶方法与傅里叶级数的产生

如前面所述,若能写出 $\varphi(t)=A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$(仍然需要再强调一下,可以写出这种式子的条件在后面会讲到,读者先假设可以这样写,这样,思路就不会混乱),用三角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

对此式进行处理,得

$$\varphi(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin n\omega t\cos\varphi_n+A_n\cos n\omega t\sin\varphi_n),$$

记 $A_n\sin\varphi_n=a_n$,$A_n\cos\varphi_n=b_n$,则 $\varphi(t)=A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$.

若再记 $x=\omega t=\frac{2\pi t}{T}$,则有 $\varphi(t)=\varphi\left(\frac{x}{\omega}\right)\xrightarrow{\text{记}}f(x)$,且

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).\tag{15-5}$$

显然这个函数的周期为 2π.下面的问题是,系数 A_0,a_n,b_n 是多少?欧拉和傅里叶给出了求这些系数的方法,称为**欧拉-傅里叶方法**.

为了更好地讲清楚欧拉-傅里叶方法,首先需要给读者温习一段基础知识,叫三角函数族的正交性.称 $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$ 为**三角函数族**.显然有

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\sin mx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x]\mathrm{d}x=0,m\neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x-\cos(m+n)x]\mathrm{d}x=0,m\neq n.$$

我们发现，这个函数族中任意两个不同函数的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分值为0. 这性质被称为三角函数族在$[-\pi,\pi]$上的**正交性**.

顺便，还有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx=\pi,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=\pi.$$

好了，有了上面这些准备知识，我们可以着手来求A_0,a_n,b_n了.

假设(15-5)式成立，即$f(x)=A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，将此式在$[-\pi,\pi]$上逐项积分，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\pi A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right),$$

由三角函数族的正交性，$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0$，从而有

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx. \tag{15-6}$$

再将(15-5)式两边同时乘以$\cos mx$，在$[-\pi,\pi]$上逐项积分，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=A_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\right),$$

由三角函数族的正交性，$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx=0$，$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=0$(其中$m\neq n$)，$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=0$，

但当$m=n$时，有 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx=\pi$，

故$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx=a_m\cdot\pi$，于是$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx$，即

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx. \tag{15-7}$$

同理，将(15-5)式两边同时乘以$\sin mx$，在$[-\pi,\pi]$上逐项积分，便可得出

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx. \tag{15-8}$$

现在把(15-6)，(15-7)，(15-8)式放在一起来看.

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

你会发现，若在(15-7)式中取$n=0$，则$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2A_0$，今后为了写法上的统一，我们干脆记$A_0=\frac{a_0}{2}$，于是便有$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,n=1,2,\cdots,$$

这里的a_n,b_n称为函数$f(x)$的**傅里叶系数**，以傅里叶系数构成的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

称为 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上的**傅里叶级数**.

至此,我给你交代了两件事情.第一,周期函数可由一个序列的正弦型函数叠加得到;第二,如何求出这样一个序列的正弦型函数(事实上,只要确定了傅里叶系数 a_n,b_n,这个序列自然就唯一确定下来了).可是**这两件事情的成立是要有"前提"的**.这前提到底是什么?下面来告诉你.

3. 傅里叶级数的收敛性 —— 狄利克雷收敛定理

在历史事实中,关于这个"前提",傅里叶本人虽在多个场合表达过他的观点,可始终未给出明确的定论,这个工作最终由他的学生、著名的抽象派数学大师 —— 狄利克雷在1829年完成,被称为**狄利克雷收敛定理**.

设以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上连续或只有有限个第一类间断点,且至多只有有限个(真正的)极值点,则 $f(x)$ 的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在$[-\pi,\pi]$上处处收敛,记其和函数为 $S(x)$,则

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

且
$$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{ 为连续点},\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{ 为间断点},\\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x=\pm\pi,\end{cases}$$

注意,$f(x_0+0),f(x_0-0)$ 分别表示$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x),\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$.

这个定理(也就是前提)的证明超出了高等数学的要求,我们就不证了.不过这里有两句重要的话需要说明.

第一,你还记得一个函数能在某点展开为收敛于本身的泰勒级数需要什么条件吗?是的,比较苛刻.此函数要在该点**无穷阶可导**且在 x 趋于该点时,其**泰勒余项要趋向于** 0.而这里,一个函数要展开为收敛于本身的傅里叶级数,条件很"轻松"地就能满足 —— 狄利克雷说的"$f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上连续或只有有限个第一类间断点,且至多只有有限个(真正的)极值点",这个条件把极为广泛的函数都囊括在内了 —— 你可以随手画出一个"违背"狄利克雷条件的函数的图像吗?那很困难.正因如此,将一个函数展开成傅里叶级数,在各个领域都有着极为广泛的应用.

第二,这个定理明确指出,只有当 x 为连续点时,才可理直气壮地写 $S(x)=f(x)$,其他情形下并不能使这个等式成立,故今后你要注意下面这个科学的写法:

$$f(x)\sim S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中"~"读作"展开为".记住,$f(x)$ 与 $S(x)$ 并非处处相等,注例2后面的"注意"中会让你更清楚地看到这一点.

注例 2 设 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$ 在$[-\pi,\pi]$上将其展开为傅里叶级数.

解 显然题中所给 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上是满足狄利克雷收敛定理的条件的.下面需求出傅里叶系数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\mathrm{d}x=1,$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研陪你上岸)

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx=0,n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi+\frac{1}{n\pi}=[(-1)^{n+1}+1]\cdot\frac{1}{n\pi},$$

其中 $\cos n\pi=(-1)^n,n=1,2,\cdots$，于是当 n 为偶数时，$(-1)^{n+1}+1=0$，即

$$b_2=b_4=b_6=\cdots=0.$$

故
$$f(x)\sim S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

注意 第一，读者与我一起再仔细研究一下这个结果. 根据狄利克雷收敛定理，可知

$$S(x)=\begin{cases}f(x), & -\pi<x<0,0<x<\pi,\\ \dfrac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\dfrac{1}{2}, & x=0,\\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\dfrac{1}{2}, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

下面分别画出 $S(x)$，$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的图像(见图 15-8)，供读者直观对比一下.

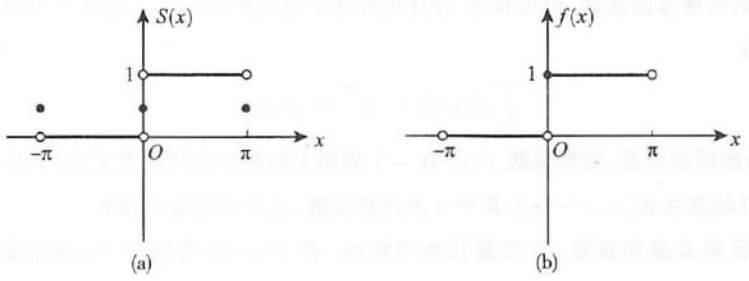


图 15-8

显然，在 $-\pi<x<0$ 与 $0<x<\pi$ 这样的区间上，有 $S(x)=f(x)$；但在 $x=-\pi,0,\pi$ 这三个点处，$S(x)\neq f(x)$.

第二，由于 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是以 2π 为周期的，故这样的展开结果不仅在 $[-\pi,\pi]$ 上正确，**在整个数轴上也是确定无疑的**. 所以，虽然题目要求的区间仅限于 $[-\pi,\pi]$，但这结果可直接推广至整个实数轴上. 稍作修改，就可写出下例：设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且其在 $(-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

请将 $f(x)$ 在实数轴上展开为傅里叶级数.

其实，我们的展开工作仍然是在 $[-\pi,\pi]$ 上进行，与注例 2 无异，只需在写出结果后“顺便”延拓至整个数轴即可. 写成

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)=\begin{cases}f(x), & x\neq m\pi,\\ \dfrac{1}{2}, & x=m\pi,\end{cases}$$

其中 m 为任意整数，分别画出 $f(x)$ 与 $S(x)$ 的图像(见图 15-9)，供读者对比.

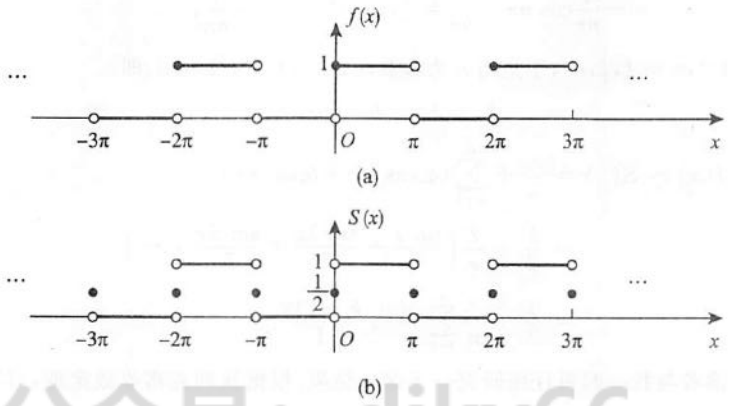


图 15-9

微信公众号：djky66
(顶尖考研视频上岸)

4. 推广至任意区间上的傅里叶展开式

上面我们的讨论仅限于$[-\pi,\pi]$这个区间，区间端点定了，区间长度也定了，这未免有些死板，导致使用有一定的局限性——区间端点不是$-\pi,\pi$时，区间长度不是2π时，还能讨论傅里叶展开式吗?回答是肯定的.

第一个问题，**区间端点的移动**，相当容易. 你还记得这个定理么?设 $f(x)$ 是以 T 为周期的可积函数，则对于任意实数 a，有

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x.$$

这定理用通俗的话讲就是，周期函数 $f(x)$ 在一个周期上的积分值与起点无关. 于是，当 $f(x)$ 以 2π 为周期时，$[-\pi,\pi]$ 可随意换成$[a,a+2\pi]$，其中 a 为任意实数，这个问题迎刃而解.

第二个问题，**区间长度的改变**，作变量代换可解决. 若 $f(x)$ 的周期是 $2l$，而不是 2π，即研究区间$[-l,l]$，则可令 $t=\frac{\pi}{l}x$，当$-l\leqslant x\leqslant l$时，有$-\pi\leqslant t\leqslant\pi$. 记 $f(x)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=g(t)$，$-\pi\leqslant t\leqslant\pi$. 于是有

$$g(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\,\mathrm{d}t,n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\,\mathrm{d}t,n=1,2,\cdots.$$

将变量 t 换回到 x，有

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\xrightarrow{t=\frac{\pi}{l}x}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\,dt\xrightarrow{t=\frac{\pi}{l}x}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,n=1,2,\cdots.$$

这里，对定义在$[-l,l]$上的函数，狄利克雷收敛定理同样成立. 读者只需回到前面，把“π”改成“l”，并注意自变量的改变即可. 如下所述.

设以$2l$为周期的函数$f(x)$在$[-l,l]$上连续或只有有限个第一类间断点，且至多只有有限个(真正的)极值点，则$f(x)$的傅里叶级数处处收敛，记其和函数为$S(x)$，有

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

且

$$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{为连续点},\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{为间断点},\\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & x=\pm l.\end{cases}$$

5. 正弦级数与余弦级数

若$f(x)$是$[-l,l]$上可积的奇函数，则$\int_{-l}^{l}f(x)dx=0$；若$f(x)$是$[-l,l]$上可积的偶函数，则

$$\int_{-l}^{l}f(x)dx=2\int_{0}^{l}f(x)dx.$$

如此一来，便可得到下面两种特殊情形下的傅里叶展开式.

先看$f(x)$是$[-l,l]$上的奇函数的情形. 有

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=0,n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,n=1,2,\cdots.$$

于是，$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$. 由于展开式中只含正弦函数，故称其为**正弦级数**.

再来看$f(x)$是$[-l,l]$上的偶函数的情形. 有

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx,n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=0,n=1,2,\cdots.$$

于是，$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$. 同样地，展开式中只含余弦函数，故称其为**余弦级数**.

我们知道，任何一个定义在$[-l,l]$上的函数均可表示为一个奇函数与一个偶函数之和：

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2},$$

其中$f_1(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$为奇函数，$f_2(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$为偶函数. 自然可以联系到上面刚刚讲过的知识而得出这样的结论：$f(x)$的傅里叶级数是由$f_1(x)$展开的正弦级数和由$f_2(x)$展开的余弦级数的叠加.

这一部分的最后，再谈一个要紧的问题：若$f(x)$只在$[0,l]$上给出，要将其展开为以$2l$为周期的傅里叶级数，该怎么办？

读者只需再翻回狄利克雷收敛定理，看看便知，我们在$[-l,0]$这个区间上补充$f(x)$的定义使其满足

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

狄利克雷收敛定理的条件，即可将补充定义后的 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上展开成傅里叶级数了，我们将这种补充定义的手段叫作**延拓**. 显然，在 $[-l,0]$ 上给出不同的延拓形式，就会展开成不同的傅里叶级数. 为方便起见，我们常做以下两种延拓.

(1) **奇延拓**，也就是令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x\leqslant l,\\ -f(-x), & -l\leqslant x<0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

这个 $F(x)$ 是延拓之后的奇函数. 如图15-10 所示.

这里应特别注意 $x=0$ 的情形. 若原先 $f(0)\neq 0$，只能修改此处定义，强行令 $F(0)=0$，以保证 $F(x)$ 为 $[-l,l]$ 上的奇函数.

(2) **偶延拓**，也就是令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ f(-x), & -l\leqslant x<0. \end{cases}$$

这个 $F(x)$ 是延拓后的偶函数. 如图 15-11 所示.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

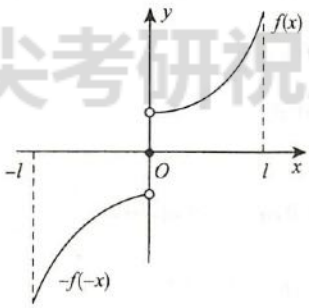


图 15-10

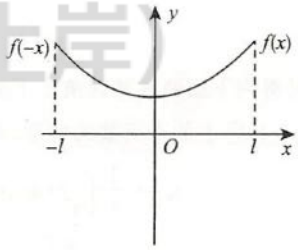


图 15-11

两种延拓后的奇、偶函数便可用前面所讲的方法分别展开成正弦、余弦级数了.

至此，基本理论全部讲完了. 下面通过一个例题来欣赏引言中所提到的欧拉写给哥德巴赫的信中的精彩内容.

注例 3 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内展开成傅里叶级数.

解 此函数显然满足狄利克雷收敛定理的条件. 轻车熟路，我们来求傅里叶系数.

$$a_0\overset{(*)}{=\!=}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\,\mathrm{d}x=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n},$$

其中 $n=1,2,\cdots$.

则 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},0<x<2\pi.$$

【注1】 (*)处的意思是想再次提醒读者，周期为2π的函数$f(x)$的傅里叶系数公式均为$[-\pi,\pi]$上的积分，但由于对任意实数a，均有

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x,$$

故可直接“平移”积分区间至题中所给的0到2π.

【注2】 (1)在端点$0,2\pi$处，有$S(0)=S(2\pi)=\dfrac{f(0+0)+f(2\pi-0)}{2}=0$.

并如前所述，将$S(x)$的周期为2π的特性“充分”展示出来，就得到了下面的图像(见图15-12).

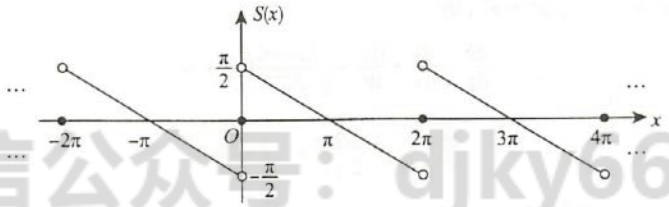


图15-12

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(2)对

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}(0<x<2\pi) \qquad (*)$$

做一些有趣的工作.比如令$2t=x$，则有$\dfrac{\pi}{2}-t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nt}{n}(0<2t<2\pi)$，等式两边同时除以2，即

$$\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nt}{2n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kt}{2k}(0<t<\pi), \qquad (**)$$

显然，这里$2k$是**偶数项**的标志.

在(**)式中令$t=x$，用(*)式减去(**)式，当然也就得到了级数中**奇数项**的和：

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},0<x<\pi.$$

将(*)式与(**)式写得清楚些：

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\cdots(0<x<2\pi),$$

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}+\cdots(0<x<\pi).$$

若用(*)式减去2倍的(**)式，有

$$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\cdots\right)-2\left(\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}+\cdots\right),$$

即

$$\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots,$$

也就是

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}(0<x<\pi).$$

由于上式两边均为奇函数，此时定义域可写为$-\pi<x<\pi$.这便回到了引言中的例子——读者现在可以重新感受到那个例子的精彩——在赞叹欧拉天赋的同时，你掌握傅里叶级数了吗？

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础例题精解

一、一元函数微分学应用

例 15.1 已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点(1,1)时，l 对时间的变化率是_____.

解 应填 $2\sqrt{2}v_0$.

由题设知 $l=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^6}$，则

$$\frac{dl}{dt}=\frac{dl}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{2x+6x^5}{2\sqrt{x^2+x^6}}\cdot v_0,$$

$$\left.\frac{dl}{dt}\right|_{x=1}=\frac{8}{2\sqrt{2}}v_0=2\sqrt{2}v_0.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 15.2 曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为_____.

解 应填 $\frac{2}{3}$.

用参数求导法，有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=-\tan t,\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(-\tan t)'\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{-3\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3\cos^4 t\sin t},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

按曲率公式，$t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为

$$k=\left.\frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{4}{3}\sqrt{2}}{2^{3/2}}=\frac{2}{3}.$$

二、一元函数积分学应用

例 15.3 设地球的质量为 M，半径为 R. 将地面上的质量为 m 的物体举高 H 米，求克服重力所做的功.

解 如图 15-13 所示，考虑将物体从距地心 x 米处举高到距地心 $x+dx$ 米的情况.

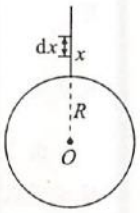


图 15-13

在此过程中，假设物体所受的重力大小近似为

$$G\frac{Mm}{x^2}(R\leqslant x\leqslant R+H),$$

其中 G 是引力常量.

将物体从距地心 x 米处举高到距地心 $x+dx$ 米时，克服重力所做功的微元为

$$dW=G\frac{Mm}{x^2}dx.$$

于是所求的功为

$$W=\int_R^{R+H}G\frac{Mm}{x^2}dx=-\frac{GMm}{x}\Big|_R^{R+H}=GMm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+H}\right).$$

例 15.4　有一倒圆锥形容器，高 10 m，上底半径 4 m，水面高 8 m. 求将容器中的水全部从容器顶部抽出所做的功(水的密度为 1 000 kg/m³，重力加速度 g 为 9.8 m/s²).

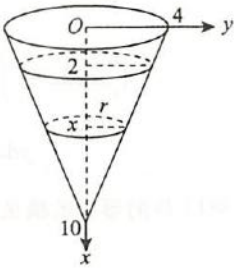


图 15-14

解　如图 15-14 所示，建立坐标系. 在 x 处的水平截面的半径 r 满足 $\frac{r}{10-x}=\frac{4}{10}$，即 $r=\frac{2}{5}(10-x)$.

截面面积　$A(x)=\pi r^2=\pi\cdot\left[\frac{2}{5}(10-x)\right]^2=\frac{4}{25}\pi(10-x)^2$.

所以将水全部抽出所做的功

$$W=1\,000g\int_2^{10}xA(x)dx=1\,000g\int_2^{10}x\cdot\frac{4}{25}\pi(10-x)^2dx$$

$$=160g\pi\int_2^{10}x(10-x)^2dx=160\cdot9.8\pi\cdot\frac{2\,048}{3}\approx3\,361(\text{kJ}).$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 15.5　洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体，椭圆的尺寸如图 15-15 所示. 当水箱装满水时，计算水箱的一个端面所受的压力(水的密度为 1 000 kg/m³，重力加速度 g 为 9.8 m/s²).

解　如图 15-16 所示，建立坐标系. 在 $x(-0.75\leqslant x\leqslant0.75)$ 处椭圆的宽度为 $2y=2\sqrt{1-\frac{x^2}{0.75^2}}$，$x$ 处的深度为 $x+0.75$，所以椭圆面所受到的压力

$$P=1\,000\times9.8\int_{-0.75}^{0.75}(x+0.75)\cdot2\sqrt{1-\frac{x^2}{0.75^2}}dx$$

$$=1\,000\times2\times9.8\left(\int_{-0.75}^{0.75}x\sqrt{1-\frac{x^2}{0.75^2}}dx+\int_{-0.75}^{0.75}\sqrt{0.75^2-x^2}dx\right)$$

$$\overset{(*)}{=\!=}19\,600\left(0+\frac{1}{2}\pi\cdot0.75^2\right)\approx1.73\times10^4(\text{N}).$$

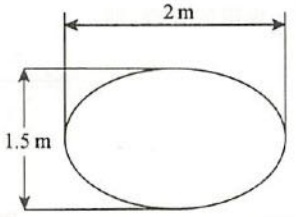


图 15-15

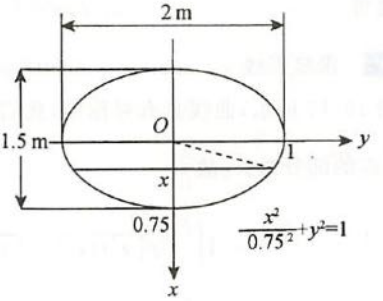


图 15-16

【注】　其中(*)处利用对称性，前一个定积分的值为零；利用定积分的几何意义，后一个定积分的值为半圆的面积.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 15.6 设曲线 L 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$，$1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$，$D$ 是由曲线 L，直线 $x=1$，$x=\mathrm{e}$ 及 x 轴围成的平面图形，求 D 的形心的横坐标.

解 平面图形 D 的形心的横坐标的计算公式为 $\bar{x}=\dfrac{\int_1^{\mathrm{e}} xy\mathrm{d}x}{\int_1^{\mathrm{e}} y\mathrm{d}x}$，其中

$$\int_1^{\mathrm{e}} xy\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}} x\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{4}x^2\ln x+\frac{1}{8}x^2\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{16}(\mathrm{e}^2+1)(\mathrm{e}^2-3),$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} y\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x\ln x+\frac{1}{2}x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{12}\mathrm{e}^3-\frac{7}{12},$$

所以 D 的形心的横坐标为

$$\bar{x}=\frac{\frac{1}{16}(\mathrm{e}^2+1)(\mathrm{e}^2-3)}{\frac{1}{12}\mathrm{e}^3-\frac{7}{12}}=\frac{3(\mathrm{e}^2+1)(\mathrm{e}^2-3)}{4(\mathrm{e}^3-7)}.$$

微信公众号：jiky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 平面区域 D 的形心一般表达式：$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$，$\bar{y}=\dfrac{\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$.

例 15.7 计算曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

解

$$s=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-1\right)\mathrm{d}x=\ln 3-\frac{1}{2}.$$

例 15.8 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长，其中 $a>0$ 是常数.

解

$$r'(\theta)=-a\sin\theta,$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+(r')^2}\mathrm{d}\theta=a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta=2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta.$$

由对称性得

$$s=2\int_0^{\pi}2a\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

例 15.9 求星形线 $x=\cos^3 t$，$y=\sin^3 t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的弧长.

解 如图 15-17 所示，曲线具有对称性，我们只需计算在第一象限的弧段，即 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 对应的部分弧长，故

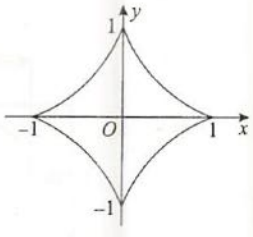


图 15-17

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\mid\sin t\cos t\mid\mathrm{d}t=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\mathrm{d}t=6.$$

例 15.10 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴

旋转一周所得到的旋转体的表面积.

解　设切点的横坐标为 x_0，则切点为 $(x_0, \sqrt{x_0-1})$，曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 在此点的切线斜率为 $\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}$，于是切线方程为

$$y-\sqrt{x_0-1}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0),$$

又因它经过原点，将点 $(0,0)$ 代入，得 $-2(x_0-1)=-x_0$，解得 $x_0=2$，于是切线方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-2)$，即 $y=\frac{1}{2}x$，切点为 $(2,1)$.

由曲线段 $y=\sqrt{x-1}(1\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转面的表面积为

$$S_1=\int_1^2 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

由直线段 $y=\frac{1}{2}x(0\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转面的表面积为

$$S_2=\int_0^2 2\pi\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{d}x=\sqrt{5}\pi.$$

因此，所求旋转体的表面积为 $S=S_1+S_2=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

三、微分方程的物理应用

例 15.11　某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9 000 kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times10^6$). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？(kg 表示千克，km/h 表示千米/时)

分析　本题是标准的牛顿第二定律的应用题，列出关系式后再解微分方程即可.

解　由题设，飞机的质量 $m=9\,000$ kg，着陆时的水平速度 $v_0=700$ km/h. 从飞机接触跑道开始计时，设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $v(t)$.

根据牛顿第二定律，得 $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$，又 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，由此可得 $\mathrm{d}x=-\frac{m}{k}\mathrm{d}v$，积分得

$$x(t)=-\frac{m}{k}v+C.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

由于 $v(0)=v_0$，$x(0)=0$，故得 $C=\frac{m}{k}v_0$，从而

$$x(t)=\frac{m}{k}[v_0-v(t)].$$

当 $v(t)\to 0$ 时，$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=\frac{9\,000\times700}{6.0\times10^6}=1.05(\mathrm{km})$，所以飞机滑行的最长距离为 1.05 km.

【注】　本题求飞机滑行的最长距离，可理解为 $t\to+\infty$ 或 $v(t)\to0$ 的极限值，这种条件应引起注意.

例 15.12 已知高温物体置于低温介质中，任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比. 现将一初始温度为 120 ℃的物体在 20 ℃恒温介质中冷却，30 min后该物体温度降至 30 ℃，若要将该物体的温度继续降至 21 ℃，还需冷却多长时间？

解 设该物体在 t 时刻的温度为 $T(t)$ ℃，由题意得

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-20),$$

其中 k 为比例系数，$k>0$，解得

$$T=Ce^{-kt}+20.$$

将初始条件 $T(0)=120$ 代入上式，解得 $C=100$，故

$$T=100e^{-kt}+20.$$

将 $t=30$，$T=30$ 代入上式得 $k=\frac{\ln 10}{30}$，所以

$$T=100e^{-\frac{\ln 10}{30}t}+20.$$

令 $T=21$，得 $t=60$. 因此要降至 21 ℃，还需 $60-30=30$(min).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

四、欧拉方程(仅数学一要求)

例 15.13 欧拉方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0(x>0)$ 的通解为_____.

解 应填 $y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$，$C_1$，$C_2$ 为任意常数.

由题设，$x>0$，令 $x=e^t$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

代入原方程，得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0,$$

解此方程得通解为 $y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$，$C_1$，$C_2$ 为任意常数.

五、傅里叶级数(仅数学一要求)

例 15.14 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$ $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$，其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx(n=0,1,2,\cdots)$，求 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$.

解 由余弦级数 $S(x)$ 为函数 $f(x)$ 作偶延拓的傅里叶级数，知

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(-2-\frac{1}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{f\left(\frac{1}{2}-0\right)+f\left(\frac{1}{2}+0\right)}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\left(2-2\times\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{3}{4}.$$

例 15.15 将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

解 将 $f(x)$ 延拓成 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，则

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\mathrm{d}x=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right),$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(0-\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x\right)=\frac{-2}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2},\ n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=0,n=1,2,\cdots,$$

故 $1-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

取 $x=0$，得 $1=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础习题精练

习题

15.1 甲车以 24 km/h 的速度向北行驶，同时正东 10 km 处有乙车以20 km/h的速度向东行驶. 从这一时刻起经过 1 小时后，求两车间的距离对时间的变化率.

15.2 设 $\rho=\rho(x)$是抛物线 $y=\sqrt{x}$上任一点 $M(x,y)(x\geqslant1)$处的曲率半径，$s=s(x)$是该抛物线上介于点 $A(1,1)$与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$ 的值.

15.3 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的. 设该人群的总人数为 N，在 $t=0$时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$(将 $x(t)$视为连续可微变量)，其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比，比例常数 $k>0$，求 $x(t)$.

15.4 有一半径为 4 m 的半球形水池蓄满了水，现在要将水全部抽到距水池原水面6 m高的水箱中，求需做多少功(水的密度为 1 000 kg/m³，重力加速度 $g=9.8$ m/s²，$\pi=3.14$).

15.5 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(a>0)$的一拱$(0\leqslant t\leqslant2\pi)$的弧长.

15.6 求阿基米德螺线 $r=a\theta(a>0)$上相应于 θ 从 0 到 2π 一段的弧长.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

解答

15.1 解 设甲车最初在原点 O 处，乙车在 C 处，$OC=10$ km，在 t 小时后，甲在 A 点，乙在 B 点，如图 15-18 所示. 设 $AB=s$，$OA=x$，$CB=y$，则 $s=\sqrt{x^2+(y+10)^2}$，其中 $s=s(t)$，$x=x(t)$，$y=y(t)$ 都是关于 t 的函数. 写成

$$s^2=x^2+(y+10)^2,$$

两边对 t 求导，得 $2s\cdot\dfrac{ds}{dt}=2x\dfrac{dx}{dt}+2(y+10)\dfrac{dy}{dt}$，即

$$\frac{ds}{dt}=\frac{x\dfrac{dx}{dt}+(y+10)\dfrac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+(y+10)^2}}.$$

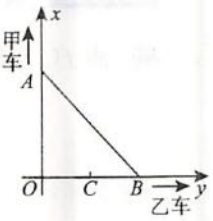


图 15-18

上式表达了三个变化率 $\dfrac{ds}{dt}$，$\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ 之间的关系. 已知 $\dfrac{dx}{dt}=24$，$\dfrac{dy}{dt}=20$；$t=1$ 时，$x=24$，$y=20$，代入上式，得 $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{196}{\sqrt{41}}\approx 30.6(\text{km/h})$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

15.2 解 由题知 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$y''=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$，代入曲率半径公式，得抛物线在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径

$$\rho=\rho(x)=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

又抛物线上 AM 的弧长

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+(y')^2}dt=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4t}}dt.$$

故

$$\frac{d\rho}{ds}=\frac{\dfrac{d\rho}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}}=\frac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}}}=6\sqrt{x},$$

$$\frac{d^2\rho}{ds^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{ds}{dx}}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}},$$

因此

$$3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2=3\cdot\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{4x+1}}-36x=9.$$

【注】 本题不仅要求记住曲率公式、弧长公式，而且运算量比较大，容易算错.

15.3 解 由题设可得 $\dfrac{dx}{dt}=kx(N-x)$，分离变量积分得 $x=\dfrac{NCe^{kNt}}{1+Ce^{kNt}}$.

由初始条件 $x\Big|_{t=0}=x_0$ 得特解

$$x=\frac{Nx_0e^{kNt}}{N-x_0+x_0e^{kNt}}.$$

【注】 此题十分容易，但实考得分率不高. 题中文字多，考生容易迷糊，甚至不知道这是可分离变量的微分方程，即使知道，有的也不知道如何去积分. 这类简单题的分数，考生一定要拿到手.

15.4 **解** 如图 15-19 所示，建立坐标系. 在 y 处的水面面积为

$$\pi(4^2-y^2)=\pi(16-y^2),$$

在区间$[y,y+\mathrm{d}y]$上的体积微元为

$$\pi(16-y^2)\mathrm{d}y,$$

提升此体积微元的水所需要的力的微元为

$$\rho g\pi(16-y^2)\mathrm{d}y,$$

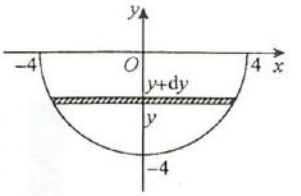


图 15-19

其中 $\rho=1\,000\ \mathrm{kg/m^3}$，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$，$\pi=3.14$. 提升到距原水面 6 m 高处等于提升距离为$(6-y)$，从而提升此微元的水需做功的微元为

$$(6-y)\rho g\pi(16-y^2)\mathrm{d}y,$$

所以将水全部提升至原水面上方 6 m 处需做功为

$$W=\int_{-4}^{0}(6-y)\rho g\pi(16-y^2)\mathrm{d}y=320\pi\rho g\approx 9\,847(\mathrm{kJ}).$$

15.5 **解** 曲线图形如图 15-20 所示.

由题意，所求弧长为

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{2\pi}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t\\&=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\mathrm{d}t\\&=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=2a\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=8a.\end{aligned}$$

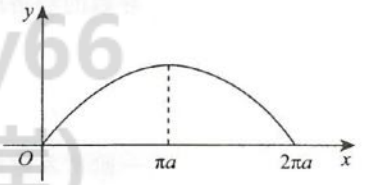


图 15-20

15.6 **解** 曲线图形如图 15-21 所示.

由题意，所求弧长为

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\theta^2+a^2}\mathrm{d}\theta\\&=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta\\&=a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2}+\frac{1}{2}\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]\Big|_0^{2\pi}\\&=a\left[\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right].\end{aligned}$$

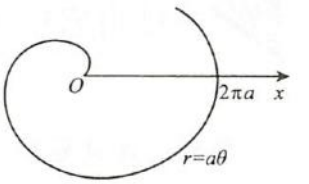


图 15-21

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第16讲 数学三专题内容

基础知识结构

- 复利与连续复利
- 导数的经济应用
  - 经济学中常见的函数
  - 边际函数与边际分析
  - 弹性函数与弹性分析
- 一阶常系数线性差分方程
  - 概念
  - 求解
    - 齐次差分方程的通解
    - 非齐次差分方程的解

微信公众号 ...766
(顶尖考研视频平台)

基础内容精讲

一、复利与连续复利

复利计算公式

$$A_m = A(1+r)^m.$$

其中 A 表示一开始的本金，r 表示每一期的利率，m 表示复利的总期数，A_m 表示 m 期后的余额.

①如果年利率为 r 的利息一年支付 1 次，那么当初始存款为 A 元时，t 年后余额 A_t 则为

$$A_t = A(1+r)^t.$$

②如果年利率为 r 的利息一年支付 n 次，那么当初始存款为 A 元时，t 年后余额 A_t 则为

$$A_t = A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

③对于②，当 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} A_t = \lim\limits_{n\to\infty} A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = Ae^{rt}$，这称为**连续复利**.

【注】 考试时要弄清楚①，②，③三种情况，题目会明确告知.

二、导数的经济应用

1. 经济学中常见的函数

(1)需求函数.

设某产品的需求量为 x,价格为 p.一般地,需求量 x 作为价格 p 的函数 $x=\varphi(p)$,称为**需求函数**.并且价格 p 上升(下降),需求量 x 下降(上升).需求函数的反函数 $p=\varphi^{-1}(x)$称为**价格函数**,也常称为反需求函数.

(2)供给函数.

设某产品的供给量为 x,价格为 p.一般地,供给量 x 作为价格 p 的函数 $x=\psi(p)$,称为**供给函数**.并且价格 p 上升(下降),供给量 x 上升(下降).

(3)成本函数.

成本 $C=C(x)$——生产产品的总投入.它由固定成本 C_1(常量)和可变成本 $C_2(x)$两部分组成,其中 x 表示产量.成本函数为

$$C=C(x)=C_1+C_2(x).$$

称 $\dfrac{C}{x}$ 为**平均成本**,记为 $\overline{C}$ 或 AC:

$$AC=\overline{C}=\frac{C}{x}=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2(x)}{x}.$$

(4)收益(入)函数.

收益 $R=R(x)$——产品售出后所得的收入,是销售量 x 与销售单价 p 之积.收益函数为

$$R=R(x)=px.$$

(5)利润函数.

利润 $L=L(x)$——收益扣除成本后的余额,由总收益减去总成本得到.利润函数为

$$L=L(x)=R(x)-C(x)(x:\text{销售量}).$$

2. 边际函数与边际分析

在经济学中,导函数称为边际函数.若函数 $f(x)$可导,则称 $f'(x)$为 $f(x)$的**边际函数**.$f'(x_0)$称为 $f(x)$在 x_0 点的**边际值**.用边际函数来分析经济量的变化叫**边际分析**.

由 $\Delta y\approx \mathrm{d}y$,即 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$,取 $\Delta x=1$ 得

$$f(x_0+1)-f(x_0)\approx f'(x_0).$$

于是,边际值 $f'(x_0)$被解释为:在 x_0 点,当 x 改变一个单位时,函数 $f(x)$近似(实际问题中,经常略去"近似"二字)改变 $|f'(x_0)|$个单位.$f'(x_0)$的符号反映自变量的改变与因变量的改变是同向还是反向.

(1)边际成本.

设总成本函数为

$$C=C(q)(q:\text{产量}),$$

则**边际成本函数**(记为 MC)为

$$MC=C'(q).$$

产量为 q_0 时的边际成本 $C'(q_0)$表示:当产量为 q_0 时,产量 q 改变一个单位,总成本 $C(q)$将改变 $|C'(q_0)|$个单位.$C'(q_0)$的符号反映产量 q 的改变与总成本 $C(q)$的改变是同向还是反向.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(2)边际收益.

设总收益函数为

$$R=R(q)(q:\text{销售量}),$$

则边际收益函数(记为 MR)为

$$MR=R'(q).$$

销售量为 q_0 时的边际收益 $R'(q_0)$ 表示:当销售量为 q_0 时,销售量 q 改变一个单位,总收益将改变 $|R'(q_0)|$ 个单位. $R'(q_0)$ 的符号反映销售量 q 的改变与总收益 R 的改变是同向还是反向.

(3)边际利润.

设利润函数为

$$L=L(q)(q:\text{销售量}),$$

则边际利润函数(记为 ML)为

$$ML=L'(q).$$

销售量为 q_0 时的边际利润 $L'(q_0)$ 表示:当销售量为 q_0 时,销售量 q 改变一个单位,利润将改变 $|L'(q_0)|$ 个单位. $L'(q_0)$ 的符号反映销售量 q 的改变与利润 L 的改变是同向还是反向.

3. 弹性函数与弹性分析

在经济学中,把因变量对自变量变化的反应的灵敏度,称为**弹性**或**弹性系数**. 设函数 $y=f(x)$ 可导,称

$$\eta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x}=\frac{x}{y}y'=\frac{x}{f(x)}f'(x)$$

为函数 $y=f(x)$ 的**弹性函数**,称

$$\eta\Big|_{x=x_0}=\frac{x_0}{f(x_0)}f'(x_0)$$

为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的(点)**弹性**.

$\eta\Big|_{x=x_0}$ 表示在 x_0 处,当自变量 x 改变 1%时,因变量 y 将改变 $\left|\eta\Big|_{x=x_0}\right|$%. 其符号表示自变量 x 的改变与因变量 y 的改变是同向还是反向.

用弹性函数来分析经济量的变化叫**弹性分析**.

(1)需求的价格弹性.

设需求函数为 $Q=\varphi(p)$(p:价格,Q:需求量),则需求弹性为

$$\eta_d=\frac{p}{\varphi(p)}\varphi'(p).$$

由于需求函数单调递减,故 $\varphi'(p)<0$,从而 $\eta_d<0$.

其经济意义:当价格为 p 时,若提价(降价)1%,则需求量将减少(增加)$|\eta_d|$%.

【注】 若题设要求 $\eta_d>0$,则取 $\eta_d=-\frac{p}{\varphi(p)}\cdot\varphi'(p)$.

(2)供给的价格弹性.

设供给函数为 $Q=\psi(p)$(p:价格,Q:供给量),则供给弹性为

$$\eta_s=\frac{p}{\psi(p)}\psi'(p).$$

由于供给函数单调增加,故 $\psi'(p)>0$,从而 $\eta_s>0$.

其经济意义：当价格为 p 时，若提价(降价)1%，则供给量将增加(减少)η_c%.

三、一阶常系数线性差分方程

(一)差分方程的基本概念

1. 函数差分的定义

定义 1 函数 $y_t=f(t)$，$t=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 函数 $f(t)$ 在 t 时刻的**一阶差分**定义为

$$\Delta y_t=y_{t+1}-y_t=f(t+1)-f(t);$$

函数 $f(t)$ 在 t 时刻的**二阶差分**定义为

$$\Delta^2 y_t=\Delta(\Delta y_t)=\Delta y_{t+1}-\Delta y_t=y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t;$$

其余类推，函数 $f(t)$ 在 t 时刻的 n **阶差分**定义为

$$\Delta^n y_t=\Delta(\Delta^{n-1}y_t)=\Delta^{n-1}y_{t+1}-\Delta^{n-1}y_t=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}y_{t+n-k}.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

2. 差分方程及其基本概念

(1)差分方程.

定义 2 含有自变量 t，未知函数 y_t，以及 y_t 的差分 Δy_t，$\Delta^2 y_t$，$\cdots$ 的函数方程，称为(常)**差分方程**.

n 阶差分方程的一般形式为

$$F(t,y_t,\Delta y_t,\cdots,\Delta^n y_t)=0, \tag{16-1}$$

这里 F 为已知函数，且 $\Delta^n y_t(n\geqslant1)$ 必定要出现.

定义 2′ 含有自变量 t 和两个或两个以上函数值 $y_t,y_{t+1},\cdots$ 的函数方程，称为(常)**差分方程**.

n 阶差分方程的另一种一般形式为

$$F(t,y_t,y_{t+1},\cdots,y_{t+n})=0, \tag{16-2}$$

这里 F 是已知函数，且 y_t 与 $y_{t+n}(n\geqslant1)$ 必定要出现.

(2)差分方程的阶.

定义 3 出现在差分方程(16-1)中差分的最高阶数，称为**差分方程的阶**.

定义 3′ 出现在差分方程(16-2)中未知函数下标的最大差，称为**差分方程的阶**.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

由于经济学中经常遇到的是按形如(16-2)给出的差分方程，因此下述将只研究形如(16-2)的差分方程. 差分方程的阶也依照定义 3′给定.

(3)差分方程的解.

定义 4 若函数 $y_t=\varphi(t)$ 代入方程(16-2)，使得对一切的 t 均成为恒等式，则称 $y_t=\varphi(t)$ 为**差分方程(16-2)的解**.

含有 n 个任意独立常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的解

$$y_t=\varphi(t,C_1,C_2,\cdots,C_n),$$

称为 n **阶差分方程(16-2)的通解**.

在通解中给任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 以确定值而得出的解，称为 n **阶差分方程(16-2)的特解**.

(二)一阶常系数线性差分方程的求解

一阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+1}+ay_t=f(t), \tag{16-3}$$

其中 $f(t)$ 为已知函数，a 为非零常数.

当 $f(t)\equiv 0$ 时，方程(16-3)变为

$$y_{t+1}+ay_t=0, \tag{16-4}$$

当 $f(t)\neq 0$ 时，我们称(16-3)为一阶常系数**非齐次线性差分方程**，(16-4)为其对应的一阶常系数**齐次线性差分方程**.

1. 齐次差分方程的通解

通过迭代，并由数学归纳法可得(16-4)的通解为

$$y_C(t)=C\cdot(-a)^t,$$

这里 C 为任意常数.

2. 非齐次差分方程的解

定理 1 若 y_t^* 是非齐次差分方程(16-3)的一个特解，$y_C(t)$ 是齐次差分方程(16-4)的通解，则非齐次差分方程(16-3)的通解为 $y_t=y_C(t)+y_t^*$.

定理 2 若 $\bar{y}_t$ 与 $\tilde{y}_t$ 分别是差分方程

$$y_{t+1}+ay_t=f_1(t)$$

和

$$y_{t+1}+ay_t=f_2(t)$$

的解，则

$$y_t=\bar{y}_t+\tilde{y}_t$$

是差分方程

$$y_{t+1}+ay_t=f_1(t)+f_2(t)$$

的解.

非齐次差分方程(16-3)的特解 y_t^* 形式的设定见下表.

(16-3)中 $f(t)$ 的形式	取待定特解的条件	试取特解的形式
$f(t)=P_m(t)=b_0+b_1t+\cdots+b_mt^m$	$a\neq -1$	$y_t^*=Q_m(t)=B_0+B_1t+\cdots+B_mt^m$ $B_0,B_1,\cdots,B_m$ 为待定常数
	$a=-1$	$y_t^*=tQ_m(t)$
$f(t)=d^t\cdot P_m(t)$ d 为非零常数	$a+d\neq 0$	$y_t^*=d^tQ_m(t)$
	$a+d=0$	$y_t^*=td^tQ_m(t)$
$f(t)=b_1\cos wt+b_2\sin wt$ $w\neq 0$ 且 b_1,b_2 为不同时为零的常数	$D=\begin{vmatrix} a+\cos w & \sin w \\ -\sin w & a+\cos w \end{vmatrix}\neq 0$	$y_t^*=\alpha\cos wt+\beta\sin wt$ α,β 为待定常数
	$D=0$	$y_t^*=t(\alpha\cos wt+\beta\sin wt)$

基础例题精解

例 16.1 设某酒厂有一批新酿的好酒，如果现在(假定 $t=0$)就售出，总收入为 R_0 元，如果窖藏起来待来日按陈酒价格出售，t 年末总收入为 $R=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$. 假定银行的年利率为 r，并以连续复利计息，求窖藏多

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

少年售出可使总收入的现值最大，并求 $r=6\%$ 时的 t 值.

解 根据连续复利公式，这批酒在窖藏 t 年末售出总收入 R 的现值为 $A(t)=Re^{-rt}$，而 $R=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$，故 $A(t)=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}$. 令 $\frac{dA}{dt}=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}\left(\frac{1}{5\sqrt{t}}-r\right)=0$，得驻点 $t_0=\frac{1}{25r^2}$.

又 $\frac{d^2A}{dt^2}=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}\left[\left(\frac{1}{5\sqrt{t}}-r\right)^2-\frac{1}{10\sqrt{t^3}}\right]$，则有 $\left.\frac{d^2A}{dt^2}\right|_{t=t_0}=R_0e^{\frac{1}{25r}}(-12.5r^3)<0$.

于是，$t_0=\frac{1}{25r^2}$ 是极大值点亦是最大值点，故窖藏 $t=\frac{1}{25r^2}$ 年售出可使总收入的现值最大. 当 $r=6\%$ 时，$t=\frac{100}{9}\approx 11$（年）.

例 16.2 设商品的需求函数为 $Q=100-5p$，其中 Q,p 分别表示需求量和价格，如果商品需求弹性的绝对值大于 1，求商品价格的取值范围.

解 需求量 Q 对价格 p 的弹性 $\eta=\frac{p}{Q}Q'=\frac{-5p}{100-5p}$，由于需求弹性的绝对值大于 1，即 $\left|\frac{-5p}{100-5p}\right|>1$，结合 $Q=100-5p>0$，解得 $p\in(10,20)$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 16.3 设生产某商品的固定成本为 60 000 元，可变成本为 20 元/件，价格函数为 $p=60-\frac{Q}{1\,000}$（p 是单价，单位：元；Q 是销量，单位：件）. 已知产销平衡，求：

(1)该商品的边际利润；

(2)当 $p=50$ 时的边际利润，并解释其经济意义；

(3)使得利润最大的定价 p.

解 (1)成本函数 $C(Q)=60\,000+20Q$，收益函数 $R(Q)=pQ=60Q-\frac{Q^2}{1\,000}$，利润函数

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)=-\frac{Q^2}{1\,000}+40Q-60\,000,$$

故该商品的边际利润

$$L'(Q)=-\frac{Q}{500}+40.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

(2)当 $p=50$ 时，销量 $Q=10\,000$，$L'(10\,000)=20$.

其经济意义：销售第 10 001 件商品所得的利润为 20 元.

(3)令 $L'(Q)=-\frac{Q}{500}+40=0$，得 $Q=20\,000$，且 $L''(20\,000)<0$，故当 $Q=20\,000$ 件时利润最大，此时 $p=40$ 元.

例 16.4 设某商品从时刻 0 到时刻 t 的销售量为 $x(t)=kt,t\in[0,T](k>0)$. 欲在 T 时将数量为 A 的该商品销售完，求：

(1)t 时的商品剩余量，并确定 k 的值；

(2)商品在时间段 $[0,T]$ 上的平均剩余量.

分析 在时刻 t 的剩余量 $y(t)$ 可用总量 A 减去销量 $x(t)$ 得到；由于 $y(t)$ 随时间连续变化，因此在时间段 $[0,T]$ 上的平均剩余量，即函数平均值可用积分 $\frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$ 表示.

解 (1)在时刻 t 商品的剩余量为 $y(t)=A-x(t)=A-kt,t\in[0,T]$.

由 $A-kT=0$ 得 $k=\frac{A}{T}$，因此 $y(t)=A-\frac{A}{T}t, t\in[0,T]$.

(2)依题意有，$y(t)$ 在$[0,T]$上的平均值为

$$\bar{y}=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\left(A-\frac{A}{T}t\right)\mathrm{d}t=\frac{A}{2},$$

因此商品在时间段$[0,T]$上的平均剩余量为 $\frac{A}{2}$.

例 16.5 某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告，根据统计资料，销售收入 R(万元)与电台广告费 x_1(万元)及报纸广告费用 x_2(万元)之间的关系有如下经验公式：

$$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2.$$

(1)在广告费用不限的情况下，求最优广告策略；

(2)若提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的最优广告策略.

解 (1)利润函数为 $z=f(x_1,x_2)=R-(x_1+x_2)=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2$.

令 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x_1}=13-8x_2-4x_1=0,\\ \frac{\partial z}{\partial x_2}=31-8x_1-20x_2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=0.75,\\ x_2=1.25.\end{cases}$

故利润函数 $z=f(x_1,x_2)$在$(0.75,1.25)$处达到极大值，也是最大值.

(2)若广告费用为 1.5 万元，则需要求利润函数 $z=f(x_1,x_2)$在 $x_1+x_2=1.5$ 时的条件极值点.

构造拉格朗日函数 $F(x_1,x_2,\lambda)=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2+\lambda(x_1+x_2-1.5)$.

由方程组 $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x_1}=-8x_2-4x_1+13+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=-8x_1-20x_2+31+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x_1+x_2-1.5=0,\end{cases}$ 解得 $x_1=0, x_2=1.5$.

故将 1.5 万元广告费全部用于报纸广告，可使利润最大.

例 16.6 已知某商品的需求量 x 对价格 p 的弹性 $\eta=-3p^3$，而市场对该商品的最大需求量为 1(万件)，求需求函数.

解 根据弹性定义，有 $\eta=\frac{\mathrm{d}x}{x}\Big/\frac{\mathrm{d}p}{p}=-3p^3$，$\frac{\mathrm{d}x}{x}=-3p^2\mathrm{d}p$.

由此得 $x=Ce^{-p^3}$，C 为待定常数，由条件知 $p=0$ 时，$x=1$，从而 $C=1$，于是所求的需求函数为 $x=e^{-p^3}$.

例 16.7 求下列一阶差分方程的通解：

(1)$2y_{t+1}+10y_t-5t=0$；

(2)$y_{t+1}-y_t=4\cos\frac{\pi}{3}t$.

解 (1)方程可化简为 $y_{t+1}+5y_t=\frac{5}{2}t$，即 $a=5, f(t)=\frac{5}{2}t$，则对应的齐次方程的通解为

$$y_A(t)=A(-5)^t.$$

非齐次方程的特解应具有的形式为

$$y_t^*=B_0+B_1t,$$

微信公众号：djky66
(更多考研资料上岸)

代入原方程后可求得 $B_0=-\frac{5}{72}$，$B_1=\frac{5}{12}$. 于是原方程的通解为

$$y_t=A(-5)^t+\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)(A\text{ 为任意常数}).$$

(2)设非齐次方程的特解具有形式

$$y_t^*=B_0\cos\frac{\pi}{3}t+B_1\sin\frac{\pi}{3}t,$$

代入原方程后可求得 $B_0=-2$，$B_1=2\sqrt{3}$. 于是原方程的通解为

$$y_t=A-2\cos\frac{\pi}{3}t+2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}t(A\text{ 为任意常数}).$$

基础习题精练

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

习题

16.1 设某商品的最大需求量为 1 200 件，该商品的需求函数 $Q=Q(p)$，需求弹性 $\eta=\frac{p}{120-p}(\eta>0)$，$p$ 为单价(单位：万元).

(1)求需求函数的表达式；

(2)求 $p=100$ 万元时的边际收益，并说明其经济意义.

16.2 假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品，两个市场的需求函数分别是

$$p_1=18-2Q_1,\quad p_2=12-Q_2,$$

其中 p_1 和 p_2 分别表示该产品在两个市场的价格(单位：万元/吨)，Q_1 和 Q_2 表示该产品在两个市场的销售量(即需求量，单位：吨)，并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$，其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量，即 $Q=Q_1+Q_2$.

(1)如果该企业实行价格差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量和价格，使该企业获得最大利润；

(2)如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格，使该企业的总利润最大化，并比较两种价格策略下的总利润大小.

16.3 求方程 $y_{t+1}-3y_t=2^t-1$，$y_0=1$ 的特解.

16.4 设 y_t 满足 $\Delta^2y_t+3\Delta y_t+2y_t=2t-1$ 及初始条件 $y_t\Big|_{t=0}=1$，求 y_t 的表达式.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

解答

16.1 解 (1)由题设

$$-\frac{p}{Q}Q'=\frac{p}{120-p},$$

所以 $\int\frac{\mathrm{d}Q}{Q}=-\int\frac{1}{120-p}\,\mathrm{d}p$，可得 $\ln Q=\ln(120-p)+\ln C$，即 $Q=C(120-p)$.

又最大需求量为 1 200 件，故 $C=10$，所以需求函数 $Q=1\,200-10p$.

(2)由(1)知，收益函数 $R=120Q-\frac{1}{10}Q^2$，边际收益 $R'(Q)=120-\frac{1}{5}Q$.

当 $p=100$ 时，$Q=200$，故当 $p=100$ 万元时的边际收益 $R'(200)=80$. 其经济意义：销售第 201 件商品所得的收益为 80 万元.

16.2 解 (1)根据题意，总利润函数为

$$L=R-C=p_1Q_1+p_2Q_2-(2Q+5)=-2Q_1^2-Q_2^2+16Q_1+10Q_2-5.$$

令
$$\begin{cases} L'_{Q_1}=-4Q_1+16=0, \\ L'_{Q_2}=-2Q_2+10=0, \end{cases}$$

解得 $Q_1=4, Q_2=5$，则 $p_1=10$ 万元/吨，$p_2=7$ 万元/吨.

因驻点 $(4,5)$ 唯一，且实际问题一定存在最大值，故最大值必在驻点处达到，最大利润为

$$L=-2\times4^2-5^2+16\times4+10\times5-5=52(\text{万元}).$$

(2)若实行价格无差别策略，则 $p_1=p_2$，于是有约束条件 $2Q_1-Q_2=6$.

构造拉格朗日函数 $F(Q_1,Q_2,\lambda)=-2Q_1^2-Q_2^2+16Q_1+10Q_2-5+\lambda(2Q_1-Q_2-6)$.

令
$$\begin{cases} F'_{Q_1}=-4Q_1+16+2\lambda=0, \\ F'_{Q_2}=-2Q_2+10-\lambda=0, \\ F'_{\lambda}=2Q_1-Q_2-6=0, \end{cases}$$

解得 $Q_1=5, Q_2=4, \lambda=2$，则 $p_1=p_2=8$ 万元/吨.

最大利润 $L=-2\times5^2-4^2+16\times5+10\times4-5=49$ (万元).

由上述结果可知，企业实行差别定价所得总利润要大于统一价格的总利润.

16.3 解 由于 $y_{t+1}-3y_t=2^t$ 的特解为 -2^t，而 $y_{t+1}-3y_t=1$ 的特解为 $-\frac{1}{2}$. 由叠加原理可得，原方程的通解为

$$y_t=A\cdot3^t-2^t+\frac{1}{2},$$

代入定解条件 $y_0=1$，可求得 $A=\frac{3}{2}$，故原方程的特解为

$$y_t=\frac{1}{2}\cdot3^{t+1}-2^t+\frac{1}{2}.$$

16.4 解 将 $\Delta^2y_t=y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t$，$\Delta y_t=y_{t+1}-y_t$ 代入题设方程，得

$$y_{t+2}+y_{t+1}=2t-1,$$

令 $z_t=y_{t+1}$，上式化成

$$z_{t+1}+z_t=2t-1. \qquad ①$$

按一阶差分方程的规范解法，对应的齐次方程的通解为 $z_t=C(-1)^t$，C 为任意常数.

关于 z_t 的非齐次差分方程的特解应具有的形式为 $z_t^*=At+B$，代入式①可得 $A=1, B=-1, z_t^*=t-1$.

从而式①的通解为 $z_t=C(-1)^t+t-1$，即 $y_{t+1}=C(-1)^t+t-1$，$y_t=C(-1)^{t-1}+t-2$.

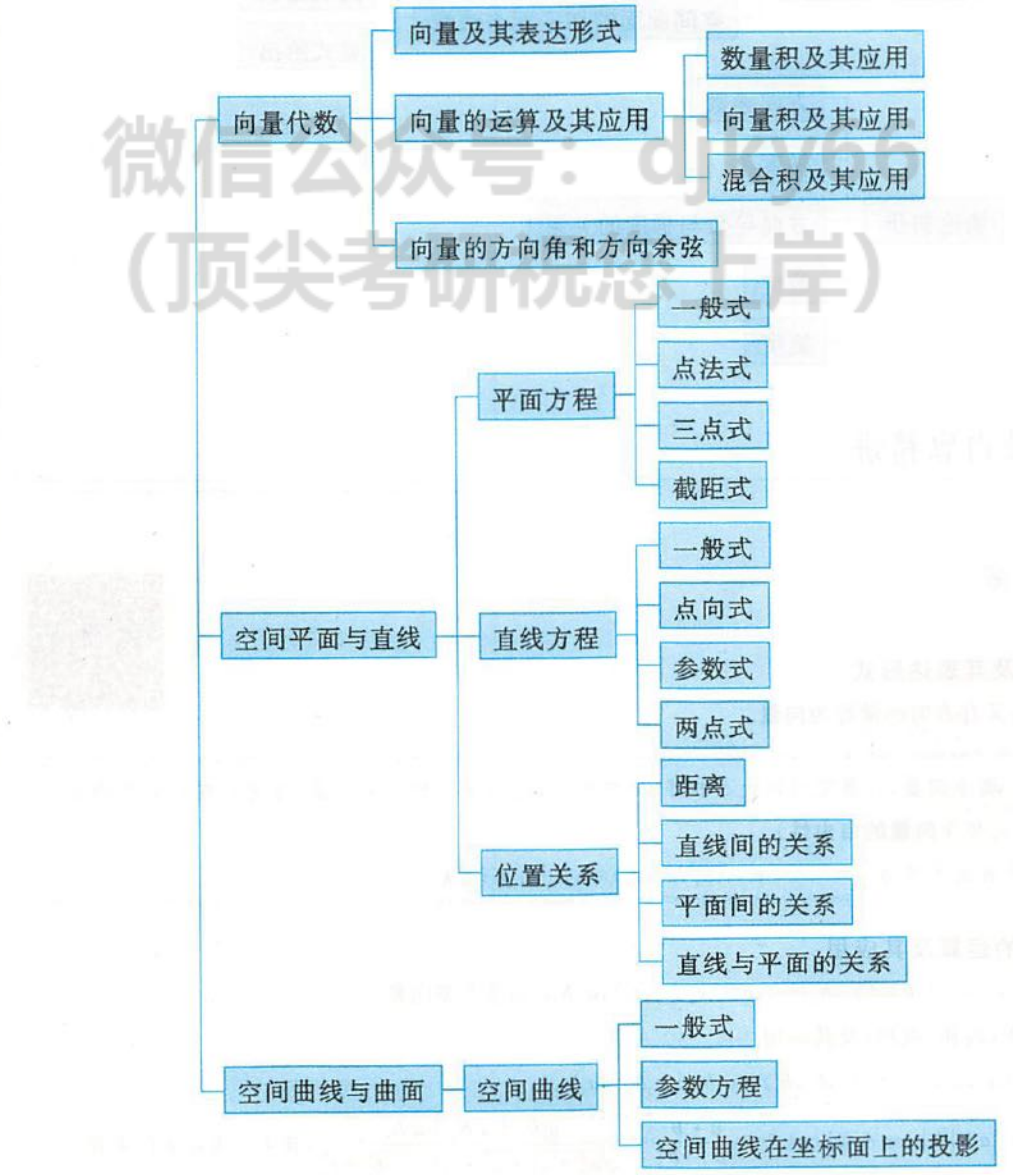
由初始条件 $y_t\Big|_{t=0}=C(-1)^{-1}-2=1$，故 $C=-3$. 所以

$$y_t=-3(-1)^{t-1}+t-2=3(-1)^t+t-2.$$

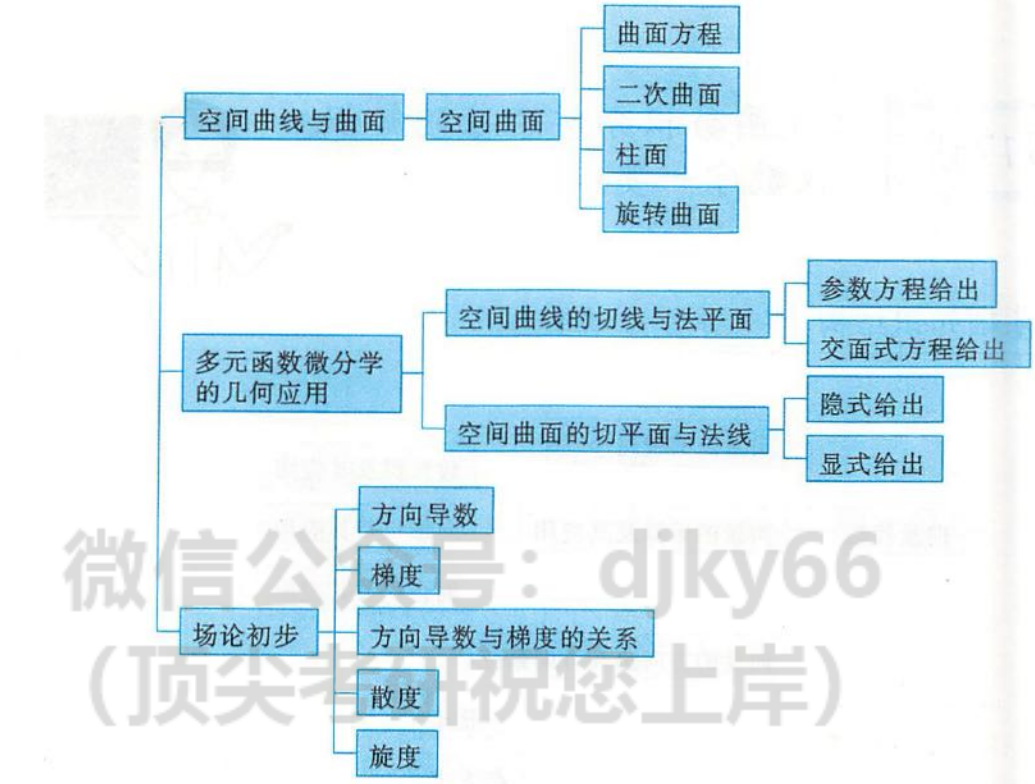
微信公众号：dkyc66
(顶尖考研陪上岸)

第17讲 多元函数积分学的基础知识（仅数学一要求）

基础知识结构



微信公众号：dpkaoyan
（顶尖考研祝您上岸）



微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础内容精讲

一、向量代数

1. 向量及其表达形式

既有大小又有方向的量称为**向量**.

【注】 两个向量，只要它们的大小相等、方向相同，它们就是相等的向量，与它们在空间中的位置无关(这也称为**向量的自由性**).

向量的表达形式为 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$.

2. 向量的运算及其应用

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均是非零向量.

(1)数量积(内积、点积)及其应用.

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x,a_y,a_z)\cdot(b_x,b_y,b_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角.

③$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

④$\mathrm{Prj}_b a=\dfrac{a\cdot b}{|b|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$，称为 a 在 b 上的**投影**.

(2)向量积(外积、叉积)及其应用.

①$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$，其中 $|a\times b|=|a||b|\sin\theta$，用右手规则确定方向(转向角不超过 π)，θ 为 a，b 的夹角.

②$a/\!/b\Leftrightarrow\theta=0$ 或 $\pi\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

(3)混合积及其应用.

①$[abc]=(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

②$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$三向量共面.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

3. 向量的方向角和方向余弦

(1)非零向量 a 与 x 轴、y 轴和 z 轴正向的夹角 α,β,γ 称为 a 的**方向角**.

(2)$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为 a 的**方向余弦**，且 $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|a|}$，$\cos\beta=\dfrac{a_y}{|a|}$，$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|a|}$.

(3)$a^\circ=\dfrac{a}{|a|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$称为向量 a 的**单位向量**(表示方向的向量).

(4)任意向量 $r=xi+yj+zk=(r\cos\alpha,r\cos\beta,r\cos\gamma)=r(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 r 的方向余弦，r 为 r 的模，$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

二、空间平面与直线

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

1. 平面方程

以下假设平面的法向量 $n=(A,B,C)$.

①一般式：$Ax+By+Cz+D=0$.

②点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

③三点式：$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$(平面过不共线的三点 $P_i(x_i,y_i,z_i),i=1,2,3$).

④截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$(平面过$(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$三点).

2. 直线方程

以下假设直线的方向向量 $\tau=(l,m,n)$.

①一般式：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2),\end{cases}$其中 $\boldsymbol{n}_1$ 不平行于 $\boldsymbol{n}_2$.

【注】 其几何背景很直观，是两个平面的交线，且该直线的方向向量 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$.

②点向式(标准式、对称式)：$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$.

③参数式：$\begin{cases}x=x_0+lt,\\y=y_0+mt,\\z=z_0+nt,\end{cases}$ $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上的已知点，t 为参数.

④两点式：$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$(直线过不同的两点 $P_i(x_i,y_i,z_i),i=1,2$).

3. 位置关系

(1)距离.

点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

(2)直线间的关系.

设 $\boldsymbol{\tau}_1=(l_1,m_1,n_1),\boldsymbol{\tau}_2=(l_2,m_2,n_2)$ 分别为直线 L_1,L_2 的方向向量.

①$L_1\perp L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{\tau}_1\perp\boldsymbol{\tau}_2\Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

②$L_1/\!/L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{\tau}_1/\!/\boldsymbol{\tau}_2\Leftrightarrow\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.

(3)平面间的关系.

设平面 π_1,π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$.

①$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

②$\pi_1/\!/\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

(4)平面与直线的关系.

设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$，平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

①$L\perp\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{\tau}/\!/\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$.

②$L/\!/\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{\tau}\perp\boldsymbol{n}\Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0$.

三、空间曲线与曲面

1. 空间曲线

(1)一般式 Γ：$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$其几何背景为两个曲面的交线.

(2)参数方程 Γ：$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t),\\z=\omega(t),\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$.

微信公众号：djky66
(张宇考研祝您上岸)

(3)空间曲线在坐标面上的投影(**重点**).

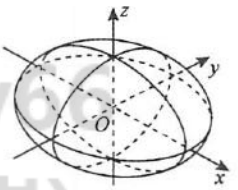
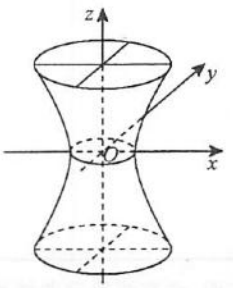
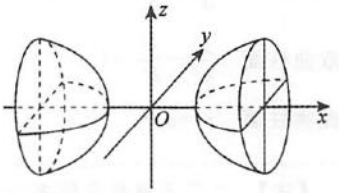
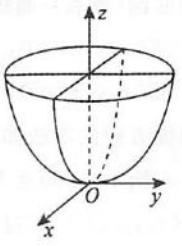
以求曲线 Γ 在 xOy 平面上的投影曲线为例. 将 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中的 z 消去,得到 $\varphi(x,y)=0$,则曲线 Γ 在 xOy 面上的投影曲线包含于曲线 $\begin{cases}\varphi(x,y)=0,\\z=0.\end{cases}$

曲线 Γ 在其他平面上的投影曲线可类似求得.

2. 空间曲面

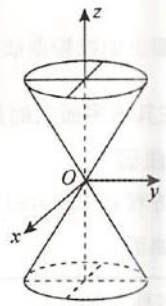
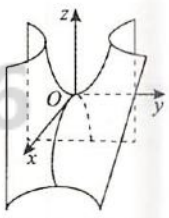
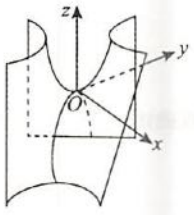
(1)曲面方程:$F(x,y,z)=0$.

(2)二次曲面.

曲面名称	方程	图形
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$	

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

续表

曲面名称	方程	图形
椭圆锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$	
双曲抛物面(马鞍面)	$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$	
	$z=xy$	

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(3)柱面：动直线沿定曲线平行移动所形成的曲面.

椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(当 $a=b$ 时为圆柱面).

双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

抛物柱面 $y=ax^2$.

【注】 在空间解析几何中，一般认为缺少变量的方程为柱面.

(4)旋转曲面(**重点**)：曲线 Γ 绕一条定直线旋转一周所形成的曲面.

曲线 Γ：$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 绕直线 L：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ 旋转形成一个旋转曲面，旋转曲面方程的求法如下.

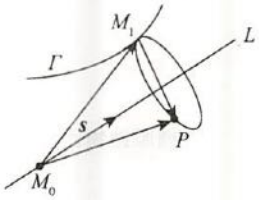


图 17-1

如图 17-1 所示，已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量 $s=(m,n,p)$. 在母线 Γ 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则过 M_1 的纬圆上任意一点 $P(x,y,z)$ 满足条件

$$\overrightarrow{M_1P}\perp s,\quad |\overrightarrow{M_0P}|=|\overrightarrow{M_0M_1}|,$$

即 $\begin{cases} m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2, \end{cases}$

与方程 $F(x_1,y_1,z_1)=0$ 和 $G(x_1,y_1,z_1)=0$ 联立消去 x_1,y_1,z_1，便可得到旋转曲面的方程.

四、多元函数微分学的几何应用

1. 空间曲线的切线与法平面

(1)设空间曲线 Γ 由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases}$ $(t\in[\alpha,\beta])$ 给出，其中 $\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$ 均可导，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 Γ 上对应 $t=t_0$ 的点，且当 $t=t_0$ 时，$\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$ 都不为 0，则

①曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为 $\tau=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$.

②曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$.

③曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面(过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与切线垂直的平面)方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

(2)设空间曲线 Γ 由交面式方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 给出，则在以下表达式有意义的条件下，有

①曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\tau=\left(\left|\begin{matrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{matrix}\right|_{P_0},\left|\begin{matrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{matrix}\right|_{P_0},\left|\begin{matrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{matrix}\right|_{P_0}\right).$$

②曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left|\begin{matrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{matrix}\right|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\left|\begin{matrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{matrix}\right|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\left|\begin{matrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{matrix}\right|_{P_0}}.$$

③曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面方程为

$$\left|\begin{matrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{matrix}\right|_{P_0}(x-x_0)+\left|\begin{matrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{matrix}\right|_{P_0}(y-y_0)+\left|\begin{matrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{matrix}\right|_{P_0}(z-z_0)=0.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

2. 空间曲面的切平面与法线

(1)设空间曲面 Σ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出，$F(x,y,z)$ 可微，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 Σ 上的点，则

①曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量(垂直于该点切平面的向量)为

$$\boldsymbol{n}=(F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0)),$$

且法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$.

②曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

(2)设空间曲面 Σ 由方程 $z=f(x,y)$ 给出，$f(x,y)$ 可微，令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 Σ 上的点，则

①曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1),$$

且法线方程为 $$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

②曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

【注】 若用 α,β,γ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量的方向角，并假定法向量的方向是向上的，即它与 z 轴正向所成的角 γ 是锐角，则法向量的**方向余弦**为

$$\cos\alpha=\frac{-f'_x}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f'_y}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}},$$

其中，$f'_x=f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y=f'_y(x_0,y_0)$.

五、场论初步

微信公众号：djky66
(侯公考研微您上岸)

1. 方向导数

在许多问题中，不仅要知道函数在坐标轴方向上的变化率(即偏导数)，还要设法求得函数在某点沿着其他特定方向上的变化率. 这就是本部分所要讨论的方向导数.

定义 1 设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某空间邻域 $U\subset\mathbf{R}^3$ 内有定义，l 为从点 P_0 出发的射线，$P(x,y,z)$ 为 l 上且在 U 内的任一点，则

$$\begin{cases}x-x_0=\Delta x=t\cos\alpha,\\ y-y_0=\Delta y=t\cos\beta,\\ z-z_0=\Delta z=t\cos\gamma.\end{cases}$$

以 $t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ 表示 P 与 P_0 之间的距离，如图 17-2 所示，若极限

$$\lim_{t\to0^+}\frac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

存在，则称此极限为函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 沿方向 l 的**方向导数**，记作 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}$.

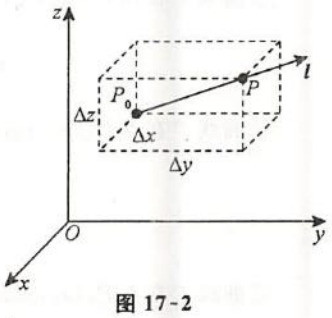


图 17-2

定理(方向导数的计算公式) 设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微分，则 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 处沿任一方向 l 的方向导数都存在，且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=u'_x(P_0)\cos\alpha+u'_y(P_0)\cos\beta+u'_z(P_0)\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦.

【注】 对于二元函数 $f(x,y)$ 的情况与三元函数类似.

2. 梯度

在一个数量场中，函数在给定点处沿不同的方向，其方向导数一般是不相同的，现在我们所关心的是沿哪一个方向其方向导数最大？最大值是多少？函数在点 P 沿哪一方向增加的速度最快？为此引进一个很重要的概念——梯度.

定义 2　设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处具有一阶偏导数，则定义

$$\mathbf{grad}\ u\Big|_{P_0}=(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0))$$

为函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 处的**梯度**.

3. 方向导数与梯度的关系

由方向导数的计算公式 $\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}=u'_x(P_0)\cos\alpha+u'_y(P_0)\cos\beta+u'_z(P_0)\cos\gamma$ 与梯度的定义

$$\mathbf{grad}\ u\Big|_{P_0}=(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0)),$$

可得到

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}=(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0))\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\mathbf{grad}\ u\Big|_{P_0}\cdot l^\circ$$

$$=\Big|\mathbf{grad}\ u\Big|_{P_0}\Big||l^\circ|\cos\theta=\Big|\mathbf{grad}\ u\Big|_{P_0}\Big|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\mathbf{grad}\ u\Big|_{P_0}$ 与 l° 的夹角，当 $\cos\theta=1$ 时，$\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}$ 有最大值.

结论　函数在某点的梯度是一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，而它的模为方向导数的最大值.

4. 散度与旋度

设向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，则

散度

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

旋度

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

基础例题精解

例 17.1　设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$_____.

解　应填 4.

$$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$$

$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$$

$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4.$$

例 17.2　设直线 $L:\begin{cases}x+y+b=0,\\ x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 a,b 的值.

分析　首先求出与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$ 的切平面 π 的方程，进一步可将 L 代入切平面 π 的方程，求出 a,b 的值.

解　在点 $(1,-2,5)$ 处曲面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-4,-1)$，故切平面 π 的方程为

$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0,$$

即 $$2x-4y-z-5=0. \qquad (*)$$

由直线方程 $L:\begin{cases}x+y+b=0,\\ x+ay-z-3=0,\end{cases}$ 解得 $y=-x-b, z=x-3-a(x+b)$. 将其代入(*)式,得

$$(5+a)x+4b+ab-2=0,$$

因而有 $5+a=0, 4b+ab-2=0$,解得 $a=-5, b=-2$.

例 17.3 求曲线 $\begin{cases}(x+2)^2-z^2=4,\\ (x-2)^2+y^2=4\end{cases}$ 在 yOz 平面上的投影曲线方程.

解 两方程消去 x 即得投影柱面,再与 $x=0$ 联立便得投影于 yOz 平面的投影曲线方程.

两式相减,便得 $x=\dfrac{y^2+z^2}{8}$,代入第一式(或第二式)便得

$$\frac{(y^2+z^2+16)^2}{64}-z^2=4,$$

化简后得 $(y^2+z^2)^2+32(y^2-z^2)=0$,因而在 yOz 平面上的投影曲线为双纽线:

$$\begin{cases}(y^2+z^2)^2=32(z^2-y^2),\\ x=0.\end{cases}$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

例 17.4 求直线 $L:\begin{cases}x-y+2z-1=0,\\ x-3y-2z+1=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面方程.

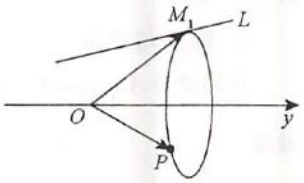


图 17-3

解 如图 17-3 所示,在直线 L 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,则过 M_1 的纬圆上任一点 $P(x,y,z)$ 满足条件 $|\overrightarrow{OM_1}|=|\overrightarrow{OP}|$,且 $y=y_1$.

于是由 $x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$,得 $x^2+z^2=x_1^2+z_1^2$.

由 L 的方程解出 $x_1=2y_1, z_1=-\dfrac{1}{2}(y_1-1)$,即 $x_1=2y, z_1=-\dfrac{1}{2}(y-1)$. 于是旋转曲面方程为

$$x^2+z^2=(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2,\text{即 } 4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

例 17.5 求空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=\int_0^t e^u\cos u\,du,\\ y=2\sin t+\cos t,\\ z=1+e^{3t}\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程和法平面方程.

解 当 $t=0$ 时,$x=0, y=1, z=2$;由 $x'=e^t\cos t, y'=2\cos t-\sin t, z'=3e^{3t}$,得 $x'(0)=1, y'(0)=2, z'(0)=3$.

于是,切线方程为 $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$;法平面方程为 $x+2(y-1)+3(z-2)=0$,即 $x+2y+3z-8=0$.

例 17.6 求函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿点 $P(1,0)$ 指向点 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数.

解 由题意可知方向 l 即为 $\overrightarrow{PQ}=(1,-1)$,故 x 轴到方向 l 的转角 $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$. 由于

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\left.e^{2y}\right|_{(1,0)}=1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\left.2xe^{2y}\right|_{(1,0)}=2,$$

故所求方向导数 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,0)}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例 17.7 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}\,u\big|_M=$_____.

解　应填$\frac{2}{9}(1,2,-2)$.

由已知，得$u'_x\Big|_M=\frac{2}{9},u'_y\Big|_M=\frac{4}{9},u'_z\Big|_M=-\frac{4}{9}$，则$\mathbf{grad}\ u\Big|_M=\left(u'_x\Big|_M,u'_y\Big|_M,u'_z\Big|_M\right)=\frac{2}{9}(1,2,-2)$.

例 17.8　向量场$\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+ye^x\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$在点$P(1,1,0)$处的散度$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=$_____.

解　应填 2.

由散度计算公式
$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$
其中$\boldsymbol{u}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，得
$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}\Big|_P=\left(y^2+e^x+\frac{2xz}{1+z^2}\right)\Big|_{(1,1,0)}=1+1=2.$$

例 17.9　设$\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$，则$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{F}(1,1,0)=$_____.

解　应填$\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$.

三元向量函数$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$，则
$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix},$$
这里$P=xy,Q=-yz,R=zx$，于是
$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{F}(1,1,0)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ xy&-yz&zx\end{vmatrix}_{(1,1,0)}=(y\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k})\Big|_{(1,1,0)}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

基础习题精练

习题

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

17.1　与两直线
$$\begin{cases}x=1,\\ y=-1+t,\end{cases}\quad\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$$
$$\begin{cases}z=2+t,\end{cases}$$
都平行，且过原点的平面方程为_____.

17.2　求旋转抛物面$z=x^2+y^2-1$在点$(2,1,4)$处的切平面及法线方程.

17.3　求曲面$z-e^z+2xy=3$在点$(1,2,0)$处的切平面及法线方程.

17.4　求直线$l:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$在平面$\pi:x-y+2z-1=0$上的投影直线$l_0$的方程，并求$l_0$绕$y$轴旋转一周所成曲面的方程.

17.5　函数$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点$A(1,0,1)$处沿点A指向点$B(3,-2,2)$方向的方向导数为_____.

解答

17.1 $x-y+z=0$ **解** 所求平面法向量可取为

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

由题设可知所求平面过原点，则所求平面方程为

$$-1\cdot(x-0)+1\cdot(y-0)-1\cdot(z-0)=0,$$

即

$$x-y+z=0.$$

17.2 **解** 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z-1$，法向量 $\boldsymbol{n}\Big|_{(2,1,4)}=(2x,2y,-1)\Big|_{(2,1,4)}=(4,2,-1)$.

切平面方程为 $4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$，即 $4x+2y-z-6=0$.

法线方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}.$$

17.3 **解** 令 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$，则

$$F_x'\Big|_{(1,2,0)}=2y\Big|_{(1,2,0)}=4,\quad F_y'\Big|_{(1,2,0)}=2x\Big|_{(1,2,0)}=2,\quad F_z'\Big|_{(1,2,0)}=(1-e^z)\Big|_{(1,2,0)}=0.$$

则切平面方程为 $4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0$，即 $2x+y-4=0$.

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{0}.$$

17.4 **解** 设过直线 l,l_0 的平面为 π_1，点 $(1,0,1)$ 在 l 上，所以该点也在平面 π_1 上，于是 π_1 的方程可设为

$$\pi_1:A(x-1)+B(y-0)+C(z-1)=0,$$

π_1 的法向量应与 l 的方向向量垂直，且与平面 π 的法向量垂直，故有

$$A+B-C=0,\quad A-B+2C=0.$$

由此解得 $A:B:C=-1:3:2$. 于是 π_1 的方程为

$$x-3y-2z+1=0,$$

从而 l_0 的方程为

$$l_0:\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0, \end{cases}$$

将 l_0 写成

$$\begin{cases} x=2y, \\ z=-\dfrac{1}{2}(y-1). \end{cases}$$

设 l_0 绕 y 轴旋转一周所成的曲面为 Σ，任取一点 $P(x_P,y_P,z_P)\in\Sigma$，有 $y_P=y$，于是

$$x_P^2+z_P^2=x^2+z^2=(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2=(2y_P)^2+\left[-\frac{1}{2}(y_P-1)\right]^2=\frac{17}{4}y_P^2-\frac{1}{2}y_P+\frac{1}{4}.$$

去掉下角标 P，即得 Σ 的方程为

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

17.5 $\dfrac{1}{2}$ **解** 由公式得 $\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_A=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_A\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_A\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_A\cos\gamma$，方向 $\boldsymbol{l}=\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$，故

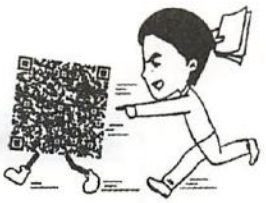
$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\quad \cos\beta=-\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{1}{3}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A=\frac{1}{2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A=\frac{1}{2},$$

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_A=\dfrac{1}{2}$.

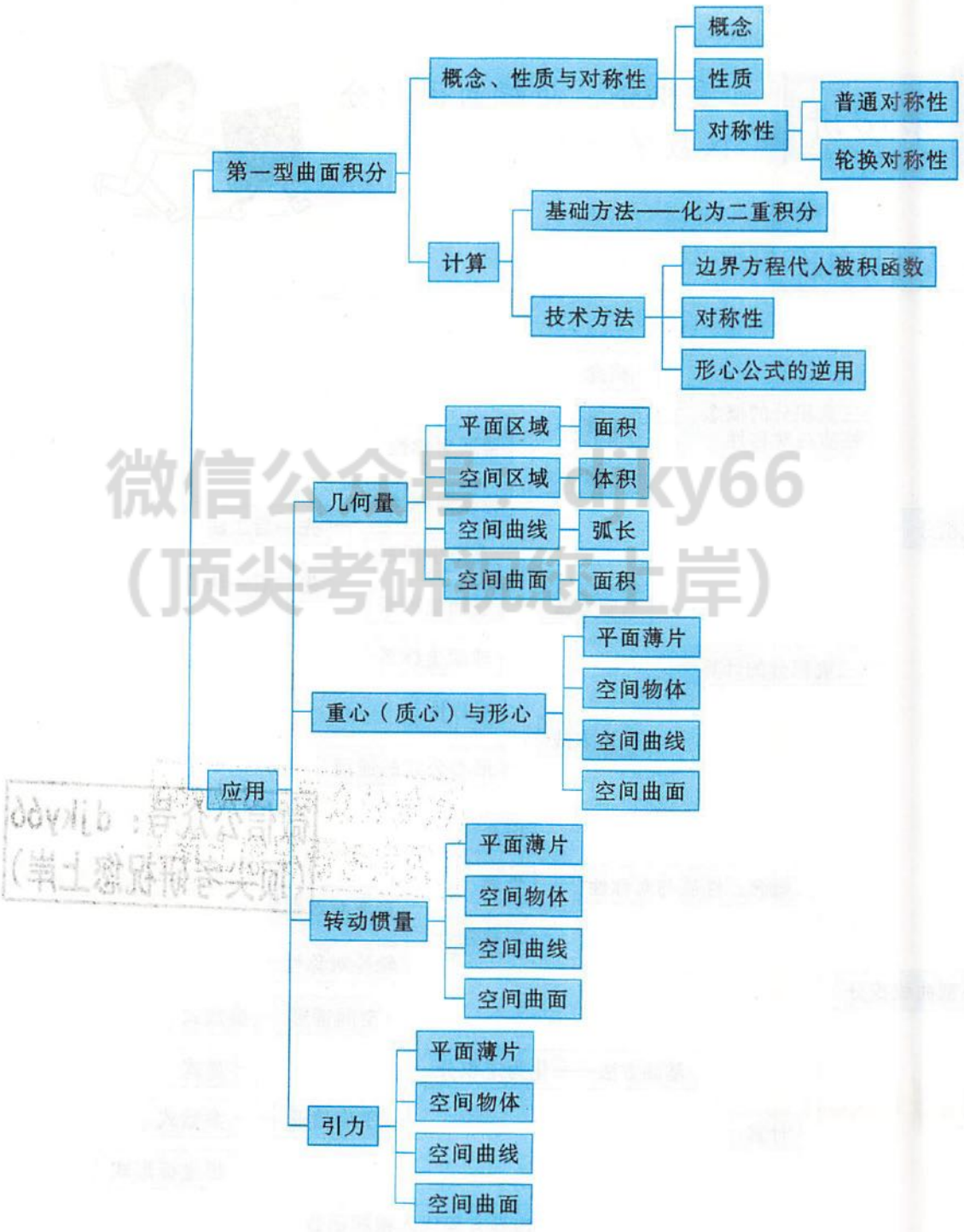
微信公众号：djky66
(顶尖考研物语上岸)

第18讲 三重积分、曲线曲面积分（仅数学一要求）

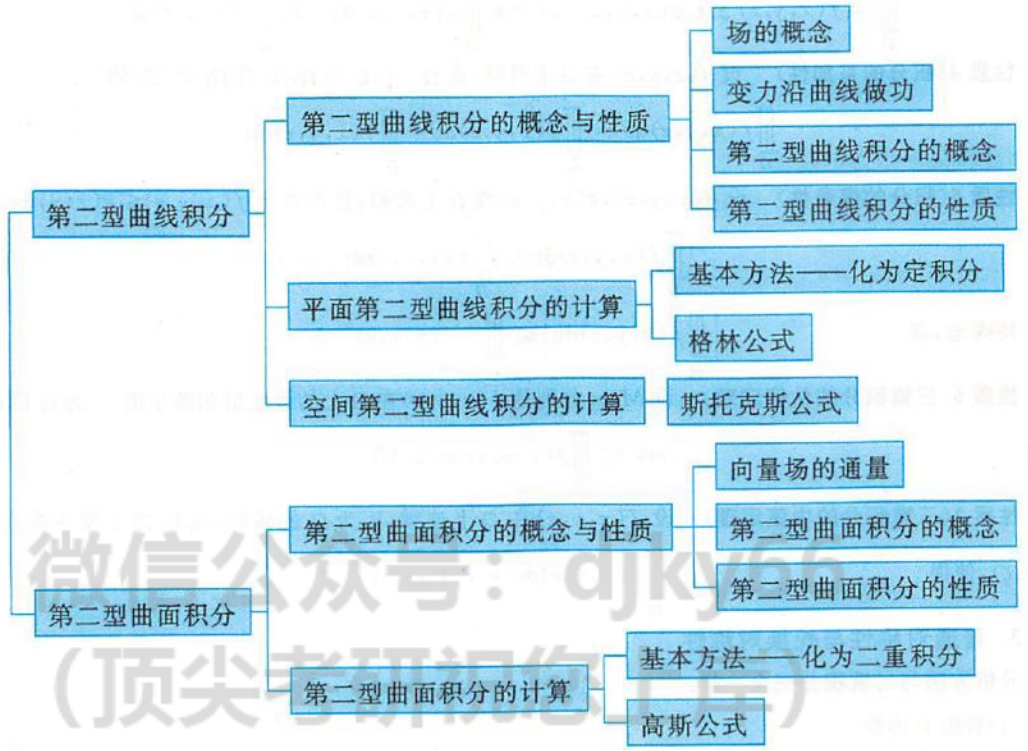


基础知识结构

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）



微信公众号：ky66
（顶尖考研就上岸）



微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

基础内容精讲

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

一、三重积分的概念、性质与对称性

1. 三重积分的概念

由于被积函数 $f(x,y,z)$ 定义在三维空间区域 Ω 上，因此三重积分从几何上来说很抽象. 三重积分表示的是四维空间图形的体积，无法画出图形，但是其物理背景仍然可以被我们所理解，就是以 $f(x,y,z)$ 为点密度的空间物体的质量.

简要说来，前面我们用“分割、近似、求和、取极限”的方法与步骤求出了二维平面上“曲边梯形的面积”（定积分）和三维空间中“曲顶柱体的体积”（二重积分），现在问题上升到了四维空间，我们可以用同样的办法求出“四维空间图形的体积”，这就是三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$. 在考研数学中，一般总假设 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积，即三重积分总是存在的.

2. 三重积分的性质（以下总假设 Ω 为空间有界闭区域）

性质 1（求空间区域的体积） $\iiint_{\Omega} 1\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}v = V$，其中 V 为 Ω 的体积.

性质 2（可积函数必有界） 设 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积，则其在 Ω 上必有界.

性质 3（积分的线性性质） 设 k_1,k_2 为常数，则

$$\iiint_{\Omega}[k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\mathrm{d}v = k_1 \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v \pm k_2 \iiint_{\Omega} g(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

性质 4(积分的可加性) 设 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积,且 $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$,则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v + \iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

性质 5(积分的保号性) 设 $f(x,y,z), g(x,y,z)$ 在 Ω 上可积,且在 Ω 上 $f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$,则有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v \leqslant \iiint_{\Omega} g(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

特殊地,有 $$\left|\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v\right| \leqslant \iiint_{\Omega} |f(x,y,z)|\mathrm{d}v.$$

性质 6(三重积分的估值定理) 设 M, m 分别是 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的最大值和最小值,V 为 Ω 的体积,则有

$$mV \leqslant \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v \leqslant MV.$$

性质 7(三重积分的中值定理) 设 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续,V 为 Ω 的体积,则在 Ω 上至少存在一点 (ξ,η,ζ),使得

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = f(\xi,\eta,\zeta)V.$$

微信公众号:djky66
(祝大考研祝您上岸)

3. 普通对称性与轮换对称性

分析方法与二重积分完全一样.

(1)普通对称性.

假设 Ω 关于 yOz 面对称,则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \begin{cases} 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v, & f(x,y,z) = f(-x,y,z), \\ 0, & f(x,y,z) = -f(-x,y,z), \end{cases}$$

其中 Ω_1 是 Ω 在 yOz 面前面的部分.

关于其他坐标面对称的情况与此类似.

(2)轮换对称性.

若把 x 与 y 对调后,Ω 不变,则 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} f(y,x,z)\mathrm{d}v$,这就是**轮换对称性**.

关于其他情况与此类似.

如 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$,则 $\iiint_{\Omega} f(x)\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} f(y)\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} f(z)\mathrm{d}v$ 可以化简计算.

具体应用见后面的例子.

二、三重积分的计算

(一)基础方法

1. 直角坐标系

(1)先一后二法(先 z 后 xy 法,也叫投影穿线法).

①适用场合.

Ω 有下曲面 $z = z_1(x,y)$、上曲面 $z = z_2(x,y)$,无侧面或侧面为柱面,如图 18-1 所示.

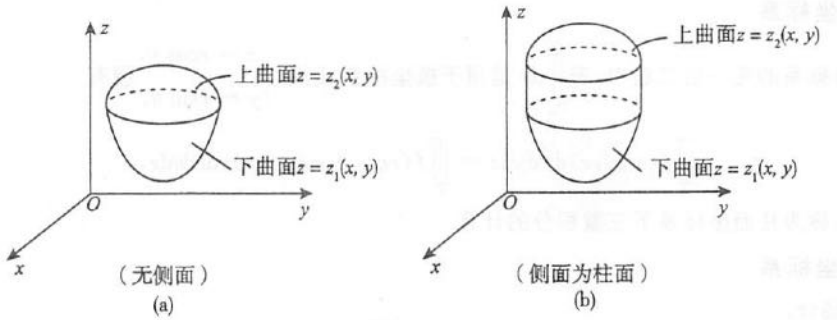


图 18-1

②计算方法.

如图 18-2 所示，有 $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

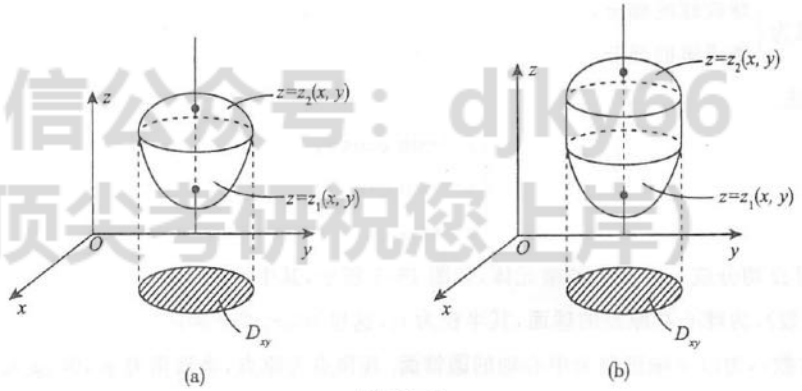


图 18-2

(2)先二后一法(先 xy 后 z 法，也叫定限截面法).

①适用场合.

Ω 是旋转体，其旋转曲面方程为 $\Sigma:z=z(x,y)$，如图 18-3 所示.

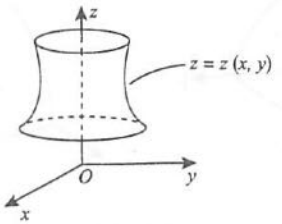


图 18-3

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

②计算方法.

如图 18-4 所示，有 $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_a^b\mathrm{d}z\iint_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma.$$

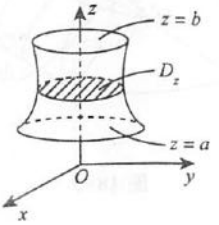


图 18-4

2. 柱面坐标系

在直角坐标系的先一后二法中，若$\iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}\sigma$适用于极坐标系，则令$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$便有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,$$

此种计算方法称为柱面坐标系下三重积分的计算.

3. 球面坐标系

(1)适用场合.

何时用球面坐标法?

①被积函数中含$\begin{cases} f(x^2+y^2+z^2), \\ f(x^2+y^2). \end{cases}$

②积分区域为$\begin{cases} \text{球或球的部分}, \\ \text{锥或锥的部分}. \end{cases}$

微信公众号：diky66
(顶尖考研视频上岸)

(2)计算方法.

令$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$

用三族面将空间Ω切分成一个一个的微元体，如图 18-5 所示，其中

①$r = r_0$(常数)，为球心在原点的**球面**，其半径为r_0，这里$0 \leqslant r_0 < +\infty$；

②$\varphi = \varphi_0$(常数)，为以z轴正向为中心轴的**圆锥面**. 其顶点为原点，半顶角为φ_0，$0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi$；

③$\theta = \theta_0$(常数)，为过z轴的**半平面**，其与xOz面正向夹角为θ_0，$0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi$.

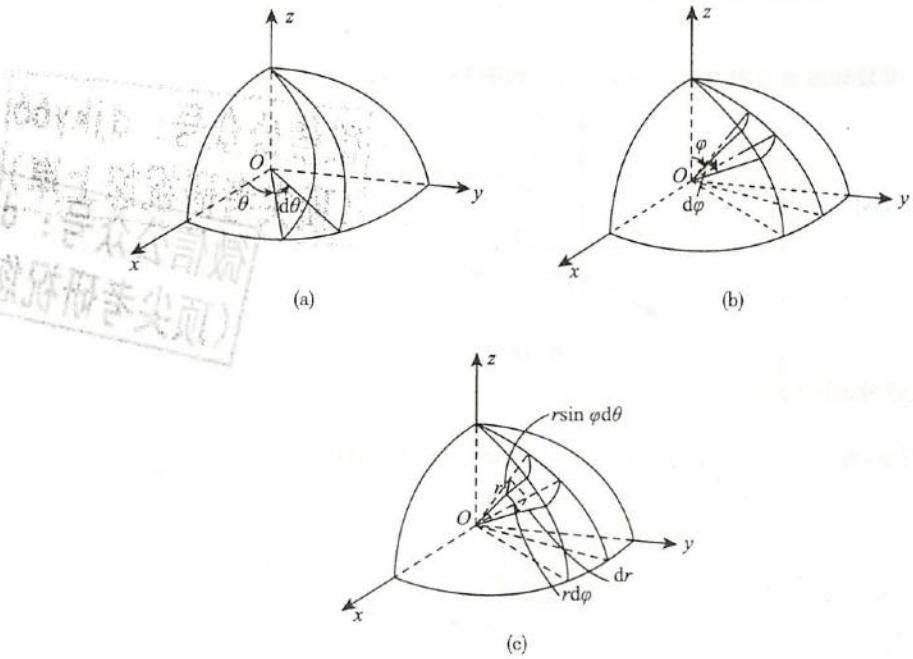


图 18-5

此微元体近似为长方体，其三组边界面分别为：以原点为圆心，半径为 r 与 $r+\mathrm{d}r$ 的球面；以 z 轴为中心轴，半顶角为 φ 与 $\varphi+\mathrm{d}\varphi$ 的圆锥面；过 z 轴且与 xOz 面正向夹角为 θ 与 $\theta+\mathrm{d}\theta$ 的半平面. 它的体积微元即为三个边长 $\mathrm{d}r$，$r\mathrm{d}\varphi$ 与 $r\sin\varphi\mathrm{d}\theta$ 的乘积，即 $\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$.

于是球面坐标系下三重积分的计算公式就写成

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r.$$

【注】　怎样定限？

①从原点出发画一条半射线（取值范围$[0,+\infty)$）$\begin{cases}\text{先碰到 }\Omega\text{，记 }r_1(\varphi,\theta),\\ \text{后离开 }\Omega\text{，记 }r_2(\varphi,\theta).\end{cases}$

②顶点在原点，以 z 轴为中心轴的圆锥面半顶角（取值范围$[0,\pi]$）$\begin{cases}\text{先碰到 }\Omega\text{，记 }\varphi_1(\theta),\\ \text{后离开 }\Omega\text{，记 }\varphi_2(\theta).\end{cases}$

③过 z 轴的半平面（取值范围$[0,2\pi]$）$\begin{cases}\text{先碰到 }\Omega\text{，记 }\theta_1,\\ \text{后离开 }\Omega\text{，记 }\theta_2.\end{cases}$

则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（二）技术方法

①对称性（包括普通对称性和轮换对称性）；

②形心公式的逆用（由 $\bar{x}=\dfrac{\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}v}{\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v}\Rightarrow\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}v=\bar{x}\cdot V$，其中 V 为 Ω 的体积）.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

三、第一型曲线积分的概念、性质与对称性

为表述方便，除特殊说明外，以下仅讨论空间情况，平面情况比较简单.

1. 第一型曲线积分的概念

第一型曲线积分的被积函数 $f(x,y)$（或 $f(x,y,z)$）定义在平面曲线 L（或空间曲线 Γ）上，其物理背景是以 $f(x,y)$（或 $f(x,y,z)$）为线密度的**平面（或空间）物质曲线的质量**. 与前面类似，我们仍然可以用“分割、近似、求和、取极限”的方法与步骤写出第一型曲线积分

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\left(\text{或}\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s\right).$$

但事实上，如果仅理解到此，还是不够的，不妨把定积分和第一型曲线积分放在一起做个对比，以加深我们对概念的理解.

定积分定义在“直线段”上，而第一型曲线积分定义在“曲线段”上.

在考研数学中，一般总假设 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上可积，即第一型曲线积分总是存在的.

2. 第一型曲线积分的性质(以下总假设 Γ 为空间有限长分段光滑曲线)

性质 1(求空间曲线的长度(弧长)) $\int_\Gamma 1\mathrm{d}s = l_\Gamma$,其中 l_Γ 为 Γ 的长度.

性质 2(可积函数必有界) 设 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上可积,则其在 Γ 上必有界.

性质 3(积分的线性性质) 设 k_1,k_2 为常数,则

$$\int_\Gamma [k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\mathrm{d}s = k_1\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s \pm k_2\int_\Gamma g(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

性质 4(积分的可加性) 设 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上可积,且 $\Gamma_1\cup\Gamma_2=\Gamma$,$\Gamma_1\cap\Gamma_2=\varnothing$,则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

性质 5(积分的保号性) 设 $f(x,y,z),g(x,y,z)$ 在 Γ 上可积,且在 Γ 上 $f(x,y,z)\leqslant g(x,y,z)$,则有

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s \leqslant \int_\Gamma g(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

特殊地,有 $$\left|\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_\Gamma |f(x,y,z)|\mathrm{d}s.$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研陪您上岸)

性质 6(第一型曲线积分的估值定理) 设 M,m 分别是 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上的最大值和最小值,l_Γ 为 Γ 的长度,则有 $$ml_\Gamma \leqslant \int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s \leqslant Ml_\Gamma.$$

性质 7(第一型曲线积分的中值定理) 设 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上连续,l_Γ 为 Γ 的长度,则在 Γ 上至少存在一点 (ξ,η,ζ),使得 $$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = f(\xi,\eta,\zeta)l_\Gamma.$$

3. 普通对称性与轮换对称性

分析方法与二、三重积分完全一样.

(1)普通对称性.

假设 Γ 关于 yOz 面对称,则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}s, & f(x,y,z) = f(-x,y,z), \\ 0, & f(x,y,z) = -f(-x,y,z), \end{cases}$$

其中 Γ_1 是 Γ 在 yOz 面前面的部分.

关于其他坐标面对称的情况与此类似.

(2)轮换对称性.

若把 x 与 y 对调后,Γ 不变,则 $\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_\Gamma f(y,x,z)\mathrm{d}s$,这就是**轮换对称性**.

关于其他情况与此类似.

具体应用见后面的例子.

四、第一型曲线积分的计算

(一)基础方法——化为定积分

由于第一型曲线积分就是由定积分推广而来的,因此计算第一型曲线积分的基本方法就是将其化为定积分.

1. 对于空间情形

若空间曲线 Γ 由参数式 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出，则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,$$

且
$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. 对于平面情形

(1)若平面曲线 L 由 $y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$给出，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$，且

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

(2)若平面曲线 L 由参数式 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$，且

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

(3)若平面曲线 L 由极坐标形式 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$，且

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta]\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（二）技术方法

①边界方程代入被积函数（由于被积函数就定义在边界方程上，因此可以把边界方程的表达式代入到被积函数中，从而达到简化计算的目的）；

②对称性（包括普通对称性和轮换对称性）；

③形心公式的逆用（由 $\bar{x}=\dfrac{\int_\Gamma x\mathrm{d}s}{\int_\Gamma \mathrm{d}s}\Rightarrow\int_\Gamma x\mathrm{d}s=\bar{x}\cdot l_\Gamma$，其中 l_Γ 为 Γ 的长度）.

五、第一型曲面积分的概念、性质与对称性

微信公众号：djky
（顶尖考研祝您上岸）

1. 第一型曲面积分的概念

由于被积函数 $f(x,y,z)$ 定义在空间曲面 Σ 上，故第一型曲面积分的物理背景是以 $f(x,y,z)$ 为面密度的**空间物质曲面的质量**. 与前面类似，我们可以用“分割、近似、求和、取极限”的方法与步骤写出第一型曲面积分

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

如前面所述，仅理解到此是不够的，不妨把二重积分和第一型曲面积分放在一起做个对比，以加深我们对概念的理解.

二重积分定义在“二维平面”上，而第一型曲面积分定义在“空间曲面”上.

在考研数学中，一般总假设 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上可积，即第一型曲面积分总是存在的.

2. 第一型曲面积分的性质（以下总假设 Σ 为空间有限分片光滑曲面）

性质 1（求空间曲面的面积） $\iint_\Sigma 1\mathrm{d}S=S$，其中 S 为 Σ 的面积.

性质2(可积函数必有界) 当 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上可积时,则其在 Σ 上必有界.

性质3(积分的线性性质) 设 k_1,k_2 为常数,则

$$\iint_{\Sigma}[k_1f(x,y,z)\pm k_2g(x,y,z)]\mathrm{d}S=k_1\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S\pm k_2\iint_{\Sigma}g(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

性质4(积分的可加性) 设 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上可积,且 $\Sigma_1\cup\Sigma_2=\Sigma,\Sigma_1\cap\Sigma_2=\varnothing$,则

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

性质5(积分的保号性) 当 $f(x,y,z),g(x,y,z)$ 在 Σ 上可积,且在 Σ 上 $f(x,y,z)\leqslant g(x,y,z)$,则有

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S\leqslant\iint_{\Sigma}g(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

特殊地,有

$$\left|\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S\right|\leqslant\iint_{\Sigma}|f(x,y,z)|\mathrm{d}S.$$

性质6(第一型曲面积分的估值定理) 设 M,m 分别是 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上的最大值和最小值,S 为 Σ 的面积,则有

$$mS\leqslant\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S\leqslant MS.$$

性质7(第一型曲面积分的中值定理) 设 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续,S 为 Σ 的面积,则在 Σ 上至少存在一点 (ξ,η,ζ),使得

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=f(\xi,\eta,\zeta)S.$$

微信公众号 dlky66
(顶尖考研祝您上岸)

3. 普通对称性与轮换对称性

分析方法与二、三重积分和第一型曲线积分完全一样.

(1)普通对称性.

假设 Σ 关于 yOz 面对称,则

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}2\iint_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S, & f(x,y,z)=f(-x,y,z),\\ 0, & f(x,y,z)=-f(-x,y,z),\end{cases}$$

其中 Σ_1 是 Σ 在 yOz 面前面的部分.

关于其他坐标面对称的情况与此类似.

(2)轮换对称性.

若把 x 与 y 对调后,Σ 不变,则 $\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}f(y,x,z)\mathrm{d}S$,这就是**轮换对称性**.

关于其他情况与此类似.

具体应用见后面的例子.

六、第一型曲面积分的计算

1. 基础方法——化为二重积分

由于第一型曲面积分就是由二重积分推广而来的,所以计算第一型曲面积分的基本方法就是将其化为二重积分.

无论空间曲面 Σ 是由显式 $z=z(x,y)$ 还是隐式 $F(x,y,z)=0$ 给出的,我们都需要做三件事(无逻辑上的先后顺序,哪件事情最利于解题就先做哪件):

①将 Σ 投影到某一平面（比如 xOy 面）上⇒投影区域为 D（比如 D_{xy}）；

②将 $z=z(x,y)$ 或 $F(x,y,z)=0$ 代入 $f(x,y,z)$；

③计算 z_x'，z_y'⇒$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

这就把第一型曲面积分化成二重积分（如化成关于 x,y 的二重积分），得到

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

化成关于其他变量的二重积分与此类似.

【注】 这里有一点需要特别强调，将 Σ 投影到哪个平面上应该是由你自己决定的，但是 Σ **上的任何两点的投影点不能重合**，换而言之，假如你要将 Σ 投向 xOy 面，则 $z=z(x,y)$ 必须是单值函数. 忘记了这一点，就可能算错结果.

如果将 Σ 投向某一平面，但是曲面投影后有重合点，则

①要么将 Σ 转投向另一个平面，使得曲面投影后无重合点；

②要么将 Σ 分成若干曲面 $\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots$，使得这些曲面各自投影后无重合点.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

2. 技术方法

①边界方程代入被积函数（由于被积函数就定义在边界方程上，因此可以把边界方程的表达式代入到被积函数中，从而达到简化计算的目的）；

②对称性（包括普通对称性和轮换对称性）；

③形心公式的逆用（由 $\bar{x}=\dfrac{\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S}\Rightarrow\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S=\bar{x}\cdot S$，其中 S 为 Σ 的面积）.

七、重积分与第一型线面积分的应用

1. 几何量

（1）对于平面区域，有两种情况：

①若 D 是由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形，则其面积为 $A=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$，其中 $a<b$；

②平面区域 D 的面积为 $A=\iint_D\mathrm{d}\sigma$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（2）对于空间区域，有两种情况：

①以区域 D 为底，曲面 $z=z(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积为 $V=\iint_D|z(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$；

【注】 这种情况是考试重点，常有 $z(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$，也就是这个空间区域是由两个不同的曲面 $\Sigma_1:z_1=f(x,y)$ 和 $\Sigma_2:z_2=g(x,y)$（有时也需要添加一些坐标面）所围成的.

②若 Ω 是物体所占的空间区域，则其体积为 $V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v$.

(3)对于空间光滑曲线 Γ,若其由参数式 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t)\end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出,则计算空间曲线的长度(弧长)的公式为

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

(4)对于光滑曲面薄片 Σ,若 Σ 由单值函数 $z=z(x,y)$ 给出,D_{xy} 为曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域,则其面积

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【注】 同理,在同样保证单值函数的情况下,可向另外两个坐标面投影,得

$$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+(x_y')^2+(x_z')^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\Sigma:x=x(y,z)$,D_{yz} 是曲面在 yOz 面上的投影区域;

$$A=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+(y_z')^2+(y_x')^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

其中 $\Sigma:y=y(x,z)$,D_{zx} 是曲面在 zOx 面上的投影区域.

事实上,曲面面积就是第一型曲面积分的被积函数是 1 时,用投影法所得出的积分,请大家注意这个联系.

微信公众号:dky66
(顶尖考研祝您上岸)

2. 重心(质心)与形心

以下如无特殊说明,均假设 $\rho(x,y)$ 与 $\rho(x,y,z)$ 在所定义的区域上连续.

(1)对于平面薄片,面密度为 $\rho(x,y)$,D 是薄片所占的平面区域,则计算重心 $(\bar{x},\bar{y})$ 的公式为

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_D\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_D\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}.$$

(2)对于空间物体,体密度为 $\rho(x,y,z)$,Ω 是物体所占的空间区域,则计算重心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 的公式为

$$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v}{\iiint_\Omega\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v},\quad \bar{y}=\frac{\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v}{\iiint_\Omega\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v},\quad \bar{z}=\frac{\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v}{\iiint_\Omega\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v}.$$

(3)对于光滑曲线 L,线密度为 $\rho(x,y,z)$,则计算重心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 的公式为

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}{\int_L\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s},\quad \bar{y}=\frac{\int_L y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}{\int_L\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s},\quad \bar{z}=\frac{\int_L z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}{\int_L\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}.$$

(4)对于光滑曲面薄片 Σ,面密度为 $\rho(x,y,z)$,则计算重心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 的公式为

$$\bar{x}=\frac{\iint_\Sigma x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{\iint_\Sigma\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S},\quad \bar{y}=\frac{\iint_\Sigma y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{\iint_\Sigma\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S},\quad \bar{z}=\frac{\iint_\Sigma z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{\iint_\Sigma\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}.$$

【注】 (1)在考研的范畴内，重心就是质心.

(2)当密度 $\rho(x,y)$ 或者 $\rho(x,y,z)$ 为常数时，重心就成了**形心**.

3. 转动惯量

(1)对于平面薄片，面密度为 $\rho(x,y)$，D 是薄片所占的平面区域，则计算该薄片对 x 轴、y 轴和原点 O 的转动惯量 I_x，I_y 和 I_O 公式分别为

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad I_O=\iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(2)对于空间物体，体密度为 $\rho(x,y,z)$，Ω 是物体所占的空间区域，则计算该物体对 x 轴、y 轴、z 轴和原点 O 的转动惯量 I_x，I_y，I_z 和 I_O 公式分别为

$$I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,\quad I_y=\iiint_\Omega (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

$$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,\quad I_O=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

(3)对于光滑曲线 L，线密度为 $\rho(x,y,z)$，则计算该曲线对 x 轴、y 轴、z 轴和原点 O 的转动惯量 I_x，I_y，I_z 和 I_O 公式分别为

$$I_x=\int_L (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,\quad I_y=\int_L (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,$$

$$I_z=\int_L (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,\quad I_O=\int_L (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

(4)对于光滑曲面薄片 Σ，面密度为 $\rho(x,y,z)$，则计算该薄片对 x 轴、y 轴、z 轴和原点 O 的转动惯量 I_x，I_y，I_z 和 I_O 公式分别为

$$I_x=\iint_\Sigma (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S,\quad I_y=\iint_\Sigma (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

$$I_z=\iint_\Sigma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S,\quad I_O=\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

4. 引力

(1)对于 xOy 面上一平面薄片，面密度为 $\rho(x,y)$，D 是薄片所占的平面区域，则计算该薄片对点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的质量为 m 的质点的引力 (F_x,F_y,F_z) 公式为

$$F_x=Gm\iint_D \frac{\rho(x,y)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma,$$

$$F_y=Gm\iint_D \frac{\rho(x,y)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma,$$

$$F_z=-z_0Gm\iint_D \frac{\rho(x,y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma.$$

其中 G 为引力常量，下同.

(2)对于空间物体，体密度为 $\rho(x,y,z)$，Ω 是物体所占的空间区域，则计算该物体对点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的质量为 m 的质点的引力 (F_x,F_y,F_z) 公式为

$$F_x=Gm\iiint_\Omega \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v,$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

$$F_y = Gm\iiint_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v,$$

$$F_z = Gm\iiint_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v.$$

(3)对于光滑曲线 L,线密度为 $\rho(x,y,z)$,则计算该曲线对点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处的质量为 m 的质点的引力(F_x,F_y,F_z)公式为

$$F_x = Gm\int_L \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}s,$$

$$F_y = Gm\int_L \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}s,$$

$$F_z = Gm\int_L \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}s.$$

(4)对于光滑曲面薄片 Σ,面密度为 $\rho(x,y,z)$,则计算该薄片对点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处的质量为 m 的质点的引力(F_x,F_y,F_z)公式为

$$F_x = Gm\iint_{\Sigma} \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}S,$$

$$F_y = Gm\iint_{\Sigma} \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}S,$$

$$F_z = Gm\iint_{\Sigma} \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}S.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝你上岸)

八、第二型曲线积分的概念与性质

1. 场的概念

什么叫“场”？从数学上说,场就是空间区域 Ω 上的一种对应法则.

(1)如果 Ω 上的每一点 $M(x,y,z)$都对应着一个数量 u,则在 Ω 上就确定了一个数量函数 $u=u(x,y,z)$,它表示一个**数量场**.数量场的例子很多,比如温度场,数量场不讲究方向.

(2)如果 Ω 上的每一点 $M(x,y,z)$都对应着一个向量 $\boldsymbol{F}$,则在 Ω 上就确定了一个向量函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

它表示一个**向量场**.向量场的例子也很多,比如引力场,向量场讲究方向.

2. 变力沿曲线做功

在一个向量场——变力场中,设某质点在变力 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$作用下,沿着有向曲线 Γ 从起点 A 移动到终点 B,总共做了多少功？(这个物理背景请大家熟记,考研中出过基于这种背景的考题.)

设沿着有向曲线 Γ 在 $M(x,y,z)$点移动了一个微位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$,将变力 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$近似看作常力,则力在此微位移上的微功 $\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,于是变力 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$沿着有向曲线 Γ 从起点 A 移动到终点 B 所做的总功为

$$W=\int_{\Gamma}\mathrm{d}W=\int_{\Gamma}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\Gamma}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$$

$$=\int_{\Gamma}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

于是我们就引出了第二型曲线积分的概念.

3. 第二型曲线积分的概念

第二型曲线积分的被积函数 $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$（或 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$）定义在平面有向曲线 L（或空间有向曲线 Γ）上，其物理背景是变力 $\boldsymbol{F}(x,y)$（或 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$）在平面曲线 L（或空间曲线 Γ）上从起点移动到终点所做的总功：

$$\int_{L}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\ (\text{或}\int_{\Gamma}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z).$$

由此可以看出，前面所学的定积分、二重积分、三重积分和第一型曲线积分有着完全一致的背景，都是一个**数量函数在定义区域上计算几何量**（面积、体积等），但是第二型曲线积分与之不同，它是一个**向量函数沿有向曲线的积分**（无几何量可言）. 于是，有些性质和计算方法都不一样了，一定要加以对比，理解它们的区别和联系，不要用错或者用混了.

4. 第二型曲线积分的性质（以下总假设 Γ 为空间有限长分段光滑曲线）

性质 1（积分的线性性质）　设 k_1,k_2 为常数，则 $\int_{\Gamma}(k_1\boldsymbol{F}_1\pm k_2\boldsymbol{F}_2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=k_1\int_{\Gamma}\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\pm k_2\int_{\Gamma}\boldsymbol{F}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

性质 2（积分的有向性）　$\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_{\overset{\frown}{BA}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

性质 3（积分的可加性）　当 $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}$ 时，$\int_{\overset{\frown}{AC}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{\overset{\frown}{BC}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

九、平面第二型曲线积分的计算

先做个说明，由于空间第二型曲线积分的经典计算方法与第二型曲面积分有着密切的联系，故放在后面去讨论，本部分只讨论平面第二型曲线积分的计算问题.

1. 基本方法——化为定积分

如果平面有向曲线 L 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}(t:\alpha\to\beta)$ 给出，其中 $t=\alpha$ 对应着起点 A，$t=\beta$ 对应着终点 B，则可以将平面第二型曲线积分化为定积分：

$$\int_{L}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[x(t),y(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t,$$

这里的 α,β 谁大谁小无关紧要，关键是分别和起点与终点对应.

格林
(1793－1841)

2. 格林公式

格林公式　设平面有界闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成，$P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，L 取正向，则

$$\oint_{L}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

如图 18-6 所示，所谓 L 取正向，是指当一个人沿着 L 的这个方向前进时，**左手始终在 L 所围成的区域 D 内**. 试想一下假如你在学校的环形操场上跑步，你的左手始终在草坪中，这就是逆时针，说明你跑的方向是正向.

考试要点 一般来说，考试题目不可能直接满足能够使用格林公式的条件，命题人可以“破坏”两种条件：

(1)L 不是封闭曲线，也就是没有围成一个平面有界闭区域 D；

(2)即使 L 围成了一个平面有界闭区域 D，但是 $P(x,y),Q(x,y),\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 上不连续.

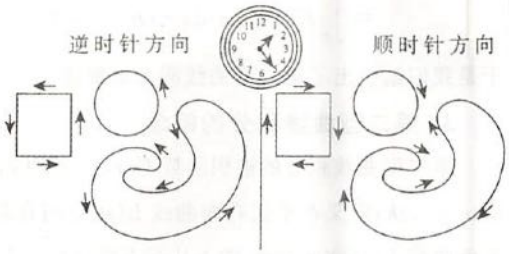


图 18-6

这两种情况下，不可以直接使用格林公式.

针对(1)，我们可以采取“补线法”，补上一条或者若干条线，围出一个平面有界闭区域 D，就可以用格林公式了.

针对(2)，我们可以采取“挖去法”，把不连续点(称为“奇点”)挖去，使条件得以满足，从而使用格林公式.

十、第二型曲面积分的概念与性质

微信公众号：djky66
(张宇考研祝您上岸)

1. 向量场的通量

简单回顾一下向量场的概念. 如果 Ω 上的每一点 $M(x,y,z)$ 都对应着一个向量 $\boldsymbol{F}$，则在 Ω 上就确定了一个向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，它表示一个**向量场**.

在一个向量场(比如电场、磁场或者某种不可压缩流体的速度场)中，Σ 为该场中的某一有向分片光滑曲面，并指定了曲面的外侧，则向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 通过曲面 Σ 的通量(比如电场中的电通量，磁场中的磁通量，或者某流体的流量)为 $\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}^{\circ}\mathrm{d}S$，其中 $\boldsymbol{n}^{\circ}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是有向曲面 Σ 在指定侧的单位法向量，且由 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$，得

$$\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是就引出了第二型曲面积分的概念.

2. 第二型曲面积分的概念

第二型曲面积分的被积函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 定义在光滑的空间有向曲面 Σ 上，其物理背景是向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 通过曲面 Σ 的通量：

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由此可以看出，第二型曲面积分是一个**向量函数**通过某有向曲面的通量(无几何量可言). 要加强和前面所学积分的横向对比，理解它们的区别和联系，不要用错或者用混了.

3. 第二型曲面积分的性质(以下总假设 Σ 是有向分片光滑曲面)

性质 1(积分的线性性质) 设 k_1,k_2 为常数，则 $\iint\limits_{\Sigma}(k_1\boldsymbol{F}_1\pm k_2\boldsymbol{F}_2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=k_1\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\pm k_2\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

性质 2(积分的方向性) $\iint\limits_{\Sigma^-}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint\limits_{\Sigma^+}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中 Σ^- 为 Σ^+ 的另一侧.

性质 3(积分的可加性) 当 $\Sigma_1\cup\Sigma_2=\Sigma,\Sigma_1\cap\Sigma_2=\varnothing$ 时，$\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{\Sigma_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint\limits_{\Sigma_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

十一、第二型曲面积分的计算

1. 基本方法——化为二重积分

对于第二型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，可以将其拆成三个积分：$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，分别投影到相应的坐标面上，化为二重积分计算，再相加. 直观上，我们习惯投影到 xOy 面上，所以以 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为例.

无论空间曲面 Σ 是由显式 $z=z(x,y)$ 还是隐式 $F(x,y,z)=0$ 给出的，我们都需要做三件事（无逻辑上的先后顺序，哪件事情最利于解题就先做哪件）：

(1)将 Σ 投影到某一平面（比如 xOy 面）上⇒投影区域为 D（比如 D_{xy}）；

(2)将 $z=z(x,y)$ 或者 $F(x,y,z)=0$ 代入 $R(x,y,z)$；

(3)将 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写成“$\pm\mathrm{d}x\mathrm{d}y$”，其中 Σ 方向向上（即法向量与 z 轴夹角为锐角）时取“+”，否则取“−”.

这就把第二型曲面积分化为了二重积分，得到

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

同样需要指出的是，投影时 Σ 上的任何两点的投影点不能重合.

2. 高斯公式

高斯公式 设空间有界闭区域 Ω 由有向分片光滑封闭曲面 Σ 围成，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有公式

$$\oiint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v,$$

其中，Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧.

高斯
(1777—1855)

考试要点 一般来说，考试题目不可能直接满足能够使用高斯公式的条件，命题人可以“破坏”两种条件：

(1)Σ 不是封闭曲面，也就是没有围成一个空间有界闭区域 Ω；

(2)即使 Σ 围成了一个空间有界闭区域 Ω，但是 $P,Q,R,\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$ 在 Ω 上不连续.

这两种情况下，不可以直接使用高斯公式.

针对(1)，我们可以采取“补面法”，补上一片或者若干片曲面，围出一个空间有界闭区域 Ω，就可以用高斯公式了.

针对(2)，我们可以采取“挖去法”，把不连续点（称为“奇点”）挖去，使条件得以满足，从而可以使用高斯公式.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

十二、空间第二型曲线积分的计算

斯托克斯公式 设 Ω 为空间某区域，Σ 为 Ω 内的分片光滑有向曲面片，Γ 为逐段光滑的 Σ 的边界，它

的方向与 Σ 的法向量成右手系，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 与 $R(x,y,z)$ 在 Ω 内具有连续的一阶偏导数，则有斯托克斯公式：

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S.$$

【注】 可以证明(这里不证)，公式的成立与绷在 Γ 上的曲面大小、形状无关，如图 18-7 所示，有 $\oint_{\Gamma}=\iint_{\Sigma_1}=\iint_{\Sigma_2}$. 其中 $\boldsymbol{n}^{\circ}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 Σ 的单位外法线向量.

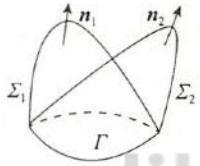


图 18-7

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础例题精解

一、三重积分

1. 直角坐标系与柱面坐标系下的计算

例 18.1 计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 是由平面 $x=0,y=0,z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体.

解 如图 18-8 所示，Ω 有下曲面(平面)$z=0$ 与上曲面(平面)$z=1-x-y$，其侧面为柱面，故可用先一后二法.

$$I=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x-3}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

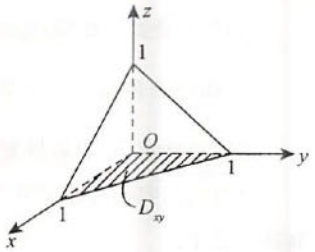


图 18-8

例 18.2 计算 $\iiint_{\Omega}\mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}v$，其中 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

解 被积函数仅为 z 的函数，截面 D_z 为圆域 $x^2+y^2\leqslant 1-z^2$，故采用先二后一法. 这里 Ω' 表示上半球面.

$$\iiint_{\Omega}\mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}v=2\iiint_{\Omega'}\mathrm{e}^{z}\mathrm{d}v=2\int_0^1\left(\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{e}^{z}\mathrm{d}z$$

$$= 2\int_0^1 \pi(1-z^2)e^z dz = 2\pi.$$

【注】　一般来说，如果被积函数只依赖于一个变量，如 $f(x,y,z)=g(z)$，并假设当 z 等于常数的平面与 Ω 相截时，其截面面积易求，则可采用将三重积分化为先二重积分后定积分的计算方法.

设在 Ω 中 z 的最小值为 c_1，最大值为 c_2，用 $z=k$ 的平面与 Ω 相截，截得曲面在 xOy 面上的投影为 D_z，其面积为 A_z，则

$$\iiint_\Omega g(z)dv = \int_{c_1}^{c_2} g(z)dz \iint_{D_z} dxdy = \int_{c_1}^{c_2} g(z)A_z dz.$$

例 18.3　计算 $I=\iiint_\Omega (x^2+y^2)dv$，其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

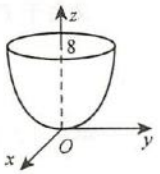


图 18-9

解　旋转曲面的方程为 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$，如图 18-9 所示，有

$$I=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 rdr \int_{\frac{r^2}{2}}^8 r^2 dz = 2\pi \int_0^4 r^3\left(8-\frac{r^2}{2}\right)dr = \frac{1\,024}{3}\pi.$$

或　$$I=\int_0^8 dz \iint_{x^2+y^2\leqslant 2z} (x^2+y^2)dxdy = \int_0^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^3 dr = \frac{1\,024}{3}\pi.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

2. 利用球面坐标系计算三重积分

例 18.4　计算三重积分 $\iiint_\Omega (x^2+y^2)dv$，其中 Ω 是右半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(y\geqslant 0, a>0)$ 与 xOz 面所围成的区域.

解　在球面坐标系下，积分区域可以表示为

$$\Omega=\{0\leqslant r\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\},$$

所以 $$\iiint_\Omega (x^2+y^2)dv = \iiint_\Omega r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr d\theta d\varphi = \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^a r^4\sin^3\varphi dr = \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi \sin^3\varphi\left(\frac{1}{5}r^5\right)\Big|_0^a d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{5}a^5\int_0^\pi \sin^3\varphi d\varphi = \frac{4}{15}\pi a^5.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

3. 利用技术性工具计算三重积分

例 18.5　设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，求 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$.

解　由轮换对称性可知，$\iiint_\Omega z^2dxdydz = \iiint_\Omega x^2dxdydz = \iiint_\Omega y^2dxdydz$，所以

$$\iiint_\Omega z^2dxdydz = \frac{1}{3}\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 r^4\sin\varphi dr$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{4\pi}{15}.$$

二、第一型曲线积分

例 18.6 计算$\oint_\Gamma |y|\,ds$,其中Γ为球面$x^2+y^2+z^2=2$与平面$x=y$的交线.

解 因为球面$x^2+y^2+z^2=2$与平面$x=y$的交线是一个大圆,由对称性可知,

$$\oint_\Gamma |y|\,ds = 4\int_{\Gamma_1} |y|\,ds,$$

其中Γ_1是Γ在第一卦限的部分.

又由于Γ的参数方程为$x=y=\cos t, z=\sqrt{2}\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$,则

$$ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt=\sqrt{2}dt.$$

故$\oint_\Gamma |y|\,ds = 4\int_{\Gamma_1} |y|\,ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cos t\,dt = 4\sqrt{2}.$

例 18.7 设空间曲线Γ的方程为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ $(a>0)$,求$I=\oint_\Gamma x^2 ds$.

分析 由于Γ有轮换对称性,利用此性质考虑之,计算更简便.

解 由于Γ有轮换对称性,故

$$\oint_\Gamma x^2 ds = \oint_\Gamma y^2 ds = \oint_\Gamma z^2 ds,$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\left(\oint_\Gamma x^2 ds+\oint_\Gamma y^2 ds+\oint_\Gamma z^2 ds\right) \\ &= \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds = \frac{1}{3}\oint_\Gamma a^2 ds = \frac{a^2}{3}\oint_\Gamma ds. \end{aligned}$$

而$\oint_\Gamma ds$为Γ的弧长,Γ是圆心在点O,半径为a的圆周,所以$\oint_\Gamma ds = 2\pi a$,从而

$$I=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

三、第一型曲面积分

例 18.8 设Σ为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$介于$z=1$与$z=4$之间的部分,则第一型曲面积分$\iint_\Sigma (x+y+z)dS=$_____.

分析 按公式计算便可.计算时,随时注意图形的对称性和被积函数的奇偶性,以简化计算.

解 应填$42\sqrt{2}\pi$.

Σ在xOy面上的投影域$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 16\}$.由$z=\sqrt{x^2+y^2}$,有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

微信公众号:gjky66 (顶尖考研祝您上岸)

所以 $$\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint_{D}(x+y+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}\mathrm{d}\sigma.$$

由于 D 关于 x 轴对称，又关于 y 轴对称，因此

$$\iint_{D}y\mathrm{d}\sigma=0,\quad \iint_{D}x\mathrm{d}\sigma=0,$$

再转化为极坐标，可得

$$\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint_{D}r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^4 r^2\mathrm{d}r=42\sqrt{2}\pi.$$

四、重积分与第一型线面积分的应用

例 18.9　求平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 被三坐标面所截部分 Σ 的面积，其中 $a,b,c>0$.

解　平面方程可以改写为 $z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y$，为单值函数，记 D_{xy} 为 Σ 在 xOy 面上的投影域，则所截部分的面积

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\mathrm{d}\sigma$$
$$=\frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}.$$

例 18.10　求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截部分的面积.

解　联立 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\ z^2=2x,\end{cases}$ 消去 z，得到 $x^2+y^2=2x$，将其投影到 xOy 面上，得区域 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2x\}$，其图形如图 18-10 所示，则所截部分的面积

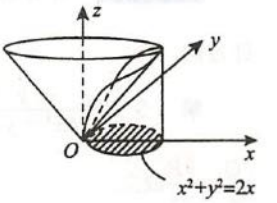


图 18-10

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z_y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，故 $A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\pi$.

例 18.11　设空间物体 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$，求 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}$.

分析　在重心（质心）公式中，当密度 $\rho(x,y)$ 或者 $\rho(x,y,z)$ 为常数时（在公式中分子分母均可以提出常数，然后约分），重心就成为了形心，本题考查空间物体 Ω 的形心公式及其计算.

解　空间物体 Ω 在 xOy 面上的投影域为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$，则

$$\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}\mathrm{d}z=\iint_{D}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2},$$

$$\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint_{D}[1-(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^4)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}.$$

故 $$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v}{\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v}=\frac{2}{3}.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 18.12 由平面图形 $1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转体 Ω，其密度 $\rho(x,y,z)=1$，求该旋转体 Ω 对 x 轴的转动惯量.

解 如图 18-11 所示，有

$$I_x=\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_1^2\mathrm{d}x\iint_{D_x}(y^2+z^2)\cdot 1\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{x}}r^2\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\int_1^2\frac{1}{4}(\sqrt{x})^4\mathrm{d}x=\frac{7\pi}{6}.$$

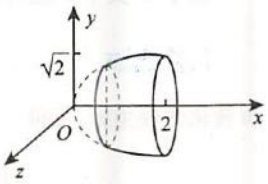


图 18-11

五、平面第二型曲线积分

例 18.13 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|(x\in[-1,1])$，起点是 $(-1,0)$，终点为 $(1,0)$，则曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=$_____.

解 应填 0.

如图 18-12 所示，记 $\overline{L}:y=0(x\in[-1,1])$，起点是 $(1,0)$，终点为 $(-1,0)$，D 是由 L 与 $\overline{L}$ 围成的平面闭区域，利用格林公式及区域 D 关于 y 轴的对称性，得

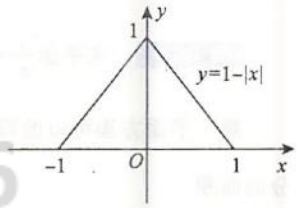


图 18-12

$$\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\oint_{L+\overline{L}}xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y-\int_{\overline{L}}xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=-\iint_D(2x-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0=0.$$

例 18.14 计算曲线积分 $\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为圆心，$R(R>1)$ 为半径的圆周，取逆时针方向.

解 令 $P=\frac{-y}{4x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$，当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，计算可得，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 成立.

记曲线 L 围成的区域为 D，如图 18-13 所示，D 中包含点 $(0,0)$，所以 $P(x,y)$，$Q(x,y)$，$\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在点 $(0,0)$ 处都不连续，这种情况下，不可以直接使用格林公式.

作足够小的椭圆 $C:4x^2+y^2=\delta^2$（使其在 D 内部，$\delta>0$），取逆时针方向.

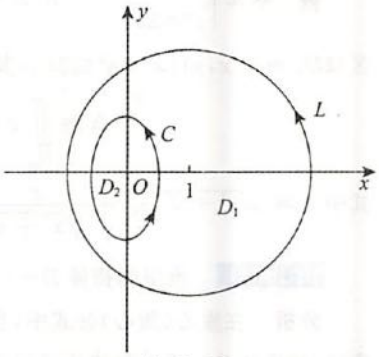


图 18-13

记 C 与 L 围成的区域为 D_1，C 围成的区域为 D_2，由格林公式，

$$I=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L+C^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\oint_{C^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\oint_{C^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=0-\oint_{C^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\delta^2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{\delta^2}\iint_{D_2}2\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{\delta^2}\cdot 2\pi\frac{\delta}{2}\cdot\delta=\pi.$$

微信公众号：djky86
（顶尖考研祝您上岸）

六、第二型曲面积分

例 18.15　计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，$a>0$.

解　如图 18-14 所示，记 S 为平面 $z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$ 的下侧，Ω 为 Σ 与 S 所围成的空间区域. 则

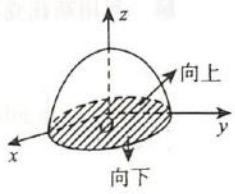


图 18-14

$$
\begin{aligned}
I&=\oiint\limits_{\Sigma+S}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\quad-\iint\limits_{S}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}a\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r\\
&=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{1}{4}\pi a^5=\frac{29}{20}\pi a^5.
\end{aligned}
$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 18.16　计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧（见图 18-15）.

解　先计算 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$.

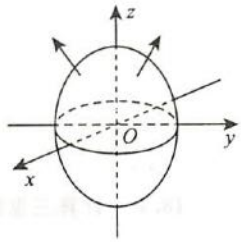


图 18-15

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]&=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\\
\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]&=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\\
\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]&=\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},
\end{aligned}
$$

故
$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

被积函数及其偏导数在点 $(0,0,0)$ 处不连续，取 Σ_1 为封闭曲面 $x^2+y^2+z^2=\delta^2$ 的外侧，$\delta>0$，Ω_0 为 Σ 与 Σ_1^- 围成的有界闭区域，其中 δ 足够小以保证 Σ_1 在曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的内部，于是

$$
\begin{aligned}
\oiint\limits_{\Sigma}&=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1^-}-\oiint\limits_{\Sigma_1^-}=\iiint\limits_{\Omega_0}0\mathrm{d}v+\oiint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\delta^3}\\
&=\frac{1}{\delta^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant\delta^2}3\mathrm{d}v=\frac{3}{\delta^3}\cdot\frac{4\pi\delta^3}{3}=4\pi.
\end{aligned}
$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

七、空间第二型曲线积分

例 18.17 计算$\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$为圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0,\end{cases}$若从$x$轴正向往负向看去，圆周是依逆时针的方向进行的(见图 18-16).

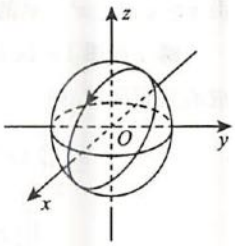


图 18-16

解 利用斯托克斯公式，

$$\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\iint_\Sigma(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

其中，Σ为平面$x+y+z=0$上以圆周Γ为边界的圆域，并且Σ的法线与x轴成锐角，因此

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

故原式$=-\iint_\Sigma\frac{3}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\iint_\Sigma\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2$.

微信公众号：dky66
(顶尖考研祝您上岸)

基础习题精练

习题

18.1 计算三重积分$\iiint_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由椭圆抛物面$z=4(x^2+y^2)$和平面$z=4$所围成的区域.

18.2 在直角坐标系下计算下列三重积分：

(1)$\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$:$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$;

(2)$\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为三个坐标面及平面$x+y+z=1$所围成的闭区域.

18.3 计算$\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$:$x=\cos t,y=\sin t,z=t,0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

18.4 设平面薄片所占的区域D由抛物线$y=x^2$及直线$y=x$所围成，它在(x,y)处的面密度$\rho(x,y)=x^2y$，求此薄片的重心.

18.5 设L为取正向的圆$x^2+y^2=9$，则曲线积分$\oint_L(2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y$的值是_____.

18.6 设L为取正向的圆$x^2+y^2=a^2$，$a>0$，求曲线积分$I=\oint_L\frac{(\mathrm{e}^{x^2}-x^2y)\mathrm{d}x+(xy^2-\sin y^2)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$的值.

18.7　设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

18.8　求第二型曲面积分 $\oiint_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$，其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，$a>0$.

18.9　已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}z=\sqrt{2-x^2-y^2},\\ z=x,\end{cases}$ 起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$，终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分

$$I=\int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z.$$

解答

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

18.1　**解**　如图 18-17 所示，积分区域 Ω 在 xOy 面上的投影是一个圆心在原点的单位圆，所以

$$\Omega=\{(r,\theta,z)\mid 0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,4r^2\leqslant z\leqslant 4\}.$$

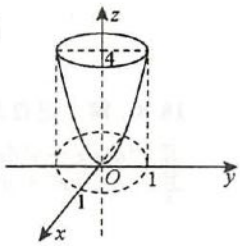


图 18-17

于是
$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}r^2\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r\int_{4r^2}^4\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(4r^3-4r^5)\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi.$$

18.2　**解**　(1)由轮换对称性，有

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 z^2\mathrm{d}z=1.$$

(2)
$$\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}z\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\mathrm{d}y=-\frac{1}{6}\int_0^1(1-x-y)^3\Big|_0^{1-x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{24}.$$

18.3　**解**　$x^2+y^2+z^2=\cos^2t+\sin^2t+t^2=1+t^2$，$\mathrm{d}s=\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2t+1}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\mathrm{d}t$.

故
$$\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(1+t^2)\sqrt{2}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\left(2\pi+\frac{8\pi^3}{3}\right).$$

18.4　**解**　设此薄片的重心为 $(\bar{x},\bar{y})$，则

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x}x^3y\mathrm{d}y}{\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x}x^2y\mathrm{d}y}=\frac{\frac{1}{48}}{\frac{1}{35}}=\frac{35}{48},$$

$$\bar{y}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x}x^2y^2\mathrm{d}y}{\frac{1}{35}}=\frac{\frac{1}{54}}{\frac{1}{35}}=\frac{35}{54}.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

故此薄片的重心为 $\left(\frac{35}{48},\frac{35}{54}\right)$.

18.5 -18π **解** 由格林公式可知

$$\text{原式}=\iint_D[2x-4-(2x-2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\times9\pi=-18\pi,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant9\}$.

18.6 **解** 先代 $L:x^2+y^2=a^2$,得

$$I=\frac{1}{a^2}\oint_L(\mathrm{e}^{x^2}-x^2y)\mathrm{d}x+(xy^2-\sin y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi a^2.$$

【注】 请体会本题与例 18.14 的区别.

18.7 **解** 由高斯公式,并利用球面坐标计算三重积分,得

$$I=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v(\Omega\text{ 是由 }\Sigma\text{ 所围成的区域})$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\mathrm{d}r=\frac{12}{5}\pi.$$

18.8 **解** 记 Ω 是 Σ 所围的空间区域.

$$\oint_\Sigma\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{a^2}\oint_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{a^2}\iiint_\Omega(y^2+z^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{3}{a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{12}{5}\pi a^3.$$

【注】 请体会本题与例 18.16 的区别.

18.9 **解** 设 L_1 是从点 B 到点 A 的直线段,Σ 为平面 $z=x$ 上由 L 与 L_1 围成的半圆面下侧,其法向量的单位向量为 $\left(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2}\right)$. 由斯托克斯公式

$$\oint_{L+L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y+z&z^2-x^2+y&x^2y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\iint_\Sigma(2x^2y+1)\mathrm{d}S.$$

由于曲面 Σ 关于 xOz 平面对称,所以 $\iint_\Sigma 2x^2y\mathrm{d}S=0$,故

$$\oint_{L+L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt2}\iint_\Sigma\mathrm{d}S=\frac{\sqrt2}{2}\pi.$$

又 L_1 的参数方程为 $x=0,y=y,z=0$(y 从 $-\sqrt2$ 到 $\sqrt2$),所以

$$\int_{L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z=\int_{-\sqrt2}^{\sqrt2}y\mathrm{d}y=0.$$

因此 $I=\oint_{L+L_1}-\int_{L_1}=\frac{\sqrt2}{2}\pi$.

微信公众号：djky66
(助您考研保您上岸)

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

• 张宇

博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《张宇考研数学基础30讲》《张宇考研数学题源探析经典1000题》《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》《张宇考研数学真题大全解》《考研数学命题人终极预测8套卷》《张宇考研数学最后4套卷》《张宇经济类综合能力数学通关优题库》作者，高等教育出版社原《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》及《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》编者之一，北京、上海、广州、西安等全国著名考研数学辅导班首席主讲。

• 张宇考研数学系列丛书

○ 教材类

张宇考研数学基础30讲·高等数学分册 书课包
张宇考研数学基础30讲·线性代数分册 书课包
张宇考研数学基础30讲·概率论与数理统计分册 书课包
张宇高等数学18讲 书课包
张宇线性代数9讲 书课包
张宇概率论与数理统计9讲 书课包

○ 题集类

张宇考研数学题源探析经典1000题（分数学一、数学二、数学三） 书课包
张宇考研数学真题大全解（分数学一、数学二、数学三） 书课包
考研数学命题人终极预测8套卷（分数学一、数学二、数学三） 书课包
张宇考研数学最后4套卷（分数学一、数学二、数学三） 书课包

北京理工大学出版社网址：http://www.bitpress.com.cn

宇哥考研
新浪微博二维码

张宇考研数学
微信公众号

启航教育
微信公众号

ISBN 978-7-5763-0941-6
9 787576 309416 >

定价：139.90元