启航教育 云图 YUN TU 2024版

张宇考研数学系列丛书·二

张宇考研数学题源探析经典1000题

书课包

【数学二·习题分册】

主编 张宇

副主编 高昆轮

北京理工大学出版社

启航教育 云图 YUN TU

书课包

张宇考研数学题源探析经典1000题

【数学三·习题分册】

主编 张宇 副主编 高昆轮

张宇考研数学系列丛书编委（按姓氏拼音排序）

蔡茂勇 蔡燧林 曹泽祺 陈静静 方春贤 高昆轮 胡金德 华炜超 贾建厂
刘硕 吕盼静 吕倩 马丁 秦艳鱼 沈利英 石臻东 仝雨晨 王国娟 王慧珍
王爽 王燕星 徐兵 严守权 亦一（笔名） 曾凡（笔名） 张翀 张乐 张雷 张青云
张勇利 张宇 赵海婧 郑利娜 朱杰

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

北京理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典 1000 题. 数学三. 习题分册 / 张宇主编. — 北京 ：北京理工大学出版社，2022.1(2022.11 重印)

ISBN 978 - 7 - 5763 - 0815 - 0

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 习题集　Ⅳ.①O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 005875 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
　　　　　(010)82562903(教材售后服务热线)
　　　　　(010)68944723(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 9
字　　数 / 225 千字
版　　次 / 2022 年 1 月第 1 版　2022 年 11 月第 2 次印刷
定　　价 / 169.90 元(共 2 册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 刘亚男
责任印制 / 李志强

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前 言

PREFACE

本书是我和教学团队对考研数学题源研究的最新成果，供 2024 考研的考生在复习全过程中使用。

本书突出考研数学最新的命题趋势，分为数学一、数学二、数学三出版，并将题目按难易程度分为 A、B、C 三组，可在不同阶段使用，具体说明如下。

A 组，可以看作基础题。所谓基础题，主要包含如下涵义：一是考查基本的概念、公式和定理的题目；二是题型常规且计算量不大的题目。这类题目主要用来热身并巩固所学的基础知识，属于基本知识的再现，难度不大，区分度也不高，算是送分题，在考研中所占分量约五分之一，一般来说，除非粗心大意，考生不会在这类题目上丢分。考生在基础阶段应该完成这些题目，为强化阶段的复习打下基础。

B 组，可以看作中等难度题。所谓中等难度题，主要包含如下涵义：一是考查比较复杂的概念、公式和定理的题目；二是题型常规但计算量较大的题目；三是基本的应用题目，包括几何应用和专业应用。这类题目主要用来深刻考查考生对所学知识的理解和运用，区分度较高，难度中等及中等偏上，在考研中所占分量约五分之三，是考研数学试卷上的重头戏，这类题目会决定考生考研数学成绩，甚至考研成败。考生在强化复习阶段要认真操练这类题目，努力提高自己的考研数学水平。

C 组，可以看作难题。所谓难题，主要包含如下涵义：一是考查冷僻的概念、公式和定理的题目，虽然这种题目综合性不强，计算量也不大，但是冷僻，所谓冷僻，既包括考研知识中几乎不考的边角料知识，也包括考查频率很低（多年不考）的常规知识，会给考生造成措手不及的感觉，极易丢分；二是计算量大的题目，考研数学题大部分是要通过计算才能得出结果的，计算量大的题目，对于平时复习时眼高手低，不注重提高计算能力的考生，着实是一种难题；三是题型新颖的综合性题目，近几年的考研中，尤其是从 2019 年开始，为了体现公平公正，反对社会上押题猜宝的不良风气，树立正确的复习备考观，命题单位加大了对从未考查过的新颖命题的设计和考查力度，这类题目命题手法高超，风格独特，行云流水，令人拍案。难题，在考研中所占分量约五分之一，而且有加大分量的趋势，这类问题不再只是所谓尖子生的专用考题，对于即将进入大众化考研的庞大考研群体来说，这类题目做得好不好，也是至关重要的。考生在强化阶段和冲刺阶段，除了要完成历年真题的训练之外，还要多

做既好又新的题目，这样才能应对考研的激烈竞争，稳操胜券。

感谢命题专家们给予的指导和帮助，感谢历届考生对本书的厚爱和建议，感谢编辑老师们的辛勤工作。希望考生认真研读、操练本书中的每一道题目，提高解题能力，争取考研得到高分。

张宇

2022 年 10 月　于北京

目 录

CONTENTS

第一篇 微积分

第 1 章 函数极限与连续 …… 3
A 组 …… 3
B 组 …… 5
C 组 …… 7
第 2 章 数列极限 …… 9
A 组 …… 9
B 组 …… 10
C 组 …… 10
第 3 章 一元函数微分学的概念 …… 12
A 组 …… 12
B 组 …… 13
C 组 …… 13
第 4 章 一元函数微分学的计算 …… 15
A 组 …… 15
B 组 …… 15
C 组 …… 16
第 5 章 一元函数微分学的应用(一)——几何应用 …… 17
A 组 …… 17
B 组 …… 19
C 组 …… 20
第 6 章 一元函数微分学的应用(二)——中值定理、微分等式与微分不等式 …… 21
A 组 …… 21

B组 …… 22
C组 …… 23

第7章　一元函数微分学的应用(三)——经济应用 …… 24
A组 …… 24
B组 …… 24
C组 …… 25

第8章　一元函数积分学的概念与性质 …… 26
A组 …… 26
B组 …… 27
C组 …… 29

第9章　一元函数积分学的计算 …… 30
A组 …… 30
B组 …… 31
C组 …… 32

第10章　一元函数积分学的应用(一)——几何应用 …… 34
A组 …… 34
B组 …… 35
C组 …… 35

第11章　一元函数积分学的应用(二)——积分等式与积分不等式 …… 36
A组 …… 36
B组 …… 36
C组 …… 37

第12章　一元函数积分学的应用(三)——经济应用 …… 38
A组 …… 38
B组 …… 38
C组 …… 38

第13章　多元函数微分学 …… 39
A组 …… 39
B组 …… 41
C组 …… 43

第14章　二重积分 …… 45
A组 …… 45
B组 …… 47
C组 …… 48

第 15 章　微分方程 …… 50
A 组 …… 50
B 组 …… 51
C 组 …… 52
第 16 章　无穷级数 …… 54
A 组 …… 54
B 组 …… 56
C 组 …… 58

第二篇　线性代数

第 1 章　行列式 …… 61
A 组 …… 61
B 组 …… 62
C 组 …… 64
第 2 章　余子式和代数余子式的计算 …… 65
A 组 …… 65
B 组 …… 65
C 组 …… 66
第 3 章　矩阵运算 …… 67
A 组 …… 67
B 组 …… 68
C 组 …… 71
第 4 章　矩阵的秩 …… 72
A 组 …… 72
B 组 …… 72
C 组 …… 73
第 5 章　线性方程组 …… 74
A 组 …… 74
B 组 …… 76
C 组 …… 78
第 6 章　向量组 …… 79
A 组 …… 79
B 组 …… 80
C 组 …… 81

第 7 章　特征值与特征向量 …… 83
A 组 …… 83
B 组 …… 84
C 组 …… 85

第 8 章　相似理论 …… 86
A 组 …… 86
B 组 …… 87
C 组 …… 89

第 9 章　二次型 …… 90
A 组 …… 90
B 组 …… 91
C 组 …… 93

第三篇　概率论与数理统计

第 1 章　随机事件和概率 …… 97
A 组 …… 97
B 组 …… 98
C 组 …… 100

第 2 章　一维随机变量及其分布 …… 101
A 组 …… 101
B 组 …… 102
C 组 …… 104

第 3 章　一维随机变量函数的分布 …… 105
A 组 …… 105
B 组 …… 106
C 组 …… 107

第 4 章　多维随机变量及其分布 …… 108
A 组 …… 108
B 组 …… 109
C 组 …… 112

第 5 章　多维随机变量函数的分布 …… 113
A 组 …… 113
B 组 …… 114
C 组 …… 115

第 6 章　数字特征 …… 116

A 组 …… 116

B 组 …… 117

C 组 …… 121

第 7 章　大数定律与中心极限定理 …… 123

A 组 …… 123

B 组 …… 124

C 组 …… 124

第 8 章　统计量及其分布 …… 126

A 组 …… 126

B 组 …… 127

C 组 …… 128

第 9 章　参数估计 …… 130

A 组 …… 130

B 组 …… 131

C 组 …… 132

第一篇 微积分

微积分是硕士研究生招生考试考查内容之一，主要考查考生对微积分的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、综合运用能力和解决实际问题的能力。在考研数学三试卷中分值约90分。

第1章 函数极限与连续

1. 设 $f(x)=u(x)+v(x)$，$g(x)=u(x)-v(x)$，并设 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$ 都不存在，则下列结论正确的是（　　）．

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

(B) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在

(C) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在

(D) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\tan x}-1}{x^2}=$（　　）．

(A) 1　　(B) 2　　(C) -1　　(D) -2

3. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{\arctan x}\right)^{\frac{1}{kx^2}}=\mathrm{e}$，则常数 k 的值为（　　）．

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{3}{2}$　　(D) 2

4. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}{x^a\ln(1+x)}=b\neq 0$，则（　　）．

(A) $a=-\dfrac{2}{3}, b=-1$　　(B) $a=\dfrac{2}{3}, b=1$

(C) $a=-1, b=-\dfrac{2}{3}$　　(D) $a=1, b=\dfrac{2}{3}$

5. 若 $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right]=0$，则常数 a,b 的值分别为（　　）．

(A) $1,\dfrac{1}{2}$　　(B) $1,-\dfrac{1}{2}$　　(C) $-1,\dfrac{1}{2}$　　(D) $-1,-\dfrac{1}{2}$

6. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=4$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=$（　　）．

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

7. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中，最高阶的无穷小是（　　）．

(A) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$　　(B) $1-\cos x$

(C) $\tan x-\sin x$　　(D) $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2$

8. 当 $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+$ 时，$\pi - 4\arccos\sqrt{2}x$ 与 $a\left(x-\frac{1}{2}\right)^b$ 为等价无穷小，则(　　).

(A)$a = 4, b = 2$　　(B)$a = -4, b = 2$

(C)$a = 8, b = 1$　　(D)$a = -8, b = 1$

9. 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = \ln(1+x^2) - 2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}$ 是无穷小量 x^k 的同阶无穷小，则 $k =$(　　).

(A)1　　(B)2　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{3}{2}$

10. 设 $f(x) = x^2 - (\arcsin x)^2$，$g(x) = x^2 - (\arctan x)^2$，若当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)$ 是 $kg(x)$ 的等价无穷小，则常数 $k =$(　　).

(A) -2　　(B) $-\frac{1}{2}$　　(C)2　　(D) $\frac{1}{2}$

11. 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = \ln(1+x^2) - \ln(1+\sin^2 x)$ 是 x 的 n 阶无穷小，则正整数 n 为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

12. 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leqslant 0, \\ 2+x, & x > 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x-1, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $g[f(x)]$ 的(　　).

(A) 连续点　　(B) 可去间断点　　(C) 跳跃间断点　　(D) 第二类间断点

13. 要使函数 $f(x) = \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ 在 $x = 0$ 处连续，应补充定义 $f(0) =$(　　).

(A) $\frac{\ln 2}{\ln 3}$　　(B) $\ln\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $e^{\frac{2}{3}}$

14. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)}-1}{x-\tan x} = 2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x-\sin x} =$ ________.

15. 当 $x \to 0^+$ 时，$\sqrt{1+\tan\sqrt{x}} - \sqrt{1+\sin\sqrt{x}}$ 是 x 的 k 阶无穷小，则 $k =$ ________.

16. 已知 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x^{-2}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则 $a =$ ________.

17. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-4x^2\sin x}-1}{x\ln(1+2x^2)}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x^2-4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\cos x\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$；

(6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x^2+7}+\frac{\sin^4 x}{\sqrt{x}}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{e^{x^2}-1}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2\right)$，$a > 0$ 且 $a \neq 1$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}+\cos 4x-2}{\sqrt[3]{1-x^2}-1}$；

(13) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{\ln(1+x)}$；

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$；

(15) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)}$；

(16) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$，$a\neq0$；

(17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$；

(18) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_i>0$，且 $a_i\neq1$，$i=1,2,\cdots,n$，$n\geqslant2$.

18. 当 $x\to0$ 时，$\sin x(\cos x-4)+3x$ 为 x 的几阶无穷小？

19. 确定函数 $f(x)=\dfrac{2x(x-1)}{|x|x^2-|x|}$ 的间断点，并判定其类型.

20. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续区间、间断点，并判别间断点的类型.

B组

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\sin(x-t)^3\,dt}{x\int_0^x\sin(x-t)^3\,dt}=$（　　）.

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{1}{5}$

2. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某去心邻域内有定义，并且当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都为 x 的同阶无穷小，则当 $x\to0$ 时（　　）.

(A) $f(x)-g(x)$ 必是 x 的同阶无穷小

(B) $f(x)-g(x)$ 必是 x 的高阶无穷小

(C) $f[g(x)]$ 必是 x 的同阶无穷小

(D) $f[g(x)]$ 必是 x 的高阶无穷小

3. 设 $\alpha(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\dfrac{\ln(1+t)}{1+t^4}dt$，$\beta(x)=\int_0^{\tan x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$，则当 $x\to0^+$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的（　　）.

(A) 等价无穷小　　(B) 同阶但非等价的无穷小

(C) 低阶无穷小　　(D) 高阶无穷小

4. 当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin x+\int_0^x t^2e^{t^2}dt$ 是 x 的 k 阶无穷小，则 $k=$（　　）.

(A)3　　(B)4　　(C)5　　(D)6

5. 设函数 $f(x)$ 连续，$f(0)=1$，且当 $x\to0$ 时，$\int_0^{x-\tan x}f(t)dt$ 与 $(1+\sin^ax)^b-1$ 为等价无穷小，则（　　）.

(A) $a=3,b=\dfrac{1}{3}$　　(B) $a=3,b=-\dfrac{1}{3}$

(C) $a=1,b=\dfrac{1}{3}$　　(D) $a=1,b=-\dfrac{1}{3}$

6. 当 $x\to\pi$ 时，若有 $\sqrt[4]{\sin\dfrac{x}{2}}-1\sim a(x-\pi)^b$，则 a,b 的值分别为（　　）.

(A) $-\frac{1}{32},2$　　(B) $\frac{1}{32},2$　　(C) $-\frac{1}{8},1$　　(D) $\frac{1}{8},1$

7. 若$\lim\limits_{x\to0}\left[-\frac{f(x)}{x^3}+\frac{\sin x^3}{x^4}\right]=5$，则当$x\to0$时，$f(x)$是$x$的(　　).

(A) 等价无穷小量　　(B) 同阶但不等价的无穷小量

(C) 高阶无穷小量　　(D) 低阶无穷小量

8. 设$f(x)$与$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上都有定义，且$x=x_1$是$f(x)$的唯一间断点，$x=x_2$是$g(x)$的唯一间断点. 则(　　).

(A) 当$x_1=x_2$时，$f(x)+g(x)$必有唯一的间断点$x=x_1$

(B) 当$x_1\neq x_2$时，$f(x)+g(x)$必有两个间断点$x=x_1$与$x=x_2$

(C) 当$x_1=x_2$时，$f(x)g(x)$必有唯一间断点$x=x_1$

(D) 当$x_1\neq x_2$时，$f(x)g(x)$必有两个间断点$x=x_1$与$x=x_2$

9. 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+3}}{\sqrt{3^{2n}+x^{2n}}}(-\infty<x<+\infty)$，则$f(x)$在区间$(1,+\infty)$上(　　).

(A) 连续　　(B) 有一个可去间断点

(C) 有一个跳跃间断点　　(D) 有一个第二类间断点

10. 设

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{2^x+e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, & x\neq0,\\ \sqrt{2e}, & x=0.\end{cases}$$

记$I_1=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$I_2=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$I_3=\lim\limits_{x\to0}f(x)$，则(　　).

(A) $I_1<I_3<I_2$　　(B) $I_2<I_3<I_1$

(C) $I_2<I_1<I_3$　　(D) $I_1<I_2<I_3$

11. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=$________.

12. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e+\frac{e}{2}x}{x^2}=$________.

13. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_{\sin x}^{x}\sqrt{3+t^2}\,dt}{x(e^{x^2}-1)}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^x-(\tan x)^x}{x(\sqrt{1+3\sin^2x}-1)}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\int_0^x\frac{\sin 2t}{\sqrt{4+t^2}\int_0^x(\sqrt{t+1}-1)dt}dt$；　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-xe^{\frac{1}{x}})$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{\frac{x^2}{2}})\sin\frac{x^2}{2}}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$；

(9) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

14. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$.

15. 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的间断点,并指出其类型.

16. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2+e^{nx}}$,求 $f(x)$ 的间断点,并判定其类型.

C组

1. 下列命题正确的是(　　).

(A) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 必存在

(B) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 必不存在

(C) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$,$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,则必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=A$

(D) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$,$\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$,则必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=A$

2. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$,则 $f(x)$(　　).

(A) 处处连续

(B) 只有第一类间断点

(C) 只有第二类间断点

(D) 既有第一类间断点,又有第二类间断点

3. 设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>0)$,存在常数 A,B,使得当 $x\to 0^+$ 时,恒有

$$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2),$$

则常数 A,B 的值分别为(　　).

(A) $\dfrac{e}{2},\dfrac{11}{24}e$　　(B) $-\dfrac{e}{2},\dfrac{11}{24}e$

(C) $\dfrac{e}{2},-\dfrac{11}{24}e$　　(D) $-\dfrac{e}{2},-\dfrac{11}{24}e$

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^3)}{\arcsin x-x}$,$g(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$,则 $\lim\limits_{x\to 0^-}f[g(x)]=$ ________.

5. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{1}{n^x}(0<x<+\infty)$,则 $f(x)$ 在其间断点处的值等于________.

6. 记 $f(x)=27x^3+5x^2-2$ 的反函数为 f^{-1},求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(27x)-f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$.

8. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{\sin x\int_0^1\tan(xt)^2\mathrm{d}t}$.

9. 已知极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^4}+\dfrac{c}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)=1$，求常数 a,b,c.

10. 确定常数 A,B,C 的值，使 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)(x\to 0)$.

11. 设 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 满足 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$，且 $f(0)=1$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

第 2 章　数列极限

A 组

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{(-1)^n}=$（　　）.

(A)1　　(B) -1　　(C)e　　(D)e^{-1}

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]^n=$（　　）.

(A)e　　(B)e^{-1}　　(C)1　　(D)2

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 单调，下列结论正确的是（　　）.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}(e^{a_n}-1)$ 存在　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a_n^2}$ 存在

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n$ 存在　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-a_n^2}$ 存在

4. 设 a,b 均为大于 1 的实数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{b^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n+1}}}=$（　　）.

(A)$\ln\dfrac{a}{b}$　　(B) $\dfrac{\ln a}{\ln b}$　　(C) $\dfrac{b\ln a}{a\ln b}$　　(D) $\dfrac{a\ln a}{b\ln b}$

5. 设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均无界，$\{z_n\}$ 有界，则（　　）.

(A)$\{x_n+y_n\}$ 必无界　　(B)$\{x_ny_n\}$ 必无界

(C)$\{x_n+z_n\}$ 必无界　　(D)$\{x_nz_n\}$ 必无界

6. 设 $x_n=1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ________.

7. 设 $x>0$，n 为正整数，记 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[x^{\frac{1}{nx}}-x^{\frac{1}{(n+1)x}}\right]$，则 $f'(x)=$ ________.

8. 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\ln(x_n+1)(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n+1}}\right)$；

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)^{\frac{1}{x_n}}$.

B 组

1. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+2}-\frac{4}{3}x_{n+1}+\frac{1}{3}x_n=0, n=1,2,3,\cdots$，且 $x_1=1, x_2=2$，则 $\{x_n\}$ 收敛于(　　).

(A) 1　　　　(B) -1　　　　(C) $\frac{5}{2}$　　　　(D) $-\frac{5}{2}$

2. 设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ________.

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right), a>0$.

4. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<1, \ln(1+x_n)=e^{x_{n+1}}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) 当 $0<x<1$ 时，$\ln(1+x)<x<e^x-1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限.

5. (1) 设 $f(x)=x+\ln(2-x)$，求 $f(x)$ 的最大值；

(2) 设 $x_1=\ln 2, x_n=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\ln(2-x_i), n=2,3,\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其极限值.

6. 设 $f_0(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上连续的严格单调增加函数，函数 $f_1(x)=\dfrac{\int_0^x f_0(t)\mathrm{d}t}{x}$.

(1) 补充定义 $f_1(x)$ 在 $x=0$ 处的值，使得补充定义后的函数（仍记为 $f_1(x)$）在 $[0,+\infty)$ 上连续；

(2) 在(1)的条件下，证明 $f_1(x)<f_0(x)(x>0)$，且 $f_1(x)$ 也是 $[0,+\infty)$ 上连续的严格单调增加函数；

(3) 令 $f_n(x)=\dfrac{\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t}{x}, n=1,2,3,\cdots$，证明：对任意的 $x>0$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在.

7. 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $0\leqslant f'(x)\leqslant\frac{1}{1+x^2}$，又 $x_1=a, x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$. 证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，且其极限是方程 $x=f(x)$ 的唯一根.

C 组

1. 设比值极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\frac{1}{2}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，满足 $0\leqslant f(x)\leqslant x, x\in[0,+\infty)$，设 $a_1\geqslant 0, a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：

(1) $\{a_n\}$ 为收敛数列；

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = t$，则有 $f(t) = t$；

(3) 若条件改为 $0 \leqslant f(x) < x, x \in (0, +\infty)$，则(2)中的 $t = 0$.

3. 设当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时，$a \leqslant f(x) \leqslant b$，并设存在常数 k，$0 \leqslant k < 1$，对于 $[a,b]$ 上的任意两点 x_1 与 x_2，都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k|x_1 - x_2|$. 证明：

(1) 存在唯一的 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \xi$；

(2) 对于任意给定的 $x_1 \in [a,b]$，定义 $x_{n+1} = f(x_n)$，$n = 1,2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

4. 设 $F(x,y) = \dfrac{f(y-x)}{2x}$，$F(1,y) = \dfrac{y^2}{2} - y + 5$，$x_0 > 0$，$x_1 = F(x_0, 2x_0)$，$\cdots$，$x_{n+1} = F(x_n, 2x_n)$，$n = 1,2,\cdots$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限.

第 3 章　一元函数微分学的概念

A 组

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}, & x>0,\\ x^2 g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 为有界函数，则在 $x=0$ 处，$f(x)$（　　）.

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 可导

2. 设函数 $f(x)$ 可导，且 $y=f(x^3)$. 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.3，则 $f'(-1)=$（　　）.

(A) -1　　(B) 0.1　　(C) 1　　(D) 0.3

3. 若 $f(x)=e^{10x}x(x+1)(x+2)\cdots(x+10)$，则 $f'(0)=$ ________.

4. 设对任意 x，$f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)$，且 $f'(0)=C$（常数），则 $f'(1)=$ ________.

5. 已知 $f(x)=\sqrt{1+x}+\arcsin\dfrac{1-x}{1+x^2}$，则 $f'(1)=$ ________.

6. 设 $y=f(x)$ 由方程 $\sin(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-e\right]=$ ________.

7. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$. 设对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为非零常数.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式；

(2) 问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

8. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对任意的 $x,x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2),\ f(x)=1+xg(x),$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$. 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导.

B组

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-e^{-x}+x}{\arctan x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 可导，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}(\ln^2 2+1)$　　(B) 可导，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}(\ln^2 2-1)$

(C) 不可导　　(D) 是否可导与 a 的取值有关

2. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 内的奇函数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数(　　).

(A) 等于 a　　(B) 等于 $-a$　　(C) 等于 0　　(D) 不存在

3. 函数 $f(x)=|x^3-4x|\sqrt[3]{x^2-2x-8}$ 的不可导的点的个数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

4. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，在 $x=a$ 的某去心邻域内可导，则下述命题正确的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=A$，则 $f'(a)=A$　　(B) 若 $f'(a)=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=A$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\infty$，则 $f'(a)$ 不存在　　(D) 若 $f'(a)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\infty$

5. 已知 $f(0)=0, f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)-\dfrac{1}{n^2}+1\right]^{3n^2}=$ ______.

6. 已知 $f(0)=f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)e^x-1}{f(x)\cos x-1}=$ ______.

7. 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式；

(2) 讨论 $g(x)$ 是否有不可导点，若有，指出这些点.

8. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对任意 x 与 y，均满足 $f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$，$f'(0)$ 存在且等于 a，$a\neq 0$. 证明：对任意 x，$f'(x)$ 存在，并求 $f(x)$.

C组

1. 下列命题

① 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续；

② 设 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续；

③ 设 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 均存在,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续;

④ 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 中至少有一个不存在,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必不可导.

正确的个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

2. 设 $f(x)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dy, 0\leqslant x\leqslant 1$,则 $f'_+(0)=$(　　).

(A) $-\frac{\pi}{2}$　　(B) $\frac{\pi}{2}$　　(C) $-\pi$　　(D) π

3. 设 $f''(a)$ 存在,$f'(a)\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{f'(a)(x-a)}-\frac{1}{f(x)-f(a)}\right]=$ ______.

4. (1) 设 $f(x)=\sqrt{x+5}\cdot\sqrt[3]{2x-7}$, $g(x)=\sqrt{x-3}\cdot\sqrt[3]{3x-11}$,求 $f'(4)$, $g'(4)$;

(2) 求极限 $I=\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}\cdot\sqrt[3]{2x-7}-3}{1-\sqrt{x-3}\cdot\sqrt[3]{3x-11}}$.

第 4 章　一元函数微分学的计算

A 组

1. 设 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$，则 $f^{(n)}(x)=($　　$)$.

(A) $(-1)^n(1+n)x\mathrm{e}^{-x}$　　(B) $(-1)^n(1-n)x\mathrm{e}^{-x}$

(C) $(-1)^n(x+n)\mathrm{e}^{-x}$　　(D) $(-1)^n(x-n)\mathrm{e}^{-x}$

2. 设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$，则 $y''\Big|_{x=0}=$ ________.

3. 设函数 $f(x)=x^3+2x-4$，$g(x)=f[f(x)]$，则 $g'(0)=$ ________.

4. 设 $x=f(y)$ 是函数 $y=x+\ln x$ 的反函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2}=$ ________.

5. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，则 $\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=$ ________.

6. 若 $f(x)=x^5\mathrm{e}^{6x}$，则 $f^{(101)}(0)=$ ________.

7. 设 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$ 且 $f'(x)=\arctan x^2$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=$ ________.

8. 设 $f'(\ln x)=x\ln x$，则 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=$ ________.

9. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{x}(x\neq 0)$，求 $f'(x)(x\neq 0)$.

B 组

1. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，$f(0)=3$，$f'(0)=f''(0)=\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\Big|_{y=3}=($　　$)$.

(A) -4　　(B) -2　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

2. 设函数 $f(x)=x^2 2^x$，则对于任意正整数 $n>1$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=($　　$)$.

(A) $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$　　(B) $n(n-2)(\ln 2)^{n-1}$

(C) $n(n+1)(\ln 2)^{n-2}$　　(D) $n(n+2)(\ln 2)^{n-1}$

3. 设 $f(x)=(x-1)^n x^{2n}\sin\frac{\pi}{2}x$，则 $f^{(n)}(1)=$ (　　).

(A) $(n-1)!$　　(B) $n!$

(C) $n!+1$　　(D) $(n+1)!$

4. 已知可微函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=-ye^x+2e^y\sin x-7x$ 所确定，则 $y''(0)=$ ______.

5. 设 $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{2+x}{(2-x)^2}}+\sin x$，则 $y'=$ ______.

6. 设 $f(x)=\frac{x}{2x^2-3x+1}$，则 $f^{(n)}(0)=$ ______.

7. 设 $f(x)=(x^2-3x+2)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$，则 $f^{(n)}(2)=$ ______.

8. 设 $u=f[\varphi(x)+y^2]$，其中 $y=y(x)$ 由方程 $y+e^y=x$ 确定，且 $f(x),\varphi(x)$ 均有二阶导数，求 $\frac{du}{dx}$ 和 $\frac{d^2u}{dx^2}$.

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1,g'(0)=-1$.

(1) 求 $f'(x)$；

(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

C组

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x\cos 2x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}(x>0)$.

(1) 证明：$f(x)=\cos 2x\sin x$；

(2) 求 $f^{(20)}(x)$.

2. 设 n 为正整数，$f(x)=g'(x),g(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 求 $f^{(n)}(0)$.

3. 设 $y=\arcsin x$.

(1) 证明其满足方程 $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0(n\geqslant 0)$；

(2) 求 $y^{(n)}\Big|_{x=0}$.

第 5 章　一元函数微分学的应用（一）——几何应用

A 组

1. 设 $f(x)=|x(3-x)|$，则(　　).

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

2. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为(　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

3. 设曲线 $y=x^3+ax+b$ 和 $3y=2x^3-xy^2-4$ 在点 $(1,-2)$ 处相切，其中 a,b 是常数，则(　　).

(A) $a=2,\ b=-5$　　(B) $a=-5,\ b=2$

(C) $a=-4,\ b=1$　　(D) $a=1,\ b=-4$

4. 设 $f(x)$ 的导数在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=3$，则 $x=0$(　　).

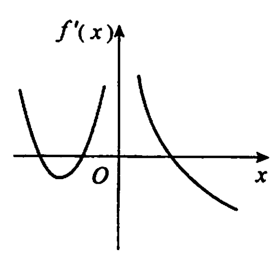
(A) 是 $f(x)$ 的极小值点

(B) 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) 不是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有(　　).



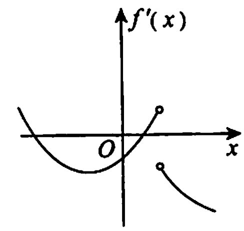
(A) 1 个极小值点和 2 个极大值点

(B) 2 个极小值点和 1 个极大值点

(C) 2 个极小值点和 2 个极大值点

(D) 3 个极小值点和 1 个极大值点

6. 设函数 $y=f(x)$ 连续，且其导函数 $f'(x)$ 除间断点外均可导，图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$（　　）.



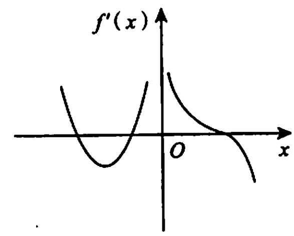
(A) 有 2 个极大值点，1 个极小值点，2 个拐点

(B) 有 2 个极大值点，1 个极小值点，1 个拐点

(C) 有 1 个极大值点，2 个极小值点，1 个拐点

(D) 有 1 个极大值点，1 个极小值点，2 个拐点

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其一阶导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示，并设在 $f'(x)$ 存在处 $f''(x)$ 也存在，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为（　　）.



(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)4

8. 设常数 $a>0$，$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-x$，$x\in\left[0,\frac{1}{a}\right]$，则（　　）.

(A) 当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 的最大值是 $f\left(\frac{1}{a}\right)$

(B) 当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 的最大值是 $f(0)$

(C) 当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 的最小值是 $f\left(\frac{1}{a}\right)$

(D) 当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 的最小值是 $f(0)$

9. 曲线 $y=\sqrt{4x^2-3x+7}-2x$ 的渐近线的条数为（　　）.

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

10. 曲线 $y=\frac{x-1}{1-e^x}$ 的渐近线的条数为（　　）.

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

11. 曲线 $y=\ln\left(e-\frac{1}{x}\right)$ 的全部渐近线为________.

12. 曲线 $y=x^{x^2}\ (x>0)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为________.

13. 若曲线 $C: y=f(x)$ 由方程 $2x-y=2\arctan(y-x)$ 确定，则曲线 C 在点 $\left(1+\frac{\pi}{2},2+\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为________.

14. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为________.

15. 已知 $a_n=\frac{(1+n)^3}{(1-n)^2}$，$n=2,3,\cdots$，则数列 $\{a_n\}$ 的最小值为________.

16. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可微，且满足

$$2f(2+x)+f(2-x)=3+2x+o(x),\quad ①$$

这里 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小（当 $x\to 0$ 时），求微分 $d[f(x)]\Big|_{x=2}$，并求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程.

17. 设函数 $f(x)=\begin{cases} ae^{2x}-4x^2, & x>0, \\ bx+1, & x\leqslant 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导.

（1）求常数 a,b 的值；

（2）求当 $x>0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间及拐点.

B组

1. 设函数 $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2+ax+b$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，其中 a,b 是常数，则（　　）.

（A）对任意实数 b，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调减少

（B）对任意实数 a，$f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 内单调增加

（C）存在无穷多个实数 a，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调减少

（D）存在某个实数 b，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调函数

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

2. 设 n 为正整数，则关于函数 $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ 的极值，下列说法正确的是（　　）.

（A）仅有极小值　　（B）仅有极大值

（C）既无极小值也无极大值　　（D）是否有极值依赖于 n 的取值

3. 设函数 $f(x)$ 有连续导数，且满足 $f(x)+3\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}$，则 $f(x)$ 必存在（　　）.

（A）极大值 $-\frac{1}{3}$　　（B）极大值 $-\frac{1}{3}\ln 3$

（C）极小值 $\frac{1}{3}$　　（D）极小值 $\frac{1}{3}\ln 3$

4. 设函数 $\varphi(x)$ 在点 $x=1$ 的某邻域内具有三阶导数，且 $\varphi(1)\neq 0$，$f(x)=(x-1)^3\varphi(x)$，则（　　）.

（A）函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处取得极大值

（B）函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处取得极小值

（C）点 $(1,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）点 $(1,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5. 设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+(1-\cos x)f'(x)+xf(x)=\sin x$，且 $f(0)=2$，则（　　）.

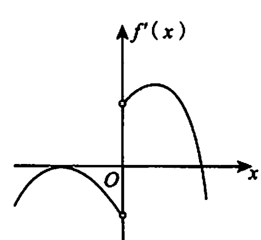
（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

（C）曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 左侧邻域是凹的，右侧邻域是凸的

（D）曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 左侧邻域是凸的，右侧邻域是凹的

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其一阶导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示，并设在 $f'(x)$ 存在处 $f''(x)$ 亦存在，则曲线 $y=f(x)$（　　）.



（A）有 1 个极大值点与 1 个拐点

（B）有 1 个极小值点，1 个极大值点与 1 个拐点

（C）有 1 个极小值点，1 个极大值点与 2 个拐点

（D）有 1 个极小值点，1 个极大值点与 3 个拐点

7. 曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 相交的充要条件是(　　).

(A)$0<a\leqslant 1$　　(B)$0<a\leqslant \mathrm{e}$

(C)$0<a\leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$　　(D)$0<a\leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}$

8. 设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}-\sqrt{4x^2-3x+5}$,则曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线为________.

9. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\int_x^{2y+x}\mathrm{e}^{-(t-x)^2}\mathrm{d}t=x^2+3\sin x$ 确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,0)$ 处的切线方程为________.

10. 求曲线 $y=x^2+5x+4$ 过点$(0,3)$ 的切线方程.

11. 设 $f(x)=(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}(x\neq 0)$,且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,求 $f(0)$ 的值,并求曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,f(0))$ 处的切线方程.

12. 求曲线 $y=\dfrac{x^2\arctan x}{x-1}(x>0)$ 的斜渐近线方程.

13. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$,求 $x>0$ 时曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线方程.

14. 求方程 $2y^3-2y^2+2xy+y-x^2=0$ 确定的函数 $y=y(x)$ 的极值.

15. 设函数 $f(x)$ 可导,且满足 $xf'(x)=f'(-x)+1,f(0)=0$,求:

(1)$f'(x)$;

(2) 函数 $f(x)$ 的极值.

16. 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ x+2, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的单调区间和极值.

C组

1. 要使曲线 $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{ax}+b}$ 有 3 条渐近线,则常数 a,b 的取值范围为(　　).

(A) $a<0,b<0$　　(B) $a>0,b<0$ 且 $b\neq -1$

(C) $a\neq 0,b<0$　　(D) $a\neq 0,b<0$ 且 $b\neq -1$

2. 函数 $f(x)=\int_0^x\sin^2(\pi t)\mathrm{d}t-\dfrac{x^2}{2}$ 在区间$(-\infty,+\infty)$ 上的驻点个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

3. 求 $y=\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$的全部渐近线.

4. 设 $f(x)$ 满足方程 $\dfrac{1}{x}f''(x)+3x[f'(x)]^2=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln^2(1+x)-x$,若 $x_0(x_0>0)$ 是 $f(x)$ 的一个驻点,证明:x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.

5. 求函数 $f_n(x)=x^n\mathrm{e}^{-n^2x}(n=2,3,\cdots)$ 在$[0,+\infty)$ 内的最值,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x),x\geqslant 0$.

第6章 一元函数微分学的应用（二）——中值定理、微分等式与微分不等式

A组

1. 设函数 $f(x)=xe^{\frac{1}{1-x^2}}$，$-1<x<1$，则（　　）.

(A) $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有一个零点　　(B) $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有两个零点

(C) $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有一个零点　　(D) $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有两个零点

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上一阶可导且 $f'(x)\geqslant\frac{1}{4}$，$f(2)\geqslant 0$，则在下列区间上必有 $f(x)\geqslant\frac{1}{4}$ 成立的是（　　）.

(A) $[0,1]$　　(B) $[1,2]$　　(C) $[2,3]$　　(D) $[3,4]$

3. 若可导函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)<2f(x)$，则当 $b>a>0$ 时，必有（　　）.

(A) $b^2f(a)>a^2f(b)$　　(B) $b^2f(a)<a^2f(b)$

(C) $b^2f(\ln a)>a^2f(\ln b)$　　(D) $b^2f(\ln a)<a^2f(\ln b)$

4. 设 $f(x)$ 为可导函数，$a<b$. 若 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)\cdot f'(b)>0$，则方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内（　　）.

(A) 至少有一个实根　　(B) 至多有一个实根

(C) 至少有两个实根　　(D) 至多有两个实根

5. 若方程 $3x^4+4x^3-12x^2+k=0$ 有四个不同的实根，则常数 k 的取值范围为________.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)=f(2)=1$，$f(1)=-1$. 证明：

(1) 存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=2\,024f(\xi)$；

(2) 存在两个不同的点 $\xi_1,\xi_2\in(0,2)$，使得 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=a$，$f(b)=b$. 证明：

(1) 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=a+b-\xi$；

(2) 至少存在一点 $\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\eta)=1$；

(3) 存在两个不同的点 $\eta_1,\eta_2\in(a,b)$，使得 $f'(\eta_1)f'(\eta_2)=1$；

(4) 至少存在一点 $\xi_1\in(a,b)$，使得 $f'(\xi_1)+f(\xi_1)-\xi_1=1$.

8. 设 ξ_a 为函数 $f(x)=\arctan x$ 在区间 $[0,a]$ 上使用拉格朗日中值定理时的中值，求 $\lim\limits_{a\to0^+}\frac{\xi_a}{a}$.

9. 设 k 是常数，讨论函数 $f(x)=(2x-3)\ln(2-x)-x+k$ 在它的定义域内的零点个数.

10. 讨论常数 a 的值，确定曲线 $y = ae^x$ 与 $y = 1 + x$ 的公共点的个数.

11. 设 $x > -2$，证明：$(x-2)e^{\frac{x-2}{2}} - xe^x + 2e^{-2} < 0$.

12. 证明：当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\frac{\sin x}{x} > \sqrt[3]{\cos x}$ 成立.

B组

1. 已知 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且 $f(a) = f(b) = 0$，又 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + \cos f'(x) = e^{f(x)}$，则在$(a,b)$内 $f(x)$(　　).

(A) 不小于 0　　(B) 不大于 0

(C) 恒为 0　　(D) 恒不为 0

2. 设 $f(x) = xe^x - 2x - \cos x$，则它的零点的个数(　　).

(A) 为零　　(B) 恰好 1 个　　(C) 恰好 2 个　　(D) 多于 2 个

3. 设函数 $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix}$，则存在 $\xi \in (-2,4)$，使得 $f'(x)$ 在 $x = \xi$ 处的切线平行于直线(　　).

(A) $y + 2 = 0$　　(B) $x - 4 = 0$

(C) $2y + 40x - 7 = 0$　　(D) $2y - 40x + 7 = 0$

4. 设函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\cos \pi x} = 0, 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(2)$. 证明：存在 $\xi \in (0,2)$，使得 $f''(\xi) = 0$.

5. 设函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上二阶可导，且 $f(0) = f(2)$. 证明：

(1) 存在一点 $\xi \in (0,2)$，使得 $f'(\xi) = \xi - 1$；

(2) 存在一点 $\eta \in (0,2)$，使得 $\eta f''(\eta) + f'(\eta) - 2\eta + 1 = 0$.

6. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且 $f''(x)$ 在$[a,b]$上恒大于零或恒小于零，$f(a) = f(b) = 0$. 证明：存在两个不同的点 $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$，使得 $2[f'(\xi_i)]^2 + f(\xi_i)f''(\xi_i) = 0 (i = 1,2)$.

7. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且 $f'(a) = f'(b) = 0$，证明存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$|f''(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

8. 讨论方程 $axe^x + b = 0 (a > 0)$ 实根的情况.

9. 设函数 $\varphi(x)$ 可导，且 $\varphi(0) = 0$，$\varphi'(x)$ 单调减少，证明：$\forall x \in (0,1)$，$\varphi(1)x < \varphi(x) < \varphi'(0)x$ 成立.

10. 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，比较 $(\sin x)^{\cos x}$ 与 $(\cos x)^{\sin x}$ 的大小.

11. 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[1,3]$上具有三阶导数，且 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x+1)\mathrm{d}x$，$f'(2) = 0$. 证明：存在 $\xi \in (1,3)$，使得 $f'''(\xi) = 0$.

12. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$，$f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) = c \neq 0$，$x_0 \in (a,b)$，且满

足 $x_0 = f(x_0)$.

(1) $\forall x_1 \in [a,b], x_{n+1} = f(x_n)(n = 1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_0}{(x_n - x_0)^2}$.

C组

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且存在常数 $k>0$，使得 $|f'(x)| \leqslant k|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立，则在 $(0,+\infty)$ 内（　　）.

(A) 仅当 $0<k<1$ 时，$f(x)$ 恒为零

(B) 仅当 $k>1$ 时，$f(x)$ 恒不为零

(C) 当 $k=1$ 时，$f(x)$ 不恒为零

(D) k 为任意正常数时，$f(x)$ 均恒为零

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在二阶导数，$f(0)<0, f'(0)=a, f''(x)>0$. 证明：

(1) 无论 $a>0, a<0$ 还是 $a=0$，$f(x)$ 至多有两个零点，至少有一个零点；

(2) 若 $f(x)$ 恰有两个零点，则此两零点必反号.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)| \leqslant 1$，又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$. 证明：在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

4. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $|f(x)| \leqslant 1, 0<|f''(x)| \leqslant 2 (0 \leqslant x < +\infty)$. 证明：

(1) $\forall h>0, |f'(x)| \leqslant \dfrac{2}{h}+h$；

(2) $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{2}$.

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，且存在二阶导数. 证明：至少存在一点 $\xi \in (-\infty,+\infty)$，使得 $f''(\xi)=0$.

6. 若用 $\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ 来近似 $\ln x$，证明当 $x \in [1,2]$ 时，其误差不超过 $\dfrac{1}{12}(x-1)^3$.

7. 设 $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\dfrac{h^2}{2!}f''(x_0)+\dfrac{h^3}{3!}f'''(x_0+\theta h)$，其中 $0<\theta<1$，$f^{(4)}(x)$ 连续且 $f^{(4)}(x_0) \neq 0$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

第 7 章　一元函数微分学的应用（三）——经济应用

A 组

1. 设 m,n,k 均为常数，则下列函数的弹性函数不是常数的是(　　).

(A) $y=mx$　　(B) $y=\dfrac{m}{x}$　　(C) $y=mx+n$　　(D) $y=x^k$

2. 已知一公司生产某产品的平均成本为 $\overline{C}(Q)=Q+\mathrm{e}^{-3Q}$，其中 Q 为产量，则边际成本为(　　).

(A) $3Q-(1+2Q)\mathrm{e}^{-3Q}$　　(B) $2Q-(1+3Q)\mathrm{e}^{-3Q}$

(C) $3Q+(1-2Q)\mathrm{e}^{-3Q}$　　(D) $2Q+(1-3Q)\mathrm{e}^{-3Q}$

3. 设生产某商品的固定成本为 50 000 元，可变成本为 30 元 / 件，价格函数为 $p=60-\dfrac{Q}{1\,200}$（p 是单价，单位：元；Q 是销量，单位：件）. 已知产销平衡，则使得利润最大的单价 $p=$ ________.

4. 设某商品的需求函数为 $Q=300-p^2$，Q 为需求量（单位：件），p 为价格（单位：元），则当收益最大时，需求对价格的弹性为________.

B 组

1. 某产品的成本函数 $C(q)=aq^2+bq+c$，需求函数 $q=\dfrac{1}{\alpha}(\beta-p)$，其中 $c>0$ 为固定成本，a,b,α,β 均为正常数，$\beta>b$，q 为需求量（需求量等于产量），p 为该产品的单价，若利润最大，则产量 $q=$ ________.

2. 设某商品的平均成本为 $\overline{C}=k_0+k_1Q^3-k_2Q^2$，其中 k_0,k_1,k_2 为正常数，Q 为产量，则总成本曲线的拐点为________.

C组

1. 设某种产品的需求函数是 $Q=a-bP$，其中 Q 是该产品的销售量，P 是该产品的价格，常数 $a>0,b>0$，且该产品的总成本函数为 $C=\frac{1}{3}Q^3-\frac{17}{2}Q^2+108Q+36$. 已知当边际收益 $MR=56$ 以及需求的价格弹性 $\eta=-\frac{41}{13}$ 时，出售该产品可获得最大利润，求常数 a 和 b 的值，并求利润最大时的产量.

第8章 一元函数积分学的概念与性质

A组

1. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos x$，则 $f'(x)$ 等于(　　).

(A) $\cos x$　　(B) $-\cos x$　　(C) $\sin x$　　(D) $-\sin x$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\geqslant 0,\\ \sin x, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则在区间 $(-1,1)$ 内(　　).

(A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都存在原函数

(B) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都不存在原函数

(C) $f(x)$ 存在原函数，$g(x)$ 不存在原函数

(D) $f(x)$ 不存在原函数，$g(x)$ 存在原函数

3. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{x^2}+x^2, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是(　　).

(A) 可导的奇函数　　(B) 连续，但在 $x=0$ 处不可导的奇函数

(C) 可导的偶函数　　(D) 连续，但在 $x=0$ 处不可导的偶函数

4. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则下列说法正确的是(　　).

(A) $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在原函数　　(B) $g'(0)$ 存在

(C) $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在原函数　　(D) 令 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(0)$ 存在

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，$f''(x)>0$，且满足 $|f(x)|\leqslant x^2$，记 $I=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$，则(　　).

(A) $I>0$　　(B) $I<0$

(C) $I=0$　　(D) I 与 0 的大小关系不确定

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且为单调减少的正值函数，记 $I_1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^1 f(\sin x)\mathrm{d}x$，$I_3=\int_0^1 \sin f(x)\mathrm{d}x$，则(　　).

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$

(C) $I_2<I_3<I_1$　　(D) $I_3<I_1<I_2$

7. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^6 x\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^6 x)\mathrm{d}x, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^6 x)\mathrm{d}x$，则(　　).

(A)$N<P<M$　　(B)$M<P<N$　　(C)$N<M<P$　　(D)$P<M<N$

8. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，且对 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x_1+x_2)+2f(x_1-x_2)=3f(x_1)-f(x_2),$$

则$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=$(　　).

(A)-1　　(B)0　　(C)1　　(D)2

9. 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,2]$上连续，且满足 $f(x)=\int_0^1 e^{x+t}f(t)\mathrm{d}t+x$，则$\frac{f(0)}{f(2)}=$(　　).

(A) $\frac{1}{3e^2}$　　(B) $\frac{1}{2e^2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{2}$

10. $\int e^{-|x|}\mathrm{d}x=$(　　).

(A)$\begin{cases}-e^{-x}+C, & x\geqslant 0,\\ e^{x}+C, & x<0\end{cases}$　　(B)$\begin{cases}-e^{-x}+C, & x\geqslant 0,\\ e^{x}-2+C, & x<0\end{cases}$

(C)$\begin{cases}-e^{-x}+C, & x\geqslant 0,\\ e^{x}+C+2, & x<0\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}e^{x}+C, & x\geqslant 0,\\ -e^{-x}+C, & x<0\end{cases}$

11. 下列反常积分中，收敛的是(　　).

(A)$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$　　(B)$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-1)}$

(C)$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)}}$　　(D)$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}=$________.

13. 已知 $f(x)=a^{x^3}$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$________.

14. 已知 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\neq 0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}2\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right], & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

15. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续，且 $f(x)>0$，证明函数 $F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 在$(0,+\infty)$内单调增加.

B组

1. 设 $f(u)$ 为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，a 为常数，则下述积分为 x 的偶函数的是(　　).

(A)$\int_a^x du\int_0^u f(v^2)dv$　　　　(B)$\int_a^x du\int_0^u f(v^3)dv$

(C)$\int_a^x du\int_0^u [f(v)]^2 dv$　　　　(D)$\int_a^x du\int_0^u [f(v)]^3 dv$

2. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的连续函数，$G(x)=2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt$，则(　　).

(A)$G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，$G'(x)$ 也是以 2 为周期的周期函数

(B)$G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，$G'(x)$ 不是以 2 为周期的周期函数

(C)$G(x)$ 不是以 2 为周期的周期函数，$G'(x)$ 是以 2 为周期的周期函数

(D)$G(x)$ 不是以 2 为周期的周期函数，$G'(x)$ 也不是以 2 为周期的周期函数

3. 下列反常积分中，收敛的是(　　).

(A)$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x^3}}$　　　　(B)$\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+2}}$

(C)$\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}\ln(1+x)}$　　　　(D)$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{e^{x^4}}$

4. 设 $a>0$，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x^{\frac{a+1}{2}}}, & 0<x<1,\\ \dfrac{\ln\left(1+\sin\dfrac{1}{x^a}\right)}{x^b\ln\cos\dfrac{1}{x}}, & 1\leqslant x<+\infty.\end{cases}$ 若 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则(　　).

(A)$a>3$ 且 $a+b>3$　　　　(B)$a>3$ 且 $a+b<3$

(C)$a<3$ 且 $a+b>3$　　　　(D)$a<3$ 且 $a+b<3$

5. 设 m 与 n 都是常数，若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^n(1-e^{-x})}{(1+x)^m}dx$ 收敛，则 m 与 n 的取值范围为(　　).

(A)$n>-2, m>n+1$　　　　(B)$n>-2, m<n+1$

(C)$n<-2, m<n+1$　　　　(D)$n<-2, m>n+1$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=$ ______.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{3n}{4n}\right)=$ ______.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(n+1)(n+2)}=$ ______.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{3^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{3^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)=$ ______.

10. 设 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，且 $f(x)=x+x\int_0^1 f(x)dx+x^2\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$，求 $f(x)$.

11. 已知 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，$f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)dx$，求 $f(x)$.

12. 比较 $\int_0^1\frac{x\sin\frac{\pi}{2}x}{1+x}dx$ 与 $\int_0^1\frac{x\cos\frac{\pi}{2}x}{1+x}dx$ 的大小关系，并说明理由.

13. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$，若在定义域 $(0,+\infty)$ 内，有 $f(x)F(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$，求 $f(x)$.

14. 设 $f(x)$ 连续，且积分 $\int_0^1[f(x)+xf(xt)]\mathrm{d}t$ 的结果与 x 无关，求 $f(x)$.

C组

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，下述命题中

① 对任意 a，$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$ 的充要条件是 $f(x)$ 为奇函数；

② 对任意 a，$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 的充要条件是 $f(x)$ 为偶函数；

③ 对任意 a，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 具有周期 T 的充要条件是 $f(x)$ 具有周期 T.

正确的个数为（　　）.

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

2. 下列反常积分中，收敛的是（　　）.

(A)$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+x^3}\mathrm{d}x$　　(B)$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

(C)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin 2x}}\mathrm{d}x$　　(D)$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x\ln x}}\mathrm{d}x$

3. 若反常积分 $\int_0^1 x^a(1-x)^b\ln x\mathrm{d}x$ 收敛，则（　　）.

(A)$a<-1$ 且 $a+b>-3$　　(B)$b<-2$ 且 $a+b>-3$

(C)$a>-1$ 且 $b<-2$　　(D)$a>-1$ 且 $b>-2$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+\frac{1+1}{n}}+\frac{1}{n+\frac{4+1}{n}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{(n-1)^2+1}{n}}\right]=$ ________.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且满足

$$f(x)=\frac{\ln x}{(1+x)^2}+\frac{1+x^2}{1+x^4}\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x,$$

则 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

第 9 章　一元函数积分学的计算

A 组

1. 设函数 $f(x)$ 有连续导数，当 $x>0$ 时，满足 $f(\ln x)=\dfrac{1}{x^2}$，则 $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=($　　$)$.

(A) $\dfrac{3e^{-2}-1}{2}$　　(B) $\dfrac{3e^{2}-1}{2}$　　(C) $\dfrac{e^{-2}+1}{2}$　　(D) $\dfrac{e^{2}+1}{2}$

2. 计算下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\mathrm{d}x=$ ________；　(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x=$ ________；

(3) $\displaystyle\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=$ ________；　(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}\mathrm{d}x=$ ________；

(5) $\displaystyle\int \frac{\sin x-3\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x=$ ________；　(6) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$ ________；

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=$ ________；　(8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}=$ ________；

(9) $\displaystyle\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=$ ________；

(10) 设 $f(x)$ 连续，$\displaystyle\int \frac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x=\sin x+C$，则 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

3. 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & x>1,\end{cases}$ 且 $f(0)=0$，则 $f(x)=$ ________.

4. $\displaystyle\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x=$ ________.

5. $\displaystyle\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x=$ ________.

6. 计算下列定积分.

(1) 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，$f(1)=0$，则 $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=$ ________；

(2) $\displaystyle\int_0^2 |x-x^2|\mathrm{d}x=$ ________；

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3e^x\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x=$ ________；

(4) $\int_0^1 \frac{x}{e^x + e^{1-x}} dx =$ ________.

7. 设 $\frac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_1^e xf'(x)dx =$ ________.

8. 设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\left[\int_0^x tf(x^2 - t^2)dt\right] =$ ________.

9. 求定积分 $\int_1^2 \frac{2x^2 + x + 1}{(2x-1)(2x^2 + x - 1)} dx$.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geqslant 0, \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0, \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1)dx$.

11. 已知 $f(x)$ 为连续函数，$\int_0^x tf(x-t)dt = 1 - \cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ 的值.

12. 设 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$，其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + 1), & 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{1}{3}(x-1), & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

求 $g(x)$，并判定其在 $[0,2]$ 上的连续性与可导性.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导，$f(0) = 0$，且存在反函数 $g(x)$. 若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt + \int_0^x f(t)dt = xe^x - e^x + 1$，求 $f(x)$.

B组

1. 设 $a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$，$b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{na_n}{b_n} =$ (　　).

(A) 1　　(B) 0　　(C) -1　　(D) ∞

2. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有一阶导数，且 $f'(x) > 0$，则 $F(x) = \int_a^b |f(x) - f(t)| dt$ 在开区间 (a,b) 内(　　).

(A) 严格单调增加　　(B) 严格单调减少
(C) 存在极大值点　　(D) 存在极小值点

3. 设函数 $f(x) = \int_0^1 |x - t| dt + \int_0^x \sqrt{x^2 - t^2} dt \ (0 < x < +\infty)$，则 $f(x)$(　　).

(A) 仅有最小值　　(B) 仅有最大值
(C) 既有最小值又有最大值　　(D) 既无最小值又无最大值

4. 计算下列积分.

(1) $\int_0^1 \arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}} dx =$ ________;　　(2) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{\sqrt{x^3}} dx =$ ________;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(ex)}{1+x^2}dx=$ ________.

5. 求 $\int_{-2}^{2}\max\left\{x^2,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right\}dx$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，且对任意正值 a 与 b，积分 $\int_a^{ab}f(x)dx$ 的值与 a 无关，且 $f(1)=1$，求 $f(x)$.

7. 求不定积分 $\int\frac{1}{x^3}\arcsin\frac{1}{x}dx$.

8. 求 $\int_{e^{\frac{1}{4}}}^{e^{\frac{1}{2}}}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

9. 求 $I=\int_0^{\ln 2}\frac{xe^x}{e^x+1}dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{xe^x}{e^x-1}dx$.

10. 求 $I=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}e^{-t^2}dt$.

11. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $f(x)=x+\int_0^{\pi}f(x)\sin^5 x dx$，求 $\int_0^{\pi}f(x)\cos^4 x dx$.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}x\right), & x>0,\\ 1, & x=0,\\ f(-x), & x<0.\end{cases}$

(1) 求 $f'(0)$；

(2) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的最大值.

13. 设 $f(x)=\min\{(x-k)^2,(x-k-2)^2\}$，$k$ 为任意实数，$g(k)=\int_0^1 f(x)dx$. 求 $g(k)$ 在 $-1\leqslant k\leqslant 1$ 上的最值.

14. 设 $\lambda\in\mathbf{R}$，证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\tan x)^{\lambda}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\cot x)^{\lambda}}dx=\frac{\pi}{4}$.

C组

1. 设可导函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的值域是 $[0,+\infty)$，$f(0)=0$，$f'(x)>0$，$x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. 记 $I=\int_0^a f(x)dx+\int_0^b\varphi(y)dy$，常数 $a,b>0$，若 $a<\varphi(b)$，则(　　).

(A) $I>ab$　　(B) $I<ab$

(C) $I=ab$　　(D) I 与 ab 的大小关系不确定

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^{2}(\arctan nx)^3dx=$ ________.

3. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$（$n$ 为非负整数），证明：

(1) $I_n+I_{n-2}=\dfrac{1}{n-1}(n\geqslant 2)$，并由此求 I_n；

(2) $\dfrac{1}{2(n+1)}<I_n<\dfrac{1}{2(n-1)}(n\geqslant 2)$.

4. 求 $I_n=\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x$.

5. 求$\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\left[\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\right]'\right|\ln\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$（$n$ 为正整数）.

6. 设 n 为正整数，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x$.

(1) 证明：$I_n-I_{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2}{2n-1}(n\geqslant 2)$；

(2) 求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 6x}{\sin x}\mathrm{d}x$.

第 10 章 一元函数积分学的应用（一）——几何应用

A 组

1. 设曲线 $y=2\sqrt{x}$ 与其上一点 $(t,2\sqrt{t})$ 处的切线以及直线 $x=1,x=3$ 围成的平面区域的面积记为 $A(t),t>0$，则当 $A(t)$ 取得最小值时相应切线的方程为（　　）.

(A) $y=\sqrt{2}x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(B) $y=x+\dfrac{1}{2}$

(C) $y=\dfrac{x}{2}+2$　　(D) $y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$

2. 圆域 $D=\{(x,y)\mid(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2\}(b>R>0)$ 绕直线 $y=-1$ 旋转一周所形成的旋转体的体积为（　　）.

(A) $4\pi^2(b+1)R^2$　　(B) $2\pi^2(b+1)R^2$

(C) $4\pi^2(b-1)R^2$　　(D) $2\pi^2(b-1)R^2$

3. 设曲线 $y=\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴，y 轴所围图形被曲线 $y=a\sin x(a>0)$ 分成面积相等的两部分，则常数 a 的值为________.

4. 设 D 是由曲线 $y=x^3(x\geqslant0)$ 与直线 $y=ax$ 所围成的平面图形，已知 D 分别绕两坐标轴旋转一周所形成的旋转体的体积相等，则常数 a 的值为________.

5. 设 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant y\leqslant\sqrt{4x-x^2},x\leqslant1\right\}$，则 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为________.

6. 求曲线 $y=x^2-2x(1\leqslant x\leqslant3)$ 与直线 $y=0,x=1,x=3$ 所围成的封闭图形的面积，并求该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

7. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过 $(0,0)$ 和 $(1,2)$ 两点，其中 $a<-2$. 求 a,b,c 的值，使得该抛物线与曲线 $y=-x^2+2x$ 所围成区域的面积最小.

8. 设曲线 $y=ax^2(x\geqslant0$，常数 $a>0)$ 与曲线 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形 D.

(1) 求 D 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积 $V(a)$；

(2) 求 a 的值使 $V(a)$ 为最大.

B组

1. 由曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与直线 $y=x$ 围成的平面图形绕直线 $x=2$ 旋转一周得到的旋转体的体积为(　　).

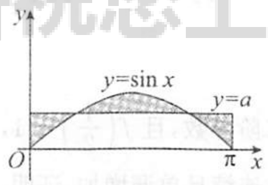
(A) $\frac{\pi^2}{2}+\frac{2\pi}{3}$　　(B) $\frac{\pi^2}{2}+\frac{4\pi}{3}$　　(C) $\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}$　　(D) $\frac{\pi^2}{2}-\frac{4\pi}{3}$

2. $f(x)=\int_x^1 \cos t^2\,\mathrm{d}t$ 在区间$[0,1]$上的平均值为________.

3. 求曲线 $y=\int_0^x \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ 与 y 轴及其 $x\to+\infty$ 方向的水平渐近线所围图形的面积.

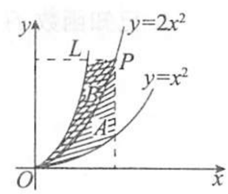
4. 求曲线 $y=\frac{\cos x}{x}\sqrt{\sin x}$ 在$[\pi,4\pi]$上与 x 轴所围图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积.

5. 如图所示，阴影部分由曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$，直线 $y=a\ (0\leqslant a\leqslant 1)$，$x=\pi$ 以及 y 轴围成. 此图形绕直线 $y=a$ 旋转一周形成旋转体. 问 a 为何值时，旋转体有最小体积、最大体积？



6. (1) 如图所示，设曲线 L 具有如下性质：中间曲线 $y=2x^2(x>0)$ 上每一点 P 都使得图中 A 的面积等于 B 的面积. 求曲线 L 的方程；

(2) 如图所示，A,B 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积相等，求曲线 L 的方程.



C组

1. 圆域 $D=\{(x,y)\mid(x-3)^2+(y-4)^2\leqslant 5\}$ 绕直线 $4x-3y-20=0$ 旋转一周所形成的旋转体的体积为________.

2. 设 b 为常数，且介于曲线 $y=\frac{x^3+bx+1}{x(x+1)}$ 与它的斜渐近线之间的从 $x=1$ 延伸到 $x\to+\infty$ 的图形的面积为有限值，求 b 及该面积的值.

3. (1) 设一个圆的半径为 a，圆外有一条距圆心为 ρ 的直线 L，记圆绕 L 旋转一周所得旋转体体积为 V_0，求 V_0；

(2) 两个相互外切的圆同时内切于半径为 R 的圆 M，三圆心共线. 连接三圆心的直线垂直于圆 M 外的直线 EF，且圆心 M 到 EF 的距离为 $2R$. 求两个小圆的半径，使得这3个圆所围成的平面图形绕 EF 旋转时所得旋转体体积最大.

第 11 章　一元函数积分学的应用（二）
——积分等式与积分不等式

A组

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a+b-\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 证明：$\dfrac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}\leqslant\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^2$.

3. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，$f''(x)>0$，证明：$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant 1$.

4. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证明：

$$\int_a^b \frac{b-x}{b-a}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

B组

1. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续且单调减少的正值函数，则对于任意的 $a,b(0<a<b<1)$，下列结论不正确的是(　　).

(A) $a\displaystyle\int_0^b f(x)\mathrm{d}x>b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　(B) $b\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x>a\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$

(C) $a\displaystyle\int_0^b \sqrt{f(x)}\mathrm{d}x<b\int_0^a \sqrt{f(x)}\mathrm{d}x$　　(D) $b\displaystyle\int_0^a \sqrt{f(x)}\mathrm{d}x<b\int_0^b \sqrt{f(x)}\mathrm{d}x$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $\displaystyle\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t=(1-\xi)f(\xi)$. 若 $f(x)>0$ 且单调减少，则 ξ 是唯一的.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

4. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且单调减少，证明：

(1) 对任意的 $x\in(0,1)$，有 $\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t<(1-x)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$；

(2) 对任意的 $x\in[0,1)$，有 $\int_x^1 (t-x)f(t)\mathrm{d}t<\dfrac{(1-x)^2}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续的导数，证明：

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x,\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}.$$

C组

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在一阶导数，且 $|f'(x)|\leqslant M$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：当 $x\in[a,b]$ 时，$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant \dfrac{1}{8}(b-a)^2M$.

2. (1) 证明不等式

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n;$$

(2) 证明数列 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln(n+1)$ 单调增加，且 $0<a_n<1$；

(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}}{\ln n}$.

3. (1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续且不恒为零，证明：必有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$；

(2) 在 $[0,2]$ 上是否存在可导函数 $f(x)$，满足

$$f(0)=f(2)=1,\ |f'(x)|\leqslant 1,\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 1,$$

并说明理由.

第 12 章　一元函数积分学的应用（三）——经济应用

A组

1. 已知某商品的边际需求函数为 $Q'(p)=-4p$，最大需求量为 100，则该商品的边际收益函数为______.

B组

1. 当某种商品生产到第 Q 件时，平均成本的边际值为 $-\frac{1}{16}-\frac{20}{Q^3}$，又知每件商品的销售价格为

$$P=\frac{247}{8}-\frac{11}{16}Q+\frac{10}{Q^2}\text{（万元）},$$

而每销售一件商品需纳税 2 万元. 已知生产 2 件商品时的平均成本为 6.25 万元，求生产水平为多少件时，税后利润最大？并求此时的销售价格.

2. 某企业投资 12 百万元建成一条生产线，投产后为使收益保持在 24 百万元 / 年，必须在时间 t 追加投入 $\varphi(t)=8+2t^{\frac{3}{4}}$（百万元 / 年），求该生产线在何时停产可使企业获得最大利润？并求最大利润.

C组

1. 设某设备的购进价格（最初成本）为 A 万元，在时刻 t 设备产生的效益为 $v(t)=\frac{2A}{73}e^{-\frac{t}{365}}$（万元 / 天），而在时刻 t 转售出去的售价为 $r(t)=\frac{10A}{11}e^{-\frac{t}{730}}$（万元）.

（1）设使用了 T 天后转售该设备，问 T 为多少时售出总收益最大？

（2）若银行存款的年利率为 5%，且以连续复利计算，问 T 为多少时售出总收益的现值最大？

第13章 多元函数微分学

A组

1. 设 $F(x,y)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{x-y}}$，其中 $x\neq y$，且 $xy>0$。又设

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{y\to x}F(x,y), & x\neq 0,\\ \mathrm{e}, & x=0,\end{cases}$$

则点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的(　　).

(A) 连续点　　(B) 可去间断点

(C) 跳跃间断点　　(D) 无穷间断点

2. 设函数 $f(x,y)$ 连续，$f(0,0)=0$，又设 $F(x,y)=|x-y|f(x,y)$，则 $F(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处(　　).

(A) 连续，但不可微　　(B) 连续，但偏导数不存在

(C) 偏导数存在，但不可微　　(D) 可微

3. 设函数 $u=u(x,y)$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid x+y\neq 0\}$，其全微分为 $\mathrm{d}u=\dfrac{y}{(x+y)^2}\mathrm{d}x-\dfrac{x+ky}{(x+y)^2}\mathrm{d}y$，则 k 等于(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

4. 设 $y=f(x)$ 是由方程 $F\left(\ln\dfrac{x}{y},\dfrac{x^2-y^2}{xy}\right)=0$ 确定的函数，其中函数 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $F'_u\cdot F'_v>0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$(　　).

(A) $\dfrac{y}{x}$　　(B) $\dfrac{x}{y}$　　(C) $-\dfrac{y}{x}$　　(D) $-\dfrac{x}{y}$

5. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 确定的 x,y 的函数，其中 f,F 均具有一阶连续偏导数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$(　　).

(A) $\dfrac{f'_xF'_t+f'_tF'_x}{F'_t}$　　(B) $\dfrac{f'_xF'_t-f'_tF'_x}{F'_t}$　　(C) $\dfrac{f'_xF'_t+f'_tF'_x}{f'_tF'_y+F'_t}$　　(D) $\dfrac{f'_xF'_t-f'_tF'_x}{f'_tF'_y+F'_t}$

6. 设方程 $x+y^2+\sin(xy)=0$，根据隐函数存在定理，在点 $(0,0)$ 的某邻域内，该方程(　　).

(A) 只可以确定一个具有连续导数的隐函数 $y=y(x)$

(B) 只可以确定一个具有连续导数的隐函数 $x=x(y)$

(C) 可以确定两个具有连续导数的隐函数 $x=x(y)$ 和 $y=y(x)$

(D) 不可以确定任何一个具有连续导数的隐函数

7. 若函数 $u=xyf\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$，其中 f 是可微函数，$f\neq 0$，且 $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=G(x,y)u$，则函数$G(x,y)=($　　$)$.

(A)$x+y$　　(B)$x-y$　　(C)x^2-y^2　　(D)$(x+y)^2$

8. 函数 $z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$ 的极小值点是(　　).

(A)(0,0)　　(B)(2,2)　　(C)(0,2)　　(D)(2,0)

9. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{2xy}, & xy\neq 0,\\ x, & xy=0,\end{cases}$ 则 $f_x'(0,1)=$ ________.

10. 已知函数 $f(x,t)=\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,t>0$，若 $a\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial f}{\partial t}\equiv 0,a,b$ 为常数且 $a>0$，则 $b=$ ________.

11. 设 $z=f(x^2+y^2,x+y)$，其中函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f_{uu}''(5,3)=2,f_{uv}''(5,3)=3,f_{vv}''(5,3)=4$，则$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=$ ________.

12. 设 $z=y^2\ln(1-x^2)$，求$\dfrac{\partial^n z}{\partial x^n}(n\geqslant 1)$.

13. 设 $z=\mathrm{e}^{-x}-f(x-2y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

14. 设函数 $f(x,y,z)=\mathrm{e}^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，求$f_x'(0,1,-1)$.

15. 设 $u=u(x,y)$ 可微，又设 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$.

(1) 当 $r\neq 0$ 时，用 u 对 r,θ 的一阶偏导数表示 $x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}$；

(2) 设 $x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2\neq 0)$，求 $u(x,y)$ 的表达式.

16. 已知$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y+1,\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+2y+3,u(0,0)=1$. 求 $u(x,y)$ 及 $u(x,y)$ 的极值，并说明是极大值还是极小值.

17. 求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

18. 已知矩形的周长为 $2p$，将它绕其中一边旋转一周构成一个旋转体(圆柱体)，问该圆柱体的半径与高各为多少时，该圆柱体体积最大？

19. 求 $f(x,y)=x+xy-x^2-y^2$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$ 上的最大值和最小值.

B组

1. 设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}[x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}]$，则在点 $(0,1)$ 处的两个偏导数 $f'_x(0,1)$ 和 $f'_y(0,1)$ 的情况为（　　）.

(A) 两个偏导数均不存在　　(B) $f'_x(0,1)$ 不存在，$f'_y(0,1)=\dfrac{4}{3}\mathrm{e}$

(C) $f'_x(0,1)=\dfrac{\mathrm{e}}{3}$，$f'_y(0,1)=\dfrac{4}{3}\mathrm{e}$　　(D) $f'_x(0,1)=\dfrac{\mathrm{e}}{3}$，$f'_y(0,1)$ 不存在

2. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<3\}$ 上可微，$f(0,0)=0$，且对任意 $(x,y)\in D$，有 $\dfrac{\partial f}{\partial x}<-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}>\dfrac{1}{2}$，则下列结论正确的是（　　）.

(A) $f(1,1)<0$　　(B) $f(-1,-1)<-1$

(C) $f(1,-1)>0$　　(D) $f(-1,1)>1$

3. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，$f(x,0)=2x+1$，$f'_y(1,y)=y+1-\mathrm{e}^{-y}$，$f''_{xy}(x,y)=2x+y$，则 $f(x,y)=$（　　）.

(A) $x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2-\mathrm{e}^{-y}-2x$　　(B) $xy^2-\dfrac{1}{2}x^2y-\mathrm{e}^{-y}-2x$

(C) $x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+\mathrm{e}^{-y}+2x$　　(D) $xy^2+\dfrac{1}{2}x^2y+\mathrm{e}^{-y}+2x$

4. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的某一邻域内有定义，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\cos(x^2+y^2)-1}=1$，则下列结论不正确的是（　　）.

(A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续　　(B) $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$ 都存在但不为零

(C) $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$　　(D) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

5. 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，若 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-2x-3y}{(x^2+y^2)^{\alpha}}=1$，其中 $\alpha>0$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分必要条件是（　　）.

(A) $\alpha<\dfrac{1}{2}$　　(B) $\alpha=\dfrac{1}{2}$　　(C) $\alpha>\dfrac{1}{2}$　　(D) $\alpha>1$

6. 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中函数 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某一邻域内有定义，则函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分必要条件是（　　）.

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=0$　　(B) $\varphi'_x(0,0)$ 与 $\varphi'_y(0,0)$ 都存在

(C) $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续　　(D) $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

7. 设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，且满足 $z(x,3x)=x^2$，$z'_1(x,3x)=x^3$，则 $z''_{12}(x,3x)=$（　　）.

(A) $\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{1}{12}$　　(B) $\dfrac{5}{4}x^2+\dfrac{1}{12}$　　(C) $\dfrac{4}{5}x^2-\dfrac{1}{12}$　　(D) $\dfrac{4}{5}x^2+\dfrac{1}{12}$

8. 函数 $z=\dfrac{x^2}{2}+xy+\dfrac{y^2}{2}-2x-2y+5$（　　）.

(A) 有无穷多个极小值点，没有极大值点

(B) 有无穷多个极大值点，没有极小值点

(C) 有无穷多个极大值点，也有无穷多个极小值点

(D) 既没有极大值点，也没有极小值点

9. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x^3+y^3-3x^2-3y^2}=1$，则(　　).

(A) $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值　　(B) $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值

(C) $f(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值　　(D) 不能确定 $f(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值

10. 设函数 $u=u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有连续偏导数，且满足 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1+u^2$，则(　　).

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

(B) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得

(C) $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得，最小值在 D 的边界上取得

(D) $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得，最大值在 D 的边界上取得

11. 设 $f(x,y)$ 与 $G(x,y)$ 均为可微函数，且 $G'_y(x,y)\neq 0$. 已知点 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $G(x,y)=0$ 下的一个极值点，则下列选项正确的是(　　).

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

12. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $z+e^z=xy$ 确定的二元函数，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{z=0}=$ ________.

13. 设 $z=x\ln[(1+y^2)e^{x^2\sin y}]$，则 $\dfrac{\partial^4 z}{\partial y^2\partial x^2}=$ ________.

14. 设 $z=x^y, x=\sin t, y=\tan t$，则全导数 $\dfrac{dz}{dt}=$ ________.

15. 设 $g(x,y)=f(2xy,x^2-y^2)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}}+\left.\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}}=$ ________.

16. 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，且 $F(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right), r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=$ ________.

17. 函数 $f(x,y)=e^{-x}(ax+b-y^2)$，若 $f(-1,0)$ 为其极大值，则 a,b 满足________.

18. 设函数 $f(x,y)$ 可微，又 $f(0,0)=0, f'_x(0,0)=a, f'_y(0,0)=b$，且 $\varphi(t)=f[t,f(t,t^2)]$，求 $\varphi'(0)$.

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，$f(1)=1$，且满足

$$\int_1^{xy}f(t)dt=x\int_1^{y}f(t)dt+y\int_1^{x}f(t)dt\,(x\geqslant 1,y\geqslant 1).$$

求：

(1) $f(x)$ 的表达式；

(2) 由方程 $F[xe^{x+y},f(xy)]=x^2+y^2$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,其中 $F(u,v)$ 是可微的二元函数.

20. 已知$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\x^2+2y^2+3z^2=20,\end{cases}$ 求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

21. 设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,在点$(1,0)$ 的某邻域内,$f(x,y)=1-2x+3y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$,问:函数 $g(x,y)=f(\cos x,x^2+y^2)$ 在点$(0,0)$ 处是否取得极值?若取得极值,则判断取极大值还是极小值;若不取得极值,则说明理由.

22. (1) 设 $x>0,y>0,z>0$,求函数 $f(x,y,z)=xyz^3$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=5R^2(R>0$ 为常数$)$ 下的最大值;

(2) 由(1) 的结论证明:当 $a>0,b>0,c>0$ 时,

$$abc^3\leqslant 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

23. 已知函数 $u=u(x,y)$ 满足方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$. 确定参数 a,b,利用变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$ 将原方程变形,使新方程中不含有一阶偏导数项.

24. 设A,B,C为常数,$AC-B^2<0,A\neq 0,u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数. 证明:必存在非奇异线性变换

$$\xi=\lambda_1x+y,\eta=\lambda_2x+y(\lambda_1,\lambda_2\text{ 为常数}),$$

将方程 $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化成$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

C组

1. 设二元函数

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

则下述命题

① $f'_x(0,0)=0,f'_y(0,0)=0$;

② 若 $z=f[\sin t,\ln(1+t)]$,则$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$.

正确与否的结论是(   ).

(A)① 正确,② 不正确
(B)① 不正确,② 正确
(C)① 与 ② 都正确
(D)① 与 ② 都不正确

2. 设函数 $z=xy\ln x$,则 $\mathrm{d}(\mathrm{d}z)=$ ________.

3. 设函数 $f(x,y)$ 可微,$f'_y(x,y)=xf(x,y)$,$f(1,0)=1$,且当$x\neq 0$时,$\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h,0)}{f(x,0)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$,

求 $f(x,y)$.

4. 设 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处的某邻域 U 内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=a$，常数 $a>\dfrac{1}{2}$. 讨论 $f(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值，若是极值，判断是极大值还是极小值.

5. 在第一象限的椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上求一点，使原点到过该点的法线的距离最大.

6. 设 $z=z(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $z=z(x+y,x-y)$ 满足微分方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1.$$

(1) 求 $z=z(u,v)$ 所满足关于 u,v 的微分方程；

(2) 由(1) 求出 $z=z(x+y,x-y)$ 的一般表达式.

7. 设 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，证明无零值的函数 $u(x,y)$ 可分离变量（即 $u(x,y)=f(x)g(y)$）的充分必要条件是 $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

第 14 章　二重积分

A组

1. 设 $I_1=\iint\limits_D \sin\sqrt{\dfrac{x+y}{4}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $I_2=\iint\limits_D \sin\dfrac{x+y}{4}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $I_3=\iint\limits_D \sin\left(\dfrac{x+y}{4}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2\}$,则(　　).

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$

(C) $I_3<I_1<I_2$　　(D) $I_2<I_3<I_1$

2. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid (x-2)^2+(y-1)^2\leqslant 1\}$,比较 $I_1=\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$ 的大小,则有(　　).

(A) $I_1=I_2$　　(B) $I_1>I_2$　　(C) $I_1<I_2$　　(D) 不能比较

3. 设 $f(x,y)$ 为连续函数,$\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\mathrm{d}x\int_{-\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x-1}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序后为(　　).

(A) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2+y}^{y+1} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y+1}^{y^2+y} f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2+y}^{y+1} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y+1}^{y^2+y} f(x,y)\mathrm{d}x$

4. $\int_0^1 y^2\mathrm{d}y\int_1^y \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x=$ (　　).

(A) $\dfrac{1}{6}(1-\sqrt{2})$　　(B) $\dfrac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$

(C) $\dfrac{1}{3}(1-\sqrt{2})$　　(D) $\dfrac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$

5. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,则二重积分 $\iint\limits_D (\mathrm{e}^{\lambda x}-\mathrm{e}^{-\lambda y})\mathrm{d}\sigma(\lambda\neq 0)$ 的值(　　).

(A) 恒为零　　(B) 恒为负

(C) 恒为正　　(D) 当 $\lambda>0$ 时为正,当 $\lambda<0$ 时为负

6. 设 $f(t)$ 为连续函数,则累次积分 $\int_0^{2R}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x(R>0)$ 化为极坐标形式的累次积分为(　　).

(A) $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2R\sin\theta}f(r^2)rdr$　　(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}f(r^2)rdr$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\sin\theta}f(r^2)rdr$　　(D) $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}f(r^2)rdr$

7. 记双纽线 $(x^2+y^2)^2=2^2(x^2-y^2)$ 围成的平面区域为 D，则二重积分 $\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma=$（　　）.

(A) π　　(B) 2π　　(C) 3π　　(D) 4π

8. 设 $f(x)$ 是连续的正值函数，$I=\int_0^1 f(x)dx=\iint\limits_D f(x)f(y)dxdy$，$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant y\}$，则 $I=$（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

9. $\int_0^1 dy\int_0^1\sqrt{e^{2x}-y^2}dx+\int_1^e dy\int_{\ln y}^1\sqrt{e^{2x}-y^2}dx=$（　　）.

(A) $\frac{\pi}{8}(e^2-1)$　　(B) $\frac{\pi}{8}(e^2+1)$　　(C) $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$　　(D) $\frac{\pi}{4}(e^2+1)$

10. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $I=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)dy+\int_2^{2\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)dy=$（　　）.

(A) $\int_0^2 dy\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)dx$　　(B) $\int_0^2 dy\int_1^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)dx$　　(D) $\int_0^2 dy\int_{\sqrt{2y}}^1 f(x,y)dx$

11. 设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{1}{2}}dx\int_{\frac{1}{4x}}^{2x}f(x,y)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\frac{1}{2x}}f(x,y)dy=$（　　）.

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

12. 设函数 $f(x)=x\int_x^{\pi}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du$，则 $\int_0^{\pi}f(x)dx=$（　　）.

(A) $\frac{\pi}{6}$　　(B) $\frac{\pi}{4}$　　(C) $\frac{\pi}{3}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

13. 设 $D=\{(x,y)\mid 2(x-1)^2+3(y-2)^2\leqslant 6\}$，则 $\iint\limits_D(x+y)dxdy=$ ________.

14. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2,t>0\}$，则极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)d\sigma=$ ________.

15. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{2-x}f(x,y)dy$ 交换积分次序后等于________.

16. 计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=x-4$ 与曲线 $y^2=2x$ 所围成的区域.

17. 计算 $I=\iint\limits_{D}(x^2+xy)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

18. 计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}+x\}$.

19. 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\mathrm{e}\}$，计算 $\iint\limits_{D}x\mid y-\mathrm{e}^x\mid\mathrm{d}\sigma$.

20. 计算 $\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{e}^{\max\{b^2x^2,a^2y^2\}}\mathrm{d}y$，其中 $a,b>0$.

21. 设函数 $f(x,y)$ 连续，且

$$f(x,y)=x+y\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是由 $y=\dfrac{1}{x}$，$x=1$，$y=2$ 所围成的区域，求 $f(x,y)$.

B组

1. 设 $D_t=\{(x,y)\mid -t\leqslant x\leqslant t,-t\leqslant y\leqslant t\}(t>0)$，$f(x)$ 为可导函数，且 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，若当 $t\to 0^+$ 时，函数 $F(t)=\iint\limits_{D_t}f(x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是 t^k 的同阶无穷小，则 $k=$（　　）.

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)5

2. 设函数 $f(x)$ 连续，$D_t=\{(x,y)\mid t^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4t^2\}(t>0)$，

$$F(t)=\iint\limits_{D_t}\frac{(2x^2+1)f(x^2+y^2)}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则 $F'(t)=$（　　）.

(A)$2\pi[2f(4t^2)-f(t^2)]$　　(B)$2\pi[f(4t^2)-f(t^2)]$

(C)$2\pi[4tf(4t^2)-tf(t^2)]$　　(D)$2\pi[2tf(4t^2)-tf(t^2)]$

3. 设

$$I_1=\iint\limits_{D}(|x|+|y|)\mathrm{e}^{-|x|-|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,I_2=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_3=\iint\limits_{D}(x^3+y^3)\mathrm{e}^{-x^3-y^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$，则（　　）.

(A)$I_1<I_2<I_3$　　(B)$I_2<I_3<I_1$

(C)$I_3<I_1<I_2$　　(D)$I_3<I_2<I_1$

4. 设 $I_k=\iint\limits_{D_k}(4x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(k=1,2,3)$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，$D_2=\{(x,y)\mid 4x^2+y^2\leqslant 4\}$，$D_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则（　　）.

(A)$I_1<I_2<I_3$　　(B)$I_3<I_2<I_1$

(C)$I_2<I_3<I_1$　　(D)$I_2<I_1<I_3$

5. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)\mathrm{d}x=$ ________.

6. 若 $y(x)=\int_0^x \arctan(u-1)^2\mathrm{d}u$，则 $y(x)$ 在区间$[0,1]$上的平均值为________.

7. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则$\iint\limits_D (x-2y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

8. $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}}\frac{x+y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y=$ ________.

9. 设 $D_t=\{(x,y)\mid 2x^2+3y^2\leqslant 6t\}(t\geqslant 0)$，$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1-xy}-1}{e^{xy}-1}, & xy\neq 0,\\ a, & xy=0\end{cases}$为连续函数，令 $F(t)=\iint\limits_{D_t} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $F'_+(0)=$ ________.

10. 将直角坐标系中的累次积分 $I=\int_0^{\frac{8a}{5}}\mathrm{d}x\int_{2a-\sqrt{4a^2-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\,(a>0)$ 化为极坐标先 r 后 θ 次序的累次积分 $I=$ ________.

11. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, x^2+y^2\leqslant 2y\}$，计算二重积分$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

12. 设平面区域D是由封闭曲线 $x^2+y^2=a(x+\sqrt{x^2+y^2})$ 所围成的有界闭区域，其中常数 $a>0$. 计算 $I=\iint\limits_D[x^2\ln(y+\sqrt{1+y^2})+x\sqrt{x^2+y^2}]\mathrm{d}\sigma$.

13. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\leqslant 8, y\geqslant \dfrac{x^2}{2}\right\}$，计算

$$I=\iint\limits_D[(x-1)^2+y^2]\mathrm{d}\sigma.$$

14. 计算二重积分$\iint\limits_D\sqrt{1-x^2}[\sin(xy)+xy^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $y=2-x^2(x\leqslant 1)$ 与直线 $y=-x$，$x=1$ 所围成的闭区域.

15. 计算二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y+1}{x^2+y^2+1}, & x^2+y^2\leqslant 2,\\ x^2+y+1, & x^2+y^2>2,\end{cases}$ D是由直线 $y=x$，$y=-x$ 及 $x=\sqrt{2}$ 围成的闭区域.

16. 计算二重积分$\iint\limits_D|x^2+y^2-2x|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

C组

1. 设 $D=\{(x,y)\mid 1<x\leqslant e, 1<y\leqslant e\}$，记

$$I_1=\iint\limits_D[x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}]\sin(\ln y)\mathrm{d}\sigma,$$

$$I_2=\iint\limits_D[y\ln(y+\sqrt{1+y^2})-\sqrt{1+y^2}]\sin(\ln y)\mathrm{d}\sigma,$$

则(　　).

(A) $I_1>I_2$　　(B) $I_1<I_2$

(C) $I_1=I_2$　　(D) 无法判断 I_1 与 I_2 的大小关系

2. 设 D_1 是中心在点(0,1)处,边长为2且平行于坐标轴的正方形区域,D_2,D_3 分别为 D_1 的内切圆区域与外接圆区域,并设

$$f(x,y)=(2y-x^2-y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2},$$

对于

$$I_1=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma,I_2=\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma,I_3=\iint\limits_{D_3}f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其大小顺序是(　　).

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_2<I_1<I_3$

(C) $I_3<I_2<I_1$　　(D) $I_3<I_1<I_2$

3. 设 $F(x,y)=\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ 在 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续,求

$$I=\iint\limits_D F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(\text{用 } f(x,y) \text{ 的函数值表示}),$$

并证明:$I\leqslant 2(M-m)$,其中 M 和 m 分别是 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值和最小值.

4. 设 $f(x,y)$ 在$\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$上连续,$g(x,y)=\int_a^x\mathrm{d}u\int_c^y f(u,v)\mathrm{d}v$,证明:

$$g''_{xy}=g''_{yx}=f(x,y)(a<x<b,c<y<d).$$

第 15 章　微分方程

A 组

1. 微分方程 $x\mathrm{d}y=(y-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\,(x>0)$ 满足 $y(1)=0$ 的特解是(　　).

(A) $\sqrt{x^2+y^2}+2y=x$　　(B) $\sqrt{x^2+y^2}+y=1$

(C) $\sqrt{x^2+y^2}-2y=x$　　(D) $\sqrt{x^2+y^2}-y=1$

2. 设以下 A,B,a,b 均为常数，则微分方程 $y''-3y'+2y=x\mathrm{e}^{2x}-2x+1$ 的特解形式为(　　).

(A) $x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}+Ax+B$　　(B) $(ax+b)\mathrm{e}^{2x}+Ax+B$

(C) $x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}+x(Ax+B)$　　(D) $(ax+b)\mathrm{e}^{2x}+x(Ax+B)$

3. 设 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma\mathrm{e}^{x}$ 的一个特解，则该方程的通解为(　　).

(A) $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}$　　(B) $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x}$

(C) $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{x}$　　(D) $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+2x\mathrm{e}^{x}$

4. 以 $y=x$ 与 $y=x\mathrm{e}^{-2x}$ 为特解的最低阶常系数齐次线性微分方程为(　　).

(A) $y'''+2y''=0$　　(B) $y'''+4y''+4y'-4y=0$

(C) $y^{(4)}+2y'''=0$　　(D) $y^{(4)}+4y'''+4y''=0$

5. 设函数 $f(x)$ 二阶导数连续且满足方程

$$f(x)-1=\int_0^x f(1-t)\mathrm{d}t,$$

则 $f(x)=$ (　　).

(A) $\cos x+\dfrac{1+\sin 1}{\cos 1}\sin x$　　(B) $\cos x-\dfrac{1+\sin 1}{\cos 1}\sin x$

(C) $\sin x+\dfrac{\cos 1}{1+\sin 1}\cos x$　　(D) $\sin x-\dfrac{\cos 1}{1+\sin 1}\cos x$

6. 微分方程 $3\mathrm{e}^{x}\tan y\mathrm{d}x+(1-\mathrm{e}^{x})\sec^2 y\mathrm{d}y=0$ 的通解是________.

7. 已知 $y_0=\dfrac{1}{4}$，则 $\Delta y_x-4y_x=3$ 的特解为________.

8. 已知某三阶常系数齐次线性微分方程有两个特解，分别为 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ 与 e^{x}，则该微分方程为________.

9. 设曲线 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y'''-y'=0$，且该曲线在原点处有拐点并以 $y-2x=0$ 为切线，则 $y(x)=$ ________.

10. 设 $y(x)$ 是方程 $y^{(4)}-y''=0$ 的解，且当 $x\to 0$ 时，$y(x)$ 是 x 的 3 阶无穷小，求 $y(x)$.

11. 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，且满足 $f(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f'(t)\mathrm{d}t+x^2$，求 $f(x)$ 的表达式.

12. 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=2$，又 $z=f(\mathrm{e}^y\cos x)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2y}z,$$

求 $f(u)$ 的表达式.

13. 设方程 $y'+P(x)y=x^2$，其中 $P(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>1.\end{cases}$ 求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$，使之在 $(-\infty,+\infty)$ 内都满足该方程，且满足初值条件 $y(0)=2$.

B组

1. 设 $p(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是连续的非负函数，若微分方程 $\mathrm{d}y+p(x)y\mathrm{d}x=0$ 的任一解均满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$，则 $p(x)$ 必然满足（　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=0$　　(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=+\infty$

(C) $\int_a^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x$ 收敛　　(D) $\int_a^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x$ 发散

2. 以 $\mathrm{e}^x\sin^2 x$ 为特解的最低阶常系数齐次线性微分方程为（　　）.

(A) $y'''-3y''+7y'-5y=0$　　(B) $y'''-y''+7y'-5y=0$

(C) $3y'''-y''+7y'-5y=0$　　(D) $y'''-3y''-5y'+7y=0$

3. 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，$y(1)=1$，且当 $x\neq 0$ 时满足方程 $y'(x)=\dfrac{y(x)}{x}+x\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=$ ________.

4. 微分方程 $(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$ 的通解为________.

5. 差分方程 $y_{t+1}-2y_t=\sin\dfrac{\pi t}{2}$ 满足条件 $y_0=0$ 的特解为________.

6. $\Delta^2 y_x+\Delta y_x-y_{x+2}-2y_{x+1}=y_x$ 的通解为________.

7. 已知 $y=f(x)$ 是微分方程

$$xy'-y=\sqrt{2x-x^2}$$

满足初值条件 $f(1)=0$ 的特解，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

8. 设 $y_0=2x\mathrm{e}^{-3x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的一个解，函数 $y(x)$ 是该方程满足条件 $y(0)=2$，$y'(0)=-5$ 的解，则 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=$ ________.

9. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\dfrac{1}{3}$. 当 $x>0$ 时，曲线 $y=f(x)$

上点$(x,f(x))$处的切线在y轴上的截距等于$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，求$f(x)$.

10. 设$y(x)$是微分方程$y''+(x+1)y'+x^2y=e^x$满足$y(0)=0,y'(0)=1$的解，并设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)-x}{x^k}$存在且不为零，求正整数$k$和该极限值.

11. 设可微函数$f(x)$满足方程$f(x)=e^x+e^x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，求$\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x$.

12. 求微分方程$\begin{cases} y''+y=x, & x\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ y''+4y=0, & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$满足条件$y\Big|_{x=0}=0$，$y'\Big|_{x=0}=0$且在$x=\frac{\pi}{2}$处可导的特解.

13. 设函数$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且满足方程

$$f(t)=e^{-4\pi t^2}-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

求$f(t)$的表达式.

14. 设$f(x)$是以2π为周期的二阶可导函数，满足关系式$f(x)+2f'(x+\pi)=\sin x$，求$f(x)$.

15. 设定义在$(0,+\infty)$内的函数$y=f(x)$满足微分方程$xy''+3y'=3$，且有$f(1)=3$，$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$. 求：

(1) 函数$y=f(x)$的表达式；

(2) 函数$y=f(x)$的单调区间与极值；

(3) 曲线$y=f(x)$在$x\geqslant 1$的部分绕其斜渐近线旋转一周所得的旋转体的体积V.

16. 设$a>0$，函数$f(x)$在$[0,+\infty)$内连续有界，证明：微分方程$y'+ay=f(x)$的解在$[0,+\infty)$内有界.

C组

1. 设$p(x),q(x),f(x)$均是x的已知连续函数，$y_1(x),y_2(x),y_3(x)$分别是非齐次微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的3个线性无关的解，C_1,C_2是两个任意常数，则该非齐次微分方程对应的齐次微分方程的通解是（　　）.

(A)$C_1y_1+(C_2-C_1)y_2+(1-C_2)y_3$　　(B)$(C_1-C_2)y_1+(C_2-1)y_2+(1-C_1)y_3$

(C)$(C_1+C_2)y_1+(C_1-C_2)y_2+(1-C_1)y_3$　　(D)$C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

2. 设函数$y=y(x)$由方程$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}=1(x,y>0)$确定，其中参数$|a|\neq|b|,k>0$，则$y=y(x)$满足微分方程（　　）.

(A)$(a^2-b^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(x+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\right)$

(B)$(a^2-b^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(x-y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\right)$

(C) $(a^2+b^2)\dfrac{dy}{dx}=\left(x+y\dfrac{dy}{dx}\right)\left(x\dfrac{dy}{dx}+y\right)$

(D) $(a^2+b^2)\dfrac{dy}{dx}=\left(x-y\dfrac{dy}{dx}\right)\left(x\dfrac{dy}{dx}-y\right)$

3. 求微分方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x+\sin y)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3=0$满足初值条件$y(0)=0,y'(0)=\dfrac{2}{3}$的特解.

4. 求一阶非齐次线性差分方程$y_{x+1}+4y_x=2x^2+x-1$满足初值条件$y_0=1$的特解.

5. 适当选取函数$\varphi(x)$,作变量代换$y=\varphi(x)u$,将y关于x的微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)y=0$$

化为u关于x的二阶常系数齐次线性微分方程$\dfrac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0$,求$\varphi(x)$及常数$\lambda$,并求原方程满足$y(0)=1,y'(0)=0$的特解.

6. 设微分方程$xy'+2y=2(e^x-1)$.

(1) 求上述微分方程的通解,并求使$\lim\limits_{x\to 0}y(x)$存在的解(将该解记为$y_0(x)$),以及极限值$\lim\limits_{x\to 0}y_0(x)$;

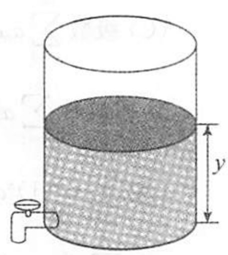
(2) 补充定义使$y_0(x)$在$x=0$处连续,求$y_0'(0)$,并证明无论$x\neq 0$还是$x=0$,$y_0'(x)$均连续,并请写出$y_0'(x)$的表达式.

7. 设$\varphi(x)$是以2π为周期的连续函数,且$\Phi'(x)=\varphi(x)$,$\Phi(0)=0$.

(1) 求方程$y'+y\sin x=\varphi(x)e^{\cos x}$的通解;

(2) (1)中方程是否有以2π为周期的解?若有,请写出所需条件,若没有,请说明理由.

8. 如图所示,正圆柱形水桶中装满水,当打开水桶底部的水龙头时,随着水的流出,水面高度y逐渐下降.当水面高度y较大时,水的流出速率较快;当水面高度y越来越小时,流出速率也越来越小.设水面高度y的下降速率与y的平方根成正比,即



$$\frac{dy}{dt}=-k\sqrt{y},$$

其中k为正的比例常数.

(1) 求水面高度y对于时间t的函数关系;

(2) 设$k=\dfrac{1}{10}$,当$t=0$时,$y=9$,则需要多长时间水桶中的水才能流光(t的单位是min,y的单位是m)?

第 16 章　无穷级数

A组

1. 考虑下列 3 个级数：① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\alpha^n+\beta^n}$，② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^n}{\alpha^n+\beta^n}$，③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\beta^n}{\alpha^n+\beta^n}$，则当 $0<\alpha<1<\beta$ 时，以上级数收敛的所有序号是(　　).

(A)①②　　(B)②③　　(C)①③　　(D)①②③

2. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则(　　).

(A) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 必收敛

(B) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 必收敛

(C) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 必收敛

(D) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 必收敛

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则下述结论不正确的是(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 必收敛

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 必收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 必收敛

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 必收敛

4. 下列命题中正确的是(　　).

(A) 若 $u_n<v_n\,(n=1,2,3,\cdots)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$

(B) 若 $u_n<v_n\,(n=1,2,3,\cdots)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

(D) 若 $w_n<u_n<v_n\,(n=1,2,3,\cdots)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

5. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n b_n$(　　).

(A) 发散

(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛

(D) 敛散性不确定

6. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，下述命题正确的是（　　）.

(A) 设存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛

(B) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则必存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$

(C) 设存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必发散

(D) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则必存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$

7. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在点 $x=-1$ 处收敛，则实数 a 的取值范围是（　　）.

(A) $-2<a\leqslant 0$　　(B) $-2\leqslant a<0$

(C) $-1<a\leqslant 1$　　(D) $-1\leqslant a<1$

8. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\sin\frac{1}{2^n}\right)x^n$ 的收敛域为（　　）.

(A) $(-2,2)$　　(B) $[-2,2]$　　(C) $(-8,8)$　　(D) $[-8,8]$

9. 设数列 $\{a_n\}$ 严格单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 的收敛域为（　　）.

(A) $(-2,2]$　　(B) $[-2,2)$　　(C) $[1,3)$　　(D) $(1,3)$

10. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$，则和函数 $S(x)=$（　　）.

(A) $\frac{\ln(1-x)}{1-x}$，$|x|<1$　　(B) $\frac{\ln(1-x)}{x-1}$，$|x|<1$

(C) $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$，$|x|<1$　　(D) $\frac{\ln(1+x)}{x-1}$，$|x|<1$

11. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛域为________.

12. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$ 在 $x=2$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________.

13. 幂级数 $\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}+\cdots+\frac{nx^{n-1}}{a^n}+\cdots$ 在收敛区间 $(-a,a)$ 内的和函数 $S(x)$ 为________.

14. 函数 $f(x)=\ln(1-x-2x^2)$ 展开成 x 的幂级数为________.

15. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!a^n}{n^n}$（$a$ 为常数，$0<|a|<\mathrm{e}$）.

16. 设 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}(n=1,2,\cdots)$，判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性.

17. 设 $u_n=(-1)^n\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$，判定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 的敛散性，如果收敛，指出是绝对收敛，还是条件收敛.

18. 设函数 $f_n(x)=\int_0^x t(1-t)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t(x>0)$，其中 n 为正整数.

(1) 证明 $f_n(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内存在最大值；

(2) 记 a_n 为函数 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值 $(n\geqslant 1)$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

19. 设 $a_n=\dfrac{2^n}{(5^n+2^n)n}$，求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径、收敛区间与收敛域.

20. 将 $f(x)=\dfrac{1}{1-2x-x^2}$ 展开为 x 的幂级数.

21. 将函数 $f(x)=\ln\left|\dfrac{x}{x-3}\right|$ 展开成 $x-2$ 的幂级数，并求出其收敛域.

22. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 的和.

23. 设曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ 所围成区域的面积为 $a_n(n=1,2,\cdots)$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 的和.

24. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数.

B组

1. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，又设 $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{1+f^n(x)}\,dx$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$（　　）.

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性与 $f(x)$ 有关

2. 下列命题正确的是（　　）.

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n v_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $u_n\geqslant \dfrac{1}{n}$

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，下面 4 个级数

①$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$；　②$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$；　③$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$；　④$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$.

必收敛的个数为（　　）.

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

4. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{b_n^2}$ 收敛，λ 为正常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{b_n^2+\lambda}}$（　　）.

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 敛散性与 λ 有关

5. 若数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x+2)^n$ 在 $x=-\sqrt{2}$ 处( ).

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛

(C) 发散 (D) 敛散性不能确定

6. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$ 在 $x=-2$ 处条件收敛，$a_n>0, n=0,1,2,\cdots$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^{2n+1}$ 的收敛域为( ).

(A)$(1,3)$ (B)$(0,4)$ (C)$[-2,2)$ (D)$[-4,4)$

7. 已知 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_{n+1}-a_{n-1})=$( ).

(A)-2 (B)-1 (C)1 (D)2

8. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$，则 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$( ).

(A)1 (B)$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ (C)$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ (D)e^4

9. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(1-\sqrt{x})^n\mathrm{d}x$ 的和为________.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n-1)}=$________.

11. 设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且导函数 $f'(x)$ 有界，证明：

(1) 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$ 绝对收敛；

(2) $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 存在.

12. (1) 求函数项级数 $\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{-2x}+\cdots+n\mathrm{e}^{-nx}+\cdots$ 收敛时 x 的取值范围；

(2) 当(1) 中级数收敛时，求其和函数 $S(x)$，并求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(x)\mathrm{d}x$.

13. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的和函数 $S(x)$，并计算 $\int_{-\infty}^{0} S(x)\mathrm{d}x$.

14. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的收敛域与和函数.

15. 已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$（$n$ 为正整数），且 $f_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n}$，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的和函数.

16. 设 $a_0=1, a_1=-2, a_2=\frac{7}{2}, a_{n+1}=-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)a_n (n\geqslant 2)$. 证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，并求其和函数 $S(x)$.

17. 已知 $a_0=3, a_1=5$，且 $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{2}{3}-n\right)a_n (n\geqslant 1)$，证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，并求和函数.

18. 设曲线族 $y_n(x)=|\sin x|^{\frac{n}{2}}, n=1,2,\cdots, V_n$ 表示 $y_n(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积，求 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{V_{n-2}}{V_n}$.

19. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{(x-3)^2}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

20. 设函数 $f(x)=\frac{7+2x}{2-x-x^2}$，当 $-1<x<1$ 时，其幂级数展开式为 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

(1) 求 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$；

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(a_n-2)(a_{n+1}-2)}$ 的和.

21. 将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(x-1)^n$ 展开成 $x-\frac{1}{2}$ 的幂级数.

C组

1. 下列级数发散的是(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x}dx$　(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$

2. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}=q$，则(　　).

(A) 当 $q<-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $q>-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

(B) 当 $q<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $q>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

(C) 当 $q<-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；当 $q>-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

(D) 当 $q<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；当 $q>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

3. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=1$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛域为________.

4. (1) 设 $f(x)$ 为任意阶可导函数，且 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若 $f(x)$ 为奇函数，证明

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}x^{2n-1};$$

(2) 将函数 $f(x)=\int_0^x e^{x^2-t^2}dt$ 展开为 x 的幂级数.

5. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$，且 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}, n=2,3,\cdots$. 证明在 $|x|<\frac{1}{2}$ 时幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 收敛，并求其和函数与系数 a_n.

第二篇
线性代数

线性代数是硕士研究生招生考试考查内容之一，主要考查考生对线性代数的基本概念、基本理论、基本运算的理解和掌握以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、综合运用能力和解决实际问题的能力。在考研数学三试卷中分值约30分。

第 1 章 行列式

A组

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} =$ (　　).

(A)240　　(B)480　　(C)-240　　(D)-480

2. 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 2x & -x & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 的常数项是(　　).

(A)1　　(B)-2　　(C)3　　(D)4

3. 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = m, c \neq 0$,则 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}c & a_{13}c^2 & a_{14}c^3 \\ a_{21}c^{-1} & a_{22} & a_{23}c & a_{24}c^2 \\ a_{31}c^{-2} & a_{32}c^{-1} & a_{33} & a_{34}c \\ a_{41}c^{-3} & a_{42}c^{-2} & a_{43}c^{-1} & a_{44} \end{vmatrix} =$ (　　).

(A)$c^{-2}m$　　(B)m　　(C)cm　　(D)c^3m

4. 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \end{vmatrix}$ 的值为(　　).

(A) $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$　　(B) $-\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$　　(C) $(-1)^n \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$　　(D) $(-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n \geqslant 2)$ 阶方阵,$|\boldsymbol{A}| = 3$,则 $|(\boldsymbol{A}^*)^*| =$ (　　).

(A)$3^{(n-1)^2}$　　(B)3^{n^2-1}

(C)3^{n^2-n}　　(D)3^{n-1}

6. 设 $a,b,a+b$ 均非零,则行列式 $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} =$ ________.

7. 行列式 $D_5=\begin{vmatrix}0&0&0&x&y\\0&0&x&y&0\\0&x&y&0&0\\x&y&0&0&0\\y&0&0&0&x\end{vmatrix}=$ ________.

8. 行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1&1+x\\1&1&1-x&1\\1&1+y&1&1\\1-y&1&1&1\end{vmatrix}=$ ________.

9. 行列式 $\begin{vmatrix}1-x&x&0&0&0\\-1&1-x&x&0&0\\0&-1&1-x&x&0\\0&0&-1&1-x&x\\0&0&0&-1&1-x\end{vmatrix}=$ ________.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 3 阶矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=-3,|\boldsymbol{B}|=4,\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2\boldsymbol{A}^*&(\boldsymbol{AB})^*\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}|=$ ________.

11. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，且 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{A}^*|=$ ________.

12. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维列向量，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，$\boldsymbol{B}=[2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1]$，若 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=16$，则 $|2A^*|=$ ________.

B 组

1. n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&a&b\\0&0&\cdots&a&b&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\a&b&\cdots&0&0&0\\b&0&\cdots&0&0&a\end{vmatrix}$ 的值为(　　).

(A) $(-1)^{\frac{n^2-n}{2}}a^n+(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}b^n$　　(B) $(-1)^{\frac{n^2+n+2}{2}}a^n+(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}b^n$

(C) $(-1)^{\frac{n^2-n+4}{2}}a^n+(-1)^{\frac{n^2-3n+2}{2}}b^n$　　(D) $(-1)^{\frac{n^2-3n+2}{2}}a^n+(-1)^{\frac{n^2-n+4}{2}}b^n$

2. 设 $f(x)=\begin{vmatrix}x&a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&x&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2&x&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&x\end{vmatrix}$ ($a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相同的正实数，$n>2$)，则方程 $f'(x)=0$ 的实根个数为(　　).

(A)1　　(B)$n-1$　　(C)n　　(D)$n+1$

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}]$. 若 $|\boldsymbol{A}|=1$，则 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=$（　　）.

(A) $1+(-1)^n$　　(B) $1+(-1)^{n+1}$　　(C) $(-1)^n$　　(D) 0

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，满足 $|3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，$|3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}|=$（　　）.

(A) 2　　(B) 1　　(C) -1　　(D) -2

5. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}=$ ________.

6. 行列式 $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \cdots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}=$ ________.

7. 设 $D_n=\begin{vmatrix} a+2 & 2a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+2 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+2 \end{vmatrix}$，则 $n\geqslant 3$ 时，$\dfrac{D_n-aD_{n-1}}{D_{n-1}-aD_{n-2}}=$ ________.

8. 设 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

则 $\sum\limits_{i=1}^{n} D_i=$ ________.

9. $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix}=$ ________.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 3 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$ ________.

11. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，3 阶方阵 X 满足关系式 $2XA^*=4A^*XA^{-1}-(A^*)^2$，则 $|X|=$ ________.

12. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&1&5\\0&0&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\4&5&1\end{bmatrix}$，则 $|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=$ ________.

13. 设 A 为奇数阶矩阵，且 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=E$，$|A|>0$，则 $|A-E|=$ ________.

14. 设 A 是 3 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量组，且 $A\alpha_1=\alpha_1-2\alpha_2$，$A\alpha_2=\alpha_2-2\alpha_3$，$A\alpha_3=\alpha_3-2\alpha_1$，则 $|A|=$ ________.

C组

1. 设 A 是 n 阶矩阵，α,β 是 n 维列向量，a,b,c 是实数，已知 $|A|=a$，$\begin{vmatrix}A&\alpha\\\beta^{\mathrm{T}}&b\end{vmatrix}=0$，则 $\begin{vmatrix}A&\alpha\\\beta^{\mathrm{T}}&c\end{vmatrix}=$ ________.

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix}a&b&c&d\\-b&a&-d&c\\-c&d&a&-b\\-d&-c&b&a\end{vmatrix}$.

第 2 章　余子式和代数余子式的计算

A 组

1. 已知 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}(n>2)$，则 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=$ ________.

2. $|\boldsymbol{A}|$ 是 n 阶行列式，其中有一行（列）元素全是 1，证明：这个行列式全部元素的代数余子式的和等于该行列式的值.

B 组

1. 设 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，则其第 4 行各元素的余子式之和的值为（　　）.

(A) 28　　(B) -28

(C) 20　　(D) -20

2. 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-2,3$，则 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{11},a_{22},a_{33} 的代数余子式的和 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$（　　）.

(A) 6　　(B) -5　　(C) -2　　(D) 3

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|$ 的所有元素的代数余子式之和 $=$ ________.

4. 设 $n(n>1)$ 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$，$\boldsymbol{A}$ 中各列元素之和均为 2，记 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=$ ________.

C组

1. 设 A 为 3 阶非零矩阵，且满足 $a_{ij} = A_{ij}(i,j = 1,2,3)$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，则下列说法

①A 是可逆矩阵；②A 是对称矩阵；③A 是不可逆矩阵；④A 是正交矩阵.

正确的个数为(　　).

(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)4

2. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A_{ij} 是 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

(1) 若 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$，求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$；

(2) 若 $|A|=-2$，$a_{11}=3$，$B=\begin{bmatrix}A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n}\\ A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$，求 $|B|$.

第 3 章 矩阵运算

A组

1. 设 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left[\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right]$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{AB}=$（　　）.

(A) $\boldsymbol{O}$　　(B) $-\boldsymbol{E}$　　(C) $\boldsymbol{E}$　　(D) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则下列等式中，不一定成立的是（　　）.

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}+(\boldsymbol{A}^{-1})^2$　　(B) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^2$

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*+(\boldsymbol{A}^*)^2$　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^2$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}^*=$（　　）.

(A) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&-3\boldsymbol{A}^*\\-2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&-2\boldsymbol{B}^*\\-3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵，且 $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{E}$，则有（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$　　(B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

(C) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{BA}$　　(D) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{AB}$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第三行得单位矩阵，记

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$（　　）.

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

6. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},$$

则必有（　　）.

(A)$AP_1P_2=B$　　(B)$AP_2P_1=B$

(C)$P_1P_2A=B$　　(D)$P_2P_1A=B$

7. 设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $AB=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则必有（　　）.

(A) 互换矩阵 A^{-1} 的第 1,2 行得矩阵 B

(B) 互换矩阵 A^{-1} 的第 1,2 列得矩阵 B^{-1}

(C) 互换矩阵 A 的第 1,2 行得矩阵 B^{-1}

(D) 互换矩阵 A 的第 1,2 列得矩阵 B^{-1}

8. 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价，则下列命题错误的是（　　）.

(A) 存在可逆矩阵 P 和 Q，使得 $PAQ=B$

(B) 若 A 与 E 等价，则 B 可逆

(C) 若 $|A|\neq 0$，则存在可逆矩阵 P，使得 $PB=E$

(D) 若 $|A|>0$，则 $|B|>0$

9. 设 A,Λ,P 为 4 阶矩阵，其中 P 可逆，$\Lambda=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$\Lambda=P^{-1}AP$，则 $A^{10}=$ ________.

10. 设 A 为实对称矩阵，若 $A^2=O$，则 $A=$ ________.

11. 设 A 是 3 阶矩阵，满足 $A^2=A$，则 $(A+3E)^{-1}=$ ________.

12. 已知 $E_2(3)AE_{12}E_{13}(-1)=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&4\\-3&2&5\end{bmatrix}$，其中 $E_2(3)$，E_{12}，$E_{13}(-1)$ 均为 3 阶初等矩阵，则矩阵 $A=$ ________.

13. 设 n 阶矩阵 A,B 满足 $A^2=A$，$B^2=B$，$(A+B)^2=A+B$. 证明：$AB=O$.

14. 设 A 是主对角元素为 0 的 4 阶实对称矩阵，E 是 4 阶单位矩阵，$B=\begin{bmatrix}0&&&\\&0&&\\&&2&\\&&&2\end{bmatrix}$，且 $E+AB$ 是不可逆的对称矩阵，求 A.

15. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $X=AX+B$，求 X.

B 组

1. 设 E 是 n 阶单位矩阵，$E+A$ 是 n 阶可逆矩阵，则下列关系式中不恒成立的是（　　）.

(A)$(E-A)(E+A)^2=(E+A)^2(E-A)$

(B) $(E-A)(E+A)^{\mathrm{T}}=(E+A)^{\mathrm{T}}(E-A)$

(C) $(E-A)(E+A)^{-1}=(E+A)^{-1}(E-A)$

(D) $(E-A)(E+A)^{*}=(E+A)^{*}(E-A)$

2. 已知 A 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵,且 $A^3=E$,则 $\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}^{98}=($　　$)$.

(A) $\begin{bmatrix} A & E \\ O & A \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} A & O \\ E & A \end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} -A & O \\ O & -A \end{bmatrix}$

3. 设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix},$$

$$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 A 可逆,则 B^{-1} 等于(　　).

(A) $A^{-1}P_1P_2$　　(B) $P_1A^{-1}P_2$　　(C) $P_1P_2A^{-1}$　　(D) $P_2A^{-1}P_1$

4. 设 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} c_1 & b_1+2a_1 & a_1 \\ c_2 & b_2+2a_2 & a_2 \\ c_3 & b_3+2a_3 & a_3 \end{bmatrix}, |A|=2$,则 $B^*A=($　　$)$.

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. 设 A,B 均为3阶矩阵,将 A 的第二行加到第三行得到矩阵 C,将 B 的第一列的 -3 倍加到第三列得到矩阵 D,已知 $CD=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,则 $AB=($　　$)$.

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

6. 设 A,B 均为 n 阶矩阵,且 $AB=A+B$,则下列命题

① 若 A 可逆,则 B 可逆;　　② 若 $A+B$ 可逆,则 B 可逆;

③ 若 B 可逆,则 $A+B$ 可逆;　　④ $A-E$ 恒可逆.

正确的个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

7. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$,则 $A^2(BA)^*(AB^{-1})^{-1}=$ ________.

8. 设 $B=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$A=E+B+B^2+B^3$，则 $A^{-1}=$ ________.

9. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$，$B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(E+B)^{-1}=$ ________.

10. 已知 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^4$，则 $A^{-1}=$ ________.

11. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3]$，$\boldsymbol{\beta}=\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$，$A=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，若 A 满足方程 $A^3-2\lambda A^2-\lambda^2A=O$，则 $\lambda=$ ________.

12. 已知 $A=\begin{bmatrix}3&1&0&0&0\\0&3&1&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&3&-1\\0&0&0&-9&3\end{bmatrix}$，则 $A^n=$ ________ $(n\geqslant 2)$.

13. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，则 $X^*=$ ________.

14. 设 A，B 为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算 $\begin{bmatrix}E&E\\O&E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\B&A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E&-E\\O&E\end{bmatrix}$；

(2) 利用(1) 的结果证明 $\begin{vmatrix}A&B\\B&A\end{vmatrix}=|A+B|\,|A-B|$.

15. 设 $A=\begin{bmatrix}0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n\neq 0,n\geqslant 3)$，求：

(1) 矩阵 A 的所有元素的代数余子式之和；

(2) 矩阵 X，使得 $AXA^*=A^*+|A|E$.

16. 设矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 A 满足 $(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=C^{-1}$，求矩阵 A.

17. 设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$，且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，$A=E+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，计算：

(1) $|A|$；(2) A^n；(3) A^{-1}.

C组

1. 设 A 是 n 阶矩阵，则下列说法错误的是(　　).

(A) 对任意的 n 维列向量 ξ，有 $A\xi=0$，则 $A=O$

(B) 对任意的 n 维列向量 ξ，有 $\xi^{T}A\xi=0$，则 $A=O$

(C) 对任意的 n 阶矩阵 B，有 $AB=O$，则 $A=O$

(D) 对任意的 n 阶矩阵 B，有 $B^{T}AB=O$，则 $A=O$

2. 设 α,β 为 n 维单位列向量，P 是 n 阶可逆矩阵，则下列矩阵中可逆的是(　　).

(A)$A=E-\alpha\alpha^{T}$　　(B)$B=\alpha^{T}P\alpha P^{-1}-\alpha\alpha^{T}$

(C)$C=\alpha^{T}P^{-1}\beta P-\beta\alpha^{T}$　　(D)$D=E+\beta\beta^{T}$

3. 设 n 阶实矩阵 $A=(a_{ij})$，A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，$|a_{ij}|$，$|A_{ij}|$ 分别表示两个表达式的绝对值，则下列结论不正确的是(　　).

(A) 若 $|A|=1$ 且对任意 i,j 均有 $a_{ij}=-A_{ij}$，则 A 为正交矩阵

(B) 若 $|A|=-1$ 且对任意 i,j 均有 $a_{ij}=-A_{ij}$，则 A 为正交矩阵

(C) 若 A 为正交矩阵且 $|A|=1$，则对任意 i,j，有 $|a_{ij}|=|A_{ij}|$

(D) 若 A 为正交矩阵且 $|A|=-1$，则对任意 i,j，有 $|a_{ij}|=|A_{ij}|$

4. 设 $A=\begin{bmatrix}a&b\\0&c\end{bmatrix}$，其中 a,b,c 为实数，则下列选项中，不能使得 $A^{100}=E$ 的是(　　).

(A)$a=1,b=2,c=-1$　　(B)$a=1,b=-2,c=-1$

(C)$a=-1,b=2,c=1$　　(D)$a=-1,b=2,c=-1$

5. 设 A 是3阶可逆矩阵，$\alpha=[a_1,a_2,a_3]^{T}$，$\beta=[b_1,b_2,b_3]^{T}$ 是3维列向量，且 $\beta^{T}A^{-1}\alpha\neq-1$.

(1) 验证：$(A+\alpha\beta^{T})^{-1}=A^{-1}-\dfrac{A^{-1}\alpha\beta^{T}A^{-1}}{1+\beta^{T}A^{-1}\alpha}$；

(2) 设 $B=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{bmatrix}$，利用(1)中结论求 B^{-1}.

第 4 章　矩阵的秩

A 组

1. 已知 A 是 $m \times n$ 矩阵，$r(A) = r < \min\{m,n\}$，则 A 中(　　).

(A) 没有等于零的 $r-1$ 阶子式，至少有一个不为零的 r 阶子式

(B) 有不等于零的 r 阶子式，所有 $r+1$ 阶子式全为零

(C) 有等于零的 r 阶子式，没有不等于零的 $r+1$ 阶子式

(D) 所有 r 阶子式不等于零，所有 $r+1$ 阶子式全为零

2. 已知 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$，$P$ 为 3 阶非零矩阵，且满足 $PQ = O$，则(　　).

(A) 当 $t = 6$ 时，P 的秩必为 1　　(B) 当 $t = 6$ 时，P 的秩必为 2

(C) 当 $t \neq 6$ 时，P 的秩必为 1　　(D) 当 $t \neq 6$ 时，P 的秩必为 2

3. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ 的秩，其中 a,b 为参数.

4. 设 3 阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} b-1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，已知 $r(AB) < r(A)$，$r(AB) < r(B)$，求 a，b 的值与 $r(AB)$.

5. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，且 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 0, i = 1,2,\cdots,n$，求 $r(A^*)$ 及 A^* 的表示形式.

B 组

1. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & a \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$，矩阵 Q 满足 $AQA^* = B$，且 $r(Q) = 2$，其中 A^* 是 A

的伴随矩阵，则 $a=($　　$)$.

(A) -1　　(B) 1　　(C) -2　　(D) 2

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 是四个 4 阶矩阵，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$ 非零，$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 可逆，且满足 $\boldsymbol{ABCD}=\boldsymbol{O}$，若 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})+r(\boldsymbol{D})=r$，则 r 的取值范围是(　　).

(A) $r<10$　　(B) $10\leqslant r\leqslant 12$　　(C) $12<r<16$　　(D) $r\geqslant 16$

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 3 阶矩阵，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&4&a\\1&2&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{E}$，$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=3$，则常数 $a=($　　$)$.

(A) $\dfrac{7}{2}$　　(B) 7　　(C) $\dfrac{13}{2}$　　(D) 13

4. 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&-1&2\\0&0&2&2\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=($　　$)$.

(A) 7　　(B) 6　　(C) 5　　(D) 4

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，有 3 个特征值分别为 0,1,1，且不相似于对角矩阵，则 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A})=$ ________.

6. 设有两个 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$.

(1) 计算 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 的秩 $r(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})$；

(3) 设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 证明：$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$.

C组

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 2×2 矩阵，$r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}\right)=2$，则行列式 $\begin{vmatrix}|\boldsymbol{A}|&|\boldsymbol{B}|\\|\boldsymbol{C}|&|\boldsymbol{D}|\end{vmatrix}=($　　$)$.

(A) $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|$　　(B) $-|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|$　　(C) 1　　(D) 0

第 5 章　线性方程组

A 组

1. 设有三条直线 $l_1: a_1x + b_1y = c_1, l_2: a_2x + b_2y = c_2, l_3: a_3x + b_3y = c_3$，其中 $a_i, b_i, c_i \neq 0$ $(i = 1,2,3)$，记 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{A}) = 2$ 是三条直线相交于一点的（　　）.

(A) 充分必要条件　　(B) 充分而非必要条件

(C) 必要而非充分条件　　(D) 既非必要也非充分条件

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 均为线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解，则下列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \frac{1}{4}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3), \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 - 4\boldsymbol{\alpha}_3,$$

其中是相应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解向量的个数为（　　）.

(A)4　　(B)3　　(C)2　　(D)1

3. 设 $\boldsymbol{\xi}_1 = [1, -2, 3, 2]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = [2, 0, 5, -2]^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，则下列向量中是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解向量的是（　　）.

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1, -3, 3, 3]^{\mathrm{T}}$　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_2 = [0, 0, 5, -2]^{\mathrm{T}}$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_3 = [-1, -6, -1, 10]^{\mathrm{T}}$　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_4 = [1, 6, 1, 0]^{\mathrm{T}}$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的两个不同的解向量，k 是任意常数，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解必定是（　　）.

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$　　(B)$k\boldsymbol{\alpha}_1$　　(C)$k(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$　　(D)$k(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2)$

5. 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，若存在 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$，使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，则（　　）.

(A)$\lambda = -2$ 且 $|\boldsymbol{B}| = 0$　　(B)$\lambda = -2$ 且 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$

(C)$\lambda = 1$ 且 $|\boldsymbol{B}| = 0$　　(D)$\lambda = 1$ 且 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×5 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，则下列说法不正确的是（　　）.

(A)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解　　(B)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 必有无穷多解

(C) 对任意的 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解　　(D) 对任意的 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解

7. 已知非齐次线性方程组

$$A_{3\times4}x = b \quad ①$$

有通解 $k_1[1,2,0,-2]^T + k_2[4,-1,-1,-1]^T + [1,0,-1,1]^T$，则满足方程组 ① 且满足条件 $x_1 = x_2, x_3 = x_4$ 的解是________.

8. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + t\boldsymbol{\alpha}_2$ 同为该方程组的一个基础解系，则 t________.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为其伴随矩阵，且 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$.

(1) 确定矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的秩；

(2) 讨论线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由多少个线性无关的解向量构成，并给出该方程组的通解.

10. 设 $n(n\geqslant 3)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，如果 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为 1，求 a 的值，并求此时齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

11. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

(1) 求方程组的导出组的基础解系；

(2) 求 a,b 为何值时，方程组有解；

(3) 当方程组有解时，求方程组的全部解.

12. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ a & 2 & 1 \\ 3 & 7 & b \end{bmatrix}$. 若矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，求 a,b 的值，并求该矩阵方程的全部解.

13. 设三元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1，已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2 = [1,2,3]^T, \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3 = [2,-1,1]^T, \boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_1 = [0,2,0]^T$，求该非齐次线性方程组的通解.

14. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$，如果 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

15. 已知方程组（Ⅰ）

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

与方程组（Ⅱ）

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+ax_3-5x_4=1,\\x_1+x_2-x_3+bx_4=4,\\3x_1+x_2+x_3+2x_4=c\end{cases}$$

是同解方程组，求参数 a,b,c.

16. 求方程组（Ⅰ）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+3x_2+ax_3=0,\\x_1+3x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与（Ⅱ）$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=a-1,\\x_1+x_2+x_3=a^2-a\end{cases}$ 的公共解.

B组

1. 设 $\boldsymbol{Ax}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ 有通解 $k[1,0,2,-1]^{\mathrm{T}}$，其中 k 是任意常数，$\boldsymbol{A}$ 中去掉第 $i(i=1,2,3,4)$ 列的矩阵记成 $\boldsymbol{A}_i$，则下列方程组中有非零解的方程组是（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$　　(B) $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$　　(C) $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$　　(D) $\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 均是4维列向量，记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]$. 已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_5$ 有通解 $k[1,-1,2,0]^{\mathrm{T}}+[2,1,0,1]^{\mathrm{T}}$，其中 k 是任意常数，则下列向量不是方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解的是（　　）.

(A) $[1,-2,-2,0,-1]^{\mathrm{T}}$　　(B) $[0,3,-4,1,-1]^{\mathrm{T}}$

(C) $[2,1,0,1,-1]^{\mathrm{T}}$　　(D) $[3,0,2,1,-1]^{\mathrm{T}}$

3. 已知 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r(r\geqslant 3)$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，则下列向量组也是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1=-\xi_2-\xi_3-\cdots-\xi_r,\boldsymbol{\alpha}_2=\xi_1-\xi_3-\xi_4-\cdots-\xi_r,\boldsymbol{\alpha}_3=\xi_1+\xi_2-\xi_4-\cdots-\xi_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{r-1}$

(B) $\boldsymbol{\beta}_1=\xi_2+\xi_3+\cdots+\xi_r,\boldsymbol{\beta}_2=\xi_1+\xi_3+\xi_4+\cdots+\xi_r,\boldsymbol{\beta}_3=\xi_1+\xi_2+\xi_4+\cdots+\xi_r,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{r-1}$

(C) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 的一个等价向量组

(D) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 的一个等秩向量组

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，则对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$，线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$（　　）.

(A) 无解　　(B) 有解　　(C) 必有唯一解　　(D) 必有无穷多解

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 有非零公共解的一个充分条件是（　　）.

(A) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$　　(B) $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$

(C) $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$　　(D) $n<r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<2n$

6. 已知 $r(\boldsymbol{A})=r_1$，且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 有解，$r(\boldsymbol{B})=r_2$，且 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\beta}$ 无解，设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]$，且 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\beta})=r$，则（　　）.

(A) $r=r_1+r_2$　　(B) $r>r_1+r_2$　　(C) $r=r_1+r_2+1$　　(D) $r\leqslant r_1+r_2+1$

7. 设$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$为实矩阵，且$A_{ij}=-a_{ij}$（$A_{ij}$为$a_{ij}$的代数余子式），$a_{22}=-1$，$|\boldsymbol{A}|=-1$，则方程组$A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$的解为________.

8. 若方程组

$$(\text{I})\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=a^3,\\(1+a)x_1+(1+a)x_2+2x_3=a(a^2+1)\end{cases}$$

与方程组

$$(\text{II})\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=a^2,\\(1+a)x_1+2x_2+(1+a)x_3=1+a^2,\\(1+a)x_1+(1+a)x_2+2x_3=1+a\end{cases}$$

同解，则$a=$________.

9. 设$A=\begin{bmatrix}2&-1&3\\a&1&b\\4&c&6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$是3阶方阵，$r(\boldsymbol{B})>1$，且$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，求：

(1)$\boldsymbol{A}^n(n\geqslant 1)$；

(2) 齐次线性方程组$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的通解.

10. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{X}$均是3阶矩阵，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&9&7\\1&11&7\\7&5&7\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&10&5\\-3&14&4\\6&2&7\end{bmatrix},$$

则是否存在$\boldsymbol{X}$，使得$\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BX}$?若存在，求所有的$\boldsymbol{X}$，若不存在，说明理由.

11. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}$是2阶方阵.

(1) 求满足$\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{O}$的所有$\boldsymbol{X}$；

(2) 方程$\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$是2阶单位矩阵，则该方程是否有解?若有解，求满足方程的所有$\boldsymbol{X}$，若无解，说明理由.

12. 已知$\boldsymbol{\eta}_1=[-3,2,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,-2]^{\mathrm{T}}$是线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+cx_3=2,\\x_1+2x_2-x_3=1,\\2x_1+x_2+x_3=-4\end{cases}$$

的两个解向量，求方程组的通解，并确定参数a,b,c.

13. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$均为4维列向量，记$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$. 已知非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解为

$$[1,-1,2,1]^{\mathrm{T}}+k_1[1,2,0,1]^{\mathrm{T}}+k_2[-1,1,1,0]^{\mathrm{T}}\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

(1) 证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关；

(2) 求方程组$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

14. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为4维列向量组，其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$. 记$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3]$，且方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_4$有无穷多解. 求：

(1) 常数a的值；

（2）方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_4$ 的通解.

15. 设三元线性方程有通解

$$k_1\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数，求原方程.

16. 已知齐次线性方程组（Ⅰ）的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,0,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=[2,1,0,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=[0,2,1,-1]^{\mathrm{T}}$，添加两个方程

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_1+2x_2+2x_4=0\end{cases}$$

后组成齐次线性方程组（Ⅱ），求（Ⅱ）的基础解系.

C组

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是4阶矩阵，向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 是齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为（　　）.

(A) $C_1\boldsymbol{\alpha}+C_2\boldsymbol{\beta}$，其中 C_1,C_2 为任意常数

(B) $C_1\boldsymbol{\alpha}+C_2\boldsymbol{\gamma}$，其中 C_1,C_2 为任意常数

(C) $C_1\boldsymbol{\beta}+C_2\boldsymbol{\gamma}$，其中 C_1,C_2 为任意常数

(D) $C_1\boldsymbol{\alpha}+C_2\boldsymbol{\beta}+C_3\boldsymbol{\gamma}$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数

2. 已知3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$，其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 可经初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，又设 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的一个非零列向量，则（　　）.

(A) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解　　(B) 方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解

(C) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{b}$ 同解　　(D) 方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{b}$ 同解

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，对于齐次线性方程组（Ⅰ）$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和（Ⅱ）$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，现有命题

①（Ⅰ）的解必是（Ⅱ）的解；　　②（Ⅱ）的解必是（Ⅰ）的解；

③（Ⅰ）的解不一定是（Ⅱ）的解；　　④（Ⅱ）的解不一定是（Ⅰ）的解.

其中正确的是（　　）.

(A)①④　　(B)①②　　(C)②③　　(D)③④

4. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 乘积可交换，$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 分别是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，且对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$，满足 $r(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{DB})=n$. 证明：

(1) $r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)=n$ 且 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 线性无关；

(2) $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 是方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

5. (1) 设 r 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关. 证明：$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，且表出法唯一；

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times r$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A})=r$. 若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，证明方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有唯一解，并求其解.

第6章 向量组

A组

1. 对于向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\6\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\\7\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\a\end{bmatrix},$$

下列结论正确的是(　　).

(A) 当 $a\neq 5$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示

(B) 当 $a\neq 5$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

(C) 当 $a=5$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 不可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示

(D) 当 $a=5$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\a\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\b\\6\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix}$,其中 a,b 为任意实数,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组为(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,若满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 m 阶单位矩阵,则(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性无关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性无关

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关,则(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,-1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,-1,-2,6]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,1,t,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[4,-1,-5,10]^{\mathrm{T}}$,已知 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,则 $t=$________.

6. 与 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[2,1,3,0]^{\mathrm{T}}$ 都正交的单位向量是________.

7. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,-3,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[5,-5,a,11]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-3,6,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[2,-1,3,a]^{\mathrm{T}}$. 求：

(1) 当 a 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；

(2) 当 a 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关；

(3) 当 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，并写出它的表出式.

8. 已知向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,2,a^2+3]^{\mathrm{T}}$ 和向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1=[1,1,a+3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[0,2,1-a]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=[1,3,a^2+3]^{\mathrm{T}}$. 若向量组 A 和向量组 B 等价，求常数 a 的值，并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

9. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性无关，且

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}=\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1.$$

讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性相关性.

10. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 维线性无关列向量组，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，证明：$\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

11. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维非零列向量，且线性相关，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$，若 $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^2=2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，求两个向量之间的线性关系.

12. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[b_1,b_2,b_3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[c_1,c_2,c_3]^{\mathrm{T}}$，若三条直线

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2,(a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3)\\ a_3x+b_3y=c_3\end{cases}$$

相交于一点，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 之间应有什么样的线性关系？说明理由.

B组

1. 设向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，向量组（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 不能由向量组（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，$\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,t)$ 也不能由向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$（　　）.

(A) 必线性相关　　(B) 必线性无关

(C) 可能线性相关，也可能线性无关　　(D) 以上都不正确

2. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 3 维非零列向量，则下列结论：

① 如果 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；

② 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也线性相关；

③ 如果 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

正确的个数为（　　）.

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

3. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\a\end{bmatrix}$.

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，则 $a=$（　　）.

(A)3　　(B)-3　　(C)2　　(D)-2

4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=n-1$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个互不相同的解，则(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

5. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[3,a+4,2a+5,a+7]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[4,6,8,10]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[2,3,2a+3,5]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\beta}=[0,1,3,b]^{\mathrm{T}}$. 求：

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩及一个极大线性无关组；

(2)a,b 满足何种条件时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示；

(3)a,b 满足何种条件时，任意的 4 维非零列向量 $\boldsymbol{\xi}$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 线性表示.

6. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}(s>1)$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i+t\boldsymbol{\alpha}_{i+1},i=1,2,\cdots,s$. 证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维非零列向量，且满足 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_j=0(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$. 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,s;s<n)$ 为 n 维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，已知 $\boldsymbol{\beta}$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\qquad\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×3 矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均是 3 维列向量，且线性无关，已知

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

(1) 证明 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 线性无关；

(2) 求 $|\boldsymbol{A}|$.

10. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，且表达式的系数全不为零. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 中任意 s 个向量均线性无关.

11. (1) 设向量组 A 可由向量组 B 线性表示，且 $r(A)=r(B)$，证明：向量组 A 与向量组 B 等价；

(2) 设有向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-2,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,2,a]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_1=[1,2,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[1,0,b]^{\mathrm{T}}$，问：当 a,b 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价？并写出此时 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示的表示式.

C组

1. 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，对任意的 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2+b\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则参数 a,b 应满足条件(　　).

(A)$a=b$　　(B)$a=-b$　　(C)$a=2b$　　(D)$a=-2b$

2. 设 3 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

(1) 证明：存在 3 维非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得 $\boldsymbol{\xi}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出；

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-2,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_1=[-2,1,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[-5,-3,5]^{\mathrm{T}}$，求既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出的所有非零列向量 $\boldsymbol{\xi}$.

第 7 章　特征值与特征向量

A 组

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\x&y&z\\0&0&1\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3，则有（　　）.

(A) $x=2,y=4,z=8$　　(B) $x=-1,y=4,z\in\mathbf{R}$

(C) $x=-2,y=2,z\in\mathbf{R}$　　(D) $x=-1,y=4,z=3$

2. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,1,a,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[-2,1,5,a]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[a,2,10,1]^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个不同特征值对应的特征向量，则 a 的取值范围为（　　）.

(A) $a\neq5$　　(B) $a\neq-4$　　(C) $a\neq-3$　　(D) $a\neq-3$ 且 $a\neq-4$

3. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全是 1，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是________.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=3$，则 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=$________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，且满足 $|\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}|=0$，$|2\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值是________.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是三个线性无关的 3 维列向量，满足 $\boldsymbol{A\xi}_i=\boldsymbol{\xi}_i,i=1,2,3$，则 $\boldsymbol{A}=$________.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&a&a\\a&a&a\\a&a&a\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和全部特征向量.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=[1,k,-1]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 对应于特征值 λ 的一个特征向量，求满足条件的常数 k.

9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x 与 y 应满足的条件.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，λ_1 和 λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 证明：$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

B组

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}$ 可逆，向量 $\alpha=[1,b,1]^T$ 是矩阵 A^* 对应于特征值 λ 的一个特征向量，$b>0$，则 (a,b,λ) 为（　　）.

(A) $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3},1\right)$　　(B) $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3},4\right)$　　(C) $(2,1,1)$　　(D) $(2,2,4)$

2. 设矩阵 A 满足 $A^3-A^2=A-E$，则（　　）.

(A) $A+E$ 与 $A-E$ 都不可逆

(B) $A+E$ 与 $A-E$ 至少有一个可逆

(C) $A+E$ 与 $A-E$ 有且仅有一个可逆

(D) $A+E$ 与 $A-E$ 至多有一个可逆

3. 已知 A 是3阶矩阵，$r(A)=1$，则 $\lambda=0$（　　）.

(A) 必是 A 的二重特征值　　(B) 至少是 A 的二重特征值

(C) 至多是 A 的二重特征值　　(D) 是一重、二重、三重特征值都可能

4. 设 α,β 是3维列向量，矩阵 $A=\alpha\beta^T$，若 $\alpha^T\beta=1$，则 $|A^2+A+E|=$（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

5. 设 A 是3阶不可逆矩阵，B 是 3×2 矩阵，$r(B)=2$，且 $AB+3B=O$，则行列式 $|A+2E|=$（　　）.

(A) 0　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 6

6. 已知2阶实对称矩阵 A 的秩 $r(A)=1$，$\lambda_1=\sqrt{2}$ 是其一个特征值，$\xi_1=[1,-1]^T$ 为对应于 λ_1 的特征向量，设 k 为任意常数，则非齐次线性方程组 $Ax=\xi_1$ 的通解是（　　）.

(A) $k\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$　　(B) $k\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

(C) $k\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$　　(D) $k\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

7. 已知 A,B 为3阶相似矩阵，$\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 为 A 的两个特征值，$|B|=2$，则行列式 $\begin{vmatrix}(A+E)^{-1}&O\\O&(2B)^*\end{vmatrix}=$ ________.

8. 设 A,B 为3阶相似矩阵，且 $|2E+A|=0$，$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ 为 B 的两个特征值，则行列式 $|A+2AB|=$ ________.

9. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个互不相同的特征值，ξ_1 是 A 的对应于 λ_1 的一个单位特征向量，则矩阵 $B=A-\lambda_1\xi_1\xi_1^T$ 的特征值是________.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶实对称矩阵，有特征值 $\lambda_1=4,\lambda_2=-1,\boldsymbol{\xi}_1=[-2,1]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_1 的特征向量，$\boldsymbol{\beta}=[3,1]^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A\beta}=$ ________.

11. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 a，求 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 当 k 是正整数时，求 $\boldsymbol{A}^k$ 的每行元素之和.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同的特征值，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是三个对应的特征向量. 证明：向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2),\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)$ 线性无关的充要条件是 $\lambda_2\lambda_3\neq 0$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，有 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}=\mu\boldsymbol{\eta}$，其中 λ,μ 是实数，且 $\lambda\neq\mu$，$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 是 n 维非零列向量. 证明：$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 正交.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$，求秩 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 及行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对应的特征向量分别是

$$\boldsymbol{\xi}_1=[2,2,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=[-1,2,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=[2,-1,2]^{\mathrm{T}},$$

且 $\boldsymbol{\beta}=[1,2,3]^{\mathrm{T}}$. 求：

(1) $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1$；

(2) $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，其特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征向量，且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$；

(2) 求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解.

C组

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶非零矩阵，已知 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$. 则下列 3 个说法

①0 未必是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值；

②1 必是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值；

③ 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 必是 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 0 的特征向量.

正确的个数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

2. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=a$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 当 $a=0$ 时，求行列式 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|$ 的值；

(2) 当 $a=2$ 时，求行列式 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|$ 的值.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ,μ 是实数，$\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量.

(1) 若 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，求 $\boldsymbol{A}^2$ 的一个特征值及对应的特征向量；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}=\mu\boldsymbol{\xi}$，问 $\boldsymbol{\xi}$ 是否必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量？并说明理由；

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且有 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\xi}=\mu\boldsymbol{\xi}$，证明 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，并指出其对应的特征值.

第 8 章　相似理论

A组

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，有 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=$(　　).

(A) $\begin{bmatrix}1&&\\&\frac{1}{2}&\\&&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}3&&\\&6&\\&&2\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&6\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}6&&\\&3&\\&&2\end{bmatrix}$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&2&-3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&4\\0&0&-3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&1&-5\\0&1&0\\1&1&-4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&1&-2\\5&1&-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-3\end{bmatrix}$，则在 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 中与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似的矩阵有(　　).

(A) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$　(B) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$　(C) $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$　(D) $\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$

3. 已知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=6$ 的线性无关的特征向量，那么矩阵 $\boldsymbol{P}$ 不能是(　　).

(A) $[\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$　(B) $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3]$

(C) $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2]$　(D) $[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则下列命题中：

①$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$；　②$\boldsymbol{A}^2\sim\boldsymbol{B}^2$；　③$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；　④$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$.

正确的个数为(　　).

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&c\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 有二重特征值 $\lambda=2$，且 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，则 $a+b+c=$________.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{b}=[9,18,-18]^{\mathrm{T}}$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有通解

$$k_1[-2,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[2,0,1]^{\mathrm{T}}+[1,2,-2]^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 是任意常数，求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{100}$.

7. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 0，又存在线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，使得$\boldsymbol{A\alpha}=3\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta}=3\boldsymbol{\alpha}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化；

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}=[0,-1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[1,0,-1]^{\mathrm{T}}$ 时，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&x\end{bmatrix}$的一个特征值为 1，求一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使$(\boldsymbol{AQ})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AQ})$ 为对角矩阵.

9. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&2&0\\-2&0&0\end{bmatrix},$$

问 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否相似？并说明理由.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量，且满足

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_2=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=-\frac{1}{6}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{B}$；

(2) 证明 $\boldsymbol{A}$ 与(1) 中的 $\boldsymbol{B}$ 相似；

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值并计算$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{A}^n$.

11. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&a&2\\5&b&3\\-1&1&-1\end{bmatrix}$，已知 $\lambda_1=1$ 与 $\lambda_2=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似对角化？若不能相似对角化，则说明理由；若能相似对角化，则求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

B组

1. 下列矩阵中不可相似对角化的是(　　).

(A)$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&-3\end{bmatrix}$　　(B)$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&1&-3\end{bmatrix}$

(C)$\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\-2&-2&-2\end{bmatrix}$　　(D)$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{bmatrix}$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$是 2 阶实矩阵，条件 ①$ad-bc<0$，②$b,c$ 同号，③$b=c$，④b,c 异号，则 ①，②，③，④ 中是 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵的充分条件的所有序号为(　　).

(A)①③　　(B)②③④　　(C)③④　　(D)①②③

3. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 B 相似于矩阵 A，记 $r(B-E)=r_1, r(B+E)=r_2, r(B+2E)=r_3$，则（　　）.

(A) $r_1<r_2<r_3$　　(B) $r_2<r_1<r_3$

(C) $r_3<r_2<r_1$　　(D) $r_1<r_3<r_2$

4. 设 A,B 是 n 阶实对称可逆矩阵，则存在 n 阶可逆矩阵 P，使下列关系式

①$PA=B$；　②$P^{-1}ABP=BA$；　③$P^{-1}AP=B$；　④$P^{T}A^2P=B^2$.

成立的个数为（　　）.

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

5. 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量，P 为 3 阶矩阵，且 $PA=[-\alpha_1,-2\alpha_2,-3\alpha_3]$，则 $|P-E|=$（　　）.

(A)6　(B) -6　(C)24　(D) -24

6. 已知 A 为 2 阶方阵，可逆矩阵 $P=[\alpha,\beta]$ 使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$，$Q=[\beta,\alpha]$，则 $Q^{-1}A^{*}Q=$ ________.

7. 已知 3 阶实对称矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=3$，其对应的特征向量为 $\xi_1=[-3,1,1]^{T}$，且 $r(A)=1$，则 $A=$ ________.

8. 若 A 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶实对称矩阵，且满足 $E-2A+A^2-2A^3=O$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，则 $A=$ ________.

9. 设矩阵 $Q=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&0&3\\0&1&1\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{bmatrix}$，$AQ=QD$，$E$ 是 3 阶单位矩阵，则 $A^3-3A^2+5E=$ ________.

10. 设向量 $\alpha=[1,1,1]^{T}$，$\beta=[1,2,3]^{T}$，$A=\alpha\beta^{T}$，$B=\beta\alpha^{T}$.

(1) 证明矩阵 A 与 B 相似；

(2) 求一个可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

11. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $\alpha_1=[-1,2,-1]^{T}$，$\alpha_2=[0,-1,1]^{T}$ 是方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值和对应的特征向量；

(2) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^{T}AQ=\Lambda$.

12. 设 n 阶实对称矩阵 A 满足

$$A^4+6A^3+9A^2-6A-10E=O,$$

求 A^k，k 为任意正整数.

13. 已知 A 是 3 阶实对称矩阵，且 $\operatorname{tr}(A)=-6$，$AB=C$，其中

$$B=\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\\1&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0&-12\\0&12\\0&-12\end{bmatrix},$$

求矩阵 A.

14. 设 $A=\begin{bmatrix}8&-2&-2\\-2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$，求一个实对称矩阵 B，使 $A=B^2$.

15. 设 3 阶矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，已知 $A^2=[\alpha_1,\alpha_2,-3\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3]$，记 $A^{100}=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$，将 β_1,β_2,β_3 写成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

16. 设 $\begin{cases}x_n=x_{n-1}+2y_{n-1},\\ y_n=4x_{n-1}+3y_{n-1}\end{cases}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，且 $x_0=2,y_0=1$，求 x_{100}.

17. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，且 $M=P^{-1}A^*P$，求 M 的特征值与特征向量.

18. 设 A 是 3 阶方阵，α 是 3 维列向量. 若 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha$ 线性无关，且满足 $A^3\alpha-2A^2\alpha-A\alpha+2\alpha=\mathbf{0}$，求：

(1) A 的特征值；

(2) A 的特征向量(用 A 与 α 表示).

19. 设 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维列向量，$\alpha_1\neq\mathbf{0}$，且满足

$$A\alpha_1=2\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3.$$

(1) 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(2) 判断 A 能否相似于对角矩阵，说明理由.

C 组

1. 已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1,\xi_1=[0,1,1]^T$ 为对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量，α 是 3 维列向量. 记 $W_1:\alpha$ 是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量；$W_2:\alpha$ 非零且与 ξ_1 正交，则 W_1 是 W_2 的(　　).

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

2. 设 A 是 3 阶方阵，A^TA 相似于矩阵 $\begin{bmatrix}2&0&3\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，其中 A^T 表示 A 的转置，E 表示 3 阶单位矩阵. 若 $r(5E-A^TA)=k+r(2E-AA^T)$，则 k 等于(　　).

(A) -3　　(B) 3　　(C) -2　　(D) 2

3. 设 A,B 均为 n 阶矩阵，A 有 n 个互不相同的特征值，且 $AB=BA$. 证明：B 相似于对角矩阵.

4. 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$，矩阵 B 满足 $AB=A-B$，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 均为对角矩阵，并写出这两个对角矩阵.

第 9 章　二次型

A 组

1. 下列矩阵中，是正定矩阵的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$　　(B) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 5 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$

(C) $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$　　(D) $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}$

2. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_2x_3$，则对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，均有(　　).

(A) $f(x_1,x_2,x_3)>0$　　(B) $f(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0$

(C) $f(x_1,x_2,x_3)<0$　　(D) $f(x_1,x_2,x_3)\leqslant 0$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行元素乘 2 得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列元素乘 2 得到矩阵 $\boldsymbol{C}$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与矩阵 $\boldsymbol{C}^{-1}$(　　).

(A) 合同但不相似　　(B) 相似但不合同

(C) 合同且相似　　(D) 不合同也不相似

4. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1，$\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 中各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-x_2-2x_3)^2+(x_1-x_2+ax_3)^2$ 的秩等于 2，则 $a=$________.

6. 若二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$$

的正、负惯性指数都是 1，则 $a=$________.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，若 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，则 k 的取值范围为________.

8. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2. 确定常数 c 的值，并求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，化二次型 f 为标准形.

9. 设实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{bmatrix}$，求使得二次型 $f_1(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 与 $f_2(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}A^*x$ 都化为标准形的正交变换 $x=Qy$，并写出它们的标准形.

10. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，且有可逆矩阵 $P=\begin{bmatrix}1&-1&b\\1&a&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ 满足 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，求：

(1) 二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 的规范形及二次型 $x^{\mathrm{T}}A^*x$ 的标准形；

(2) $(A^*)^{-1}$.

B组

1. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$ 的矩阵是(　　).

(A) A^2　　(B) $A+A^{\mathrm{T}}$　　(C) $A^{\mathrm{T}}A$　　(D) AA^{T}

2. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，A_{ij} 是 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式，$i,j=1,2,3$，$x=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$，$y=[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}$，若 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 经正交变换 $x=Py$ 化为 $3y_1^2-2y_2^2+y_3^2$，则 $g(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}\dfrac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j$ 经可逆变换 $x=Qy$ 可化为规范形(　　).

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　(B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $-y_1^2+y_2^2-y_3^2$　　(D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

3. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，$A^2+2A=O$，$r(A)=2$，且 $A+kE$ 为正定矩阵，其中 E 为 3 阶单位矩阵，则 k 应满足的条件是(　　).

(A) $k>0$　　(B) $k\geqslant 0$

(C) $k>2$　　(D) $k\geqslant 2$

4. 下列二次型中，是正定二次型的是(　　).

(A) $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4-x_1)^2$

(B) $f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_1)^2$

(C) $f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4+x_1)^2$

(D) $f_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_1)^2$

5. 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩为 r，符号差为 s，且 f 和 $-f$ 对应的矩阵合同，则必有(　　).

(A) r 是偶数，$s=1$　　(B) r 是奇数，$s=1$

(C) r 是偶数，$s=0$　　(D) r 是奇数，$s=0$

6. 设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 $A^2+A=O$. 若 A 的秩为 3，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 在正交变换下的标准形为________.

7. 若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$，则 a 的取值范围为________.

8. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，若二次型 $f(x_1,x_2)=\sum\limits_{i=1}^{2}(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{x})^2$ 正定，其中 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{x})$ 表示向量 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{x}$ 的内积，则 a 的取值范围是________.

9. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\0&-1&-4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-5\end{bmatrix}$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$，则 $\boldsymbol{C}=$ ________.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$\lambda_1=\lambda_2=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,2]^{\mathrm{T}}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量. 又设二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的符号差为 2，则矩阵 $\boldsymbol{A}=$ ________.

11. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维实单位列向量，求：

(1) 齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解；

(2) 矩阵方程 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}_{3\times3}$ 的全部解；

(3) 二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$ 的秩与正惯性指数.

12. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$（$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵）经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 又设 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{\alpha}=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$.

(1) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$；

(2) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的表达式；

(3) 用配方法将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，写出标准形和配方法对应的可逆线性变换.

13. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{bmatrix}$ 可相似对角化.

(1) 求常数 a 的值；

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使得二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形，并写出标准形.

14. 已知 $f(x,y)=x^2+4xy+y^2$，求正交变换 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$f(x,y)=2u^2+2\sqrt{3}uv.$$

15. (1) 设 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，且满足

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n,$$

证明对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，有

$$\lambda_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\lambda_n\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};$$

(2) 设 $f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，当 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 时，求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值.

C组

1. 设 A 是3阶实对称矩阵，$\lambda=5$ 是 A 的二重特征值，对应的特征向量为 $\xi_1=[1,-1,2]^T$，$\xi_2=[1,2,1]^T$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在 $x_0=[1,5,0]^T$ 的值 $f(1,5,0)=x_0^TAx_0\mid_{x_0=[1,5,0]^T}=$ ________.

2. (1) 设二次型 $f(x,y,z)=2x^2+y^2-4xy-4yz$，用正交变换 $x=Qy$ 将其化为标准形，并写出 Q；

(2) 求函数 $g(x,y,z)=\dfrac{2x^2+y^2-4xy-4yz}{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2\neq 0)$ 的最大值，并求出一个最大值点.

3. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&-4&6\\0&a&-12\\0&0&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 的规范形为 z_1^2.

(1) 求常数 a,b 的值；

(2) 求一个正交变换 $x=Qy$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.

4. (1) 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$，用可逆线性变换将 f 化为标准形，求出所作的可逆线性变换，并说明二次型的对应矩阵 A 是正定矩阵；

(2) 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&2&-3\\1&-3&6\end{bmatrix}$，求可逆矩阵 D，使 $A=D^TD$.

第三篇 概率论与数理统计

概率论与数理统计是硕士研究生招生考试考查内容之一，主要考查考生对随机规律性的基本概念、基本理论和基本方法的理解，以及运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力。在考研数学三试卷中分值约30分。

第 1 章　随机事件和概率

A 组

1. 设事件 A 与 B 互不相容，则(　　).

(A) $P(\overline{AB}) = 0$　　　　(B) $P(AB) = P(A)P(B)$

(C) $P(A) = 1 - P(B)$　　　　(D) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$

2. 假设事件 A 和 B 满足 $0 < P(B) < 1, P(A) > 0$，且 $P(B \mid A) = 1$，则(　　).

(A) $P(A \mid B) = 1$　　　　(B) $P(\overline{A} \mid B) = 1$

(C) $P(A \mid \overline{B}) = 0$　　　　(D) $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 0$

3. 设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A \cup B) = P(A) + P(B), 0 < P(C) < 1$，则下列结论中不一定正确的是(　　).

(A) $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$　　　　(B) $P(A \cup B|\overline{C}) = P(A|\overline{C}) + P(B|\overline{C})$

(C) $P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC)$　　　　(D) A,B 互不相容

4. 设 A 与 B 是两个随机事件，$P(B) = 0.6$ 且 $P(A \mid B) = 0.5$，则 $P(A \cup \overline{B}) = $ (　　).

(A) 0.1　　(B) 0.3　　(C) 0.5　　(D) 0.7

5. 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取 2 件，已知所取的 2 件产品中有 1 件是不合格品，则另 1 件也是不合格品的概率是(　　).

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{1}{5}$　　(D) $\frac{2}{5}$

6. 某人向同一目标独立重复射击，每次命中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$，则此人第 5 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为(　　).

(A) $4p(1-p)^3$　　　　(B) $24p(1-p)^3$

(C) $4p^2(1-p)^3$　　　　(D) $24p^2(1-p)^3$

7. 有 5 封信投入 4 个信箱，则有一个信箱有 3 封信的概率为________.

8. 从 1,2,3,4 四个数中有放回地任取两次，每次取一个数，先后得到两个数 X_1, X_2，记 $X = \min\{X_1, X_2\}$，则 $P\{X = 2\} = $ ________.

9. 已知随机事件 A,B 满足条件 $AB = \overline{A}\,\overline{B}$，且 $P(A) = \frac{1}{3}$，则 $P(\overline{B}) = $ ________.

10. 设 A,B,C 是三个随机事件，且

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = P(CB) = 0, P(AC) = \frac{1}{8},$$

则 A,B,C 中至少有一个发生的概率为________.

11. 设 10 张彩票中有 3 张有奖. 现已卖出 1 张，在余下的 9 张彩票中任取两张发现均没有奖，则已经卖出的那张彩票有奖的概率为________.

12. 从$[0,1]$中随机地取两个数，则其积大于$\frac{1}{4}$，其和小于$\frac{5}{4}$的概率为________.

13. 甲、乙两人射击，甲击中目标的概率为 80%，乙击中目标的概率为 70%，两人同时射击，且两人是否击中目标相互独立，求：

(1) 甲、乙两人都击中的概率；

(2) 甲、乙两人至少有一人击中的概率；

(3) 甲、乙两人恰有一人击中的概率；

(4) 甲、乙两人都没有击中的概率.

14. 10 件产品中有 5 件一级品，3 件二级品，2 件次品，无放回地抽取，求取到二级品之前取到一级品的概率.

B组

1. 设 A,B 是随机事件且满足 $P(A|B)=P(B|A)=\frac{2}{3}$，$P(\overline{A})=\frac{3}{4}$，则(　　).

(A)A,B 不独立且 $P(A\cup B)=\frac{1}{3}$　　(B)A,B 不独立且 $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$

(C)A,B 独立且 $P(A\cup B)=\frac{1}{4}$　　(D)A,B 独立且 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$

2. 以下 4 个结论：

① 教室中有 $r(r\leqslant 365)$ 个学生，则他们的生日都不相同的概率是$\frac{A_{365}^{r}}{365^{r}}$；

② 教室中有 4 个学生，近似看作每月天数相同，则至少有两个人的生日在同一个月的概率是$\frac{41}{96}$；

③ 将 C,C,E,E,I,N,S 共 7 个字母随机地排成一行，则恰好排成英文单词 $SCIENCE$ 的概率是$\frac{1}{315}$；

④ 袋中有编号为 1 到 10 的 10 个球，今从袋中任取 3 个球，则 3 个球的最小号码为 5 的概率为$\frac{1}{12}$.

正确的个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

3. 设口袋中有 10 个球，其中 6 个红球，4 个白球，每次不放回地从中任取一个，取两次，若取出的两个球中有 1 个是白球，则两个都是白球的概率为(　　).

(A) $\frac{1}{3}$　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{5}$　　(D) $\frac{1}{6}$

4. 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的. 根据以往的记录有以下的数据：

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家制造厂的元件在仓库中是混合堆放的，且无区分标志. 现从仓库中随机取一只元件，若已知取到的是次品，则最有可能来自(　　).

(A) 元件制造厂 1　　(B) 元件制造厂 2
(C) 元件制造厂 3　　(D) 无法判断

5. 设随机变量 X,Y 满足

$$P\{XY \leqslant 0\} = \frac{3}{5}, P\{\max\{X,Y\} > 0\} = \frac{4}{5},$$

则 $P\{\min\{X,Y\} \leqslant 0\} =$ (　　).

(A) $\frac{1}{5}$　　(B) $\frac{2}{5}$　　(C) $\frac{3}{5}$　　(D) $\frac{4}{5}$

6. 以下结论错误的是(　　).

(A) 设 A,B 是两个事件，若 $0 < P(B) < 1, P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1$，则 A,B 相互独立

(B) 设 A,B 是两个事件，若 A,B 满足 $P(A) > 0, P(B \mid A) = 1$，则 $P(A-B) = 0$

(C) 设 A,B 是两个事件，则 $(A-B) \cup B = A \cup B$

(D) 若当事件 A,B 同时发生时，事件 C 必发生，则 $P(C) < P(A) + P(B) - 1$

7. 设 $P(B) > 0, A_1, A_2$ 互不相容，则下列各式中不一定正确的是(　　).

(A) $P(A_1A_2 \mid B) = 0$

(B) $P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$

(C) $P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \mid B) = 1$

(D) $P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \mid B) = 1$

8. 设 $P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{3}{5}$，则 $P(B \mid \overline{A})$ 的最小值为(　　).

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

9. 设 A,B,C 为三个事件，A 与 B 独立，$P(C) = 0$，则 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$(　　).

(A) 必相互独立　　(B) 两两独立但不一定相互独立
(C) 不一定两两独立　　(D) 必不两两独立

10. 若要推导出 A,B,C 三个随机事件必相互独立，则它们应满足条件(　　).

(A) A,B,C 两两独立　　(B) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$
(C) $P(A-B) = 1$　　(D) $P(A-B) = 0$

11. 某枪手进行独立重复射击，已知在 3 次射击中至少有 1 次命中目标的概率为 0.973，则直到第 5 次射击才第 2 次命中目标的概率为________.

12. 现有两个报警系统 A 和 B，每个报警系统单独使用时，系统 A 有效的概率为 0.9，系统 B 有效的概率也为 0.9. 在 A 失灵的条件下，B 失灵的概率为 0.2，则在 B 失灵的条件下，A 有效的概率为________.

13. 事件 A 与 B 相互独立，$P(A) = a, P(B) = b$，如果事件 C 发生必然导致 A 与 B 同时发生，那

么 A,B,C 都不发生的概率为________.

14. 设随机事件 A,B,C 满足 $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$，且 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)=\dfrac{1}{4}$，$C=A\cup B$，则 $P(AB\mid C)=$ ________.

15. 某学生想借《张宇高等数学18讲》，决定到三个图书馆去借，对每一个图书馆而言，有无这本书的概率均为0.5；若有，能否借到的概率也均为0.5. 设这三个图书馆采购、出借图书相互独立，求该生能借到此书的概率.

16. 设有 n 个不同的质点，每个质点等可能地落到 $N(n\leqslant N)$ 个格子中的每个格子里，设每个格子容纳质点数是没有限制的. 求下列事件的概率.

(1) $A=\{$指定的 n 个格子中各有一个质点$\}$；

(2) $B=\{$恰有 n 个格子中各有一个质点$\}$；

(3) $C=\{$指定的一个格子中有 $m(m\leqslant n)$ 个质点$\}$.

C组

1. 设三个随机事件 A,B,C 两两独立且 $P(A)=P(B)=P(C)$，ABC 为不可能事件，则 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$ 的最小值为（　　）.

(A) $\dfrac{1}{16}$　　(B) $\dfrac{1}{8}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

2. 已知事件 A 与 B 的概率分别为 $P(A)=\dfrac{3}{4}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ 的可能取值为（　　）.

(A)0.2　　(B)0.4　　(C)0.6　　(D)0.8

3. 对任意事件 A,B，下列结论正确的是（　　）.

(A) $P(A)P(B)\geqslant P(A\cup B)P(AB)$

(B) $P(A)+P(B)\leqslant 2P(AB)$

(C) $P(A)+P(AB)\geqslant P(A\cup B)$

(D) $P(A)+P(B)\leqslant P(A\cup B)P(AB)$

4. 在10到99的所有两位数中任取一个数，则这个数能被2或3整除的概率为________.

5. 已知甲、乙两袋中装有同种球，其中甲袋中装有10个红球和10个白球，乙袋中装有10个红球. 从甲袋中一次性取10个球放入乙袋，则从乙袋中任取一球是白球的概率为________.

6. 甲、乙两个人轮流投篮，甲先投，甲每轮只投篮1次，而乙每轮投篮2次，先投中者为胜. 已知甲、乙每次投篮命中率分别为 p，0.5，且每人命中与否相互独立，求 p 为何值时，甲、乙两个人胜率相同.

第 2 章　一维随机变量及其分布

A 组

1. 设 X_1,X_2 为相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_1(x),F_2(x)$，则下列选项一定是某一随机变量的分布函数的为（　　）.

(A) $F_1(x)+F_2(x)$　(B) $F_1(x)-F_2(x)$　(C) $F_1(x)F_2(x)$　(D) $\dfrac{F_1(x)}{F_2(x)}$

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则下列可作为概率密度的为（　　）.

(A) $f(2x)$　(B) $2f(x)$　(C) $|f(-x)|$　(D) $f(|x|)$

3. 若随机变量 X 存在正概率点，即存在一点 a，使得 $P\{X=a\}>0$，则 X 为（　　）.

(A) 连续型随机变量　(B) 离散型随机变量

(C) 非连续型随机变量　(D) 非离散型随机变量

4. 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1,X_2 的分布函数，且存在点 x_0 使得 $F_1(x_0)>F_2(x_0)$. 若 $X_i\sim B(1,p_i)(0<p_i<1)$，$i=1,2$，则必有（　　）.

(A) $p_1=p_2$　(B) $p_1+p_2=1$　(C) $p_1<p_2$　(D) $p_1>p_2$

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ae^{-x}, & x>\lambda,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $(\lambda>0)$，则概率 $P\{\lambda<X<\lambda+a\}$ $(a>0)$ 的值（　　）.

(A) 与 a 无关，随 λ 增大而增大　(B) 与 a 无关，随 λ 增大而减小

(C) 与 λ 无关，随 a 增大而增大　(D) 与 λ 无关，随 a 增大而减小

6. 设随机变量 X 服从正态分布，其概率密度 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有驻点，且 $f(1)=1$，则 X 服从分布（　　）.

(A) $N(1,1)$　(B) $N\left(1,\dfrac{1}{2\pi}\right)$

(C) $N\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$　(D) $N(0,1)$

7. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ 单调增加，$P\{|X-\mu|<1\}$（　　）.

(A) 单调增加　(B) 单调减少　(C) 不变　(D) 变化不确定

8. 设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布，$X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，记 $p_1=P\{X\leqslant\mu-4\}$，$p_2=P\{Y\geqslant\mu+5\}$，则（　　）.

(A) 对任意实数 μ，都有 $p_1=p_2$　(B) 对任意实数 μ，都有 $p_1<p_2$

(C) 只对 μ 的个别值，才有 $p_1=p_2$　(D) 对任意实数 μ，都有 $p_1>p_2$

9. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，且一元二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，则 $\mu=$ ________.

10. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P\{X\leqslant 1\}=4P\{X=2\}$，则 $P\{X=3\}=$ ________.

11. 某元件的工作寿命 X(小时) 服从参数为 λ 的指数分布.

(1) 求该元件正常工作超过 t 小时的概率；

(2) 已知该元件已正常工作 10 小时，求在此基础上再工作超过 10 小时的概率($\lambda=0.01$)；

(3) 若系统装有 10 个这样的电子元件，且是否正常工作相互独立，当 10 个元件都无故障工作时，系统工作状态正常，求系统正常工作超过 20 小时的概率.

12. 已知随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{2}, & -1\leqslant x<0,\\ \frac{5}{7}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$$

求 X 的分布律，并计算 $P\{X<0\}$，$P\{X=1\}$，$P\{-1<X<3\}$，$P\{-2\leqslant X<1\mid X<2\}$.

13. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-(1+x)\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

求：(1) X 的概率密度；

(2) $P\{|X|\leqslant 1\}$，$P\{X>2\}$，$P\{1<X\leqslant 2\}$.

14. 设随机变量 X 满足不等式 $1\leqslant X\leqslant 4$，且 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=4\}=\frac{1}{3}$，在区间 $(1,4)$ 内服从均匀分布. 求随机变量 X 的分布函数.

B 组

1. 已知 $F(x)$，$G(x)$ 分别是某两个随机变量的分布函数，下列函数中不一定为某个随机变量的分布函数的是(　　).

(A) $0.4F(x)+0.6G(x)$　　(B) $F(x)G(x)$

(C) $F(x^3)$　　(D) $2F(x)-G(x)$

2. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，且 $f(x)=f(-x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对于任意实数 α，有(　　).

(A) $F(-\alpha)=1-\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x$　　(B) $F(-\alpha)=-F(\alpha)$

(C) $F(-\alpha)=\frac{1}{2}-\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x$　　(D) $F(-\alpha)=2F(\alpha)-1$

3. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，概率密度为 $f(x)=af_1(x)+bf_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 是正态

分布 $N(0,\sigma^2)$ 的概率密度，$f_2(x)$ 是参数为 λ 的指数分布的概率密度，已知 $F(0)=\dfrac{1}{8}$，则(　　).

(A)$a=1,b=0$　　(B)$a=\dfrac{3}{4},b=\dfrac{1}{4}$

(C)$a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{2}$　　(D)$a=\dfrac{1}{4},b=\dfrac{3}{4}$

4. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=a\dfrac{1+e^{-1}}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，则常数 $a=$(　　).

(A) $\dfrac{1}{e-1}$　　(B) $\dfrac{1}{e+1}$　　(C) $\dfrac{e}{e-1}$　　(D) $\dfrac{e}{e+1}$

5. 设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立且均服从 $0-1$ 分布：$P\{X_i=1\}=p,P\{X_i=0\}=1-p(i=1,2,3,4;0<p<1)$. 已知2阶行列式 $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的值大于零的概率等于 $\dfrac{1}{4}$，则 $p=$(　　).

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

6. 设随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布，m,n 为非零正整数，则 $P\{X>m+n\mid X>m\}$(　　).

(A) 与 m 无关，与 n 有关，且随 n 的增大而减小

(B) 与 m 无关，与 n 有关，且随 n 的增大而增大

(C) 与 n 无关，与 m 有关，且随 m 的增大而减小

(D) 与 n 无关，与 m 有关，且随 m 的增大而增大

7. 设 $Y\sim U(a,5)$，关于 x 的方程 $4x^2+4Yx+3Y+4=0$ 无实根的概率为 0.25，则常数 $a=$(　　).

(A) -15　　(B) $\dfrac{11}{3}$

(C) -15 或 $-\dfrac{11}{3}$　　(D) -15 或 $\dfrac{11}{3}$

8. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于(　　).

(A)$u_{\frac{\alpha}{2}}$　　(B)$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　(C)$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　(D)$u_{1-\alpha}$

9. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$F(x)$ 为其分布函数，$\mu>0$，则对于任意实数 a，有(　　).

(A)$F(-a)+F(a)>1$　　(B)$F(-a)+F(a)=1$

(C)$F(-a)+F(a)<1$　　(D)$F(\mu-a)+F(\mu+a)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. 已知每次试验"成功"的概率为 p，现进行 n 次独立重复试验，则在至少"成功"一次的条件下，"成功"不止一次的概率为________.

11. 设 X 服从参数为 λ 的指数分布，对 X 作 3 次独立重复观察，至少有 1 次观测值大于 2 的概率为 $\dfrac{7}{8}$，则 $\lambda=$________.

12. 设 X 是区间 $[0,1]$ 上的连续型随机变量，概率密度 $f(x)>0(0\leqslant x\leqslant 1)$，已知 $P\{X\leqslant 0.3\}=0.8$，且 $Y=1-X$，若有 $P\{Y\leqslant c\}=0.2$，则常数 $c=$________.

13. 甲、乙两人进行射箭比赛，约定甲先射，若射不中，乙射，若射不中再由甲射，以此类推，谁先射中谁获胜，比赛终止. 已知甲、乙射中的概率分别为 0.4 和 0.6. 若记 $\{Y=1\}$ 为甲获胜，记

$\{Y=0\}$为乙获胜，求 Y 的概率分布.

14. 设电子管寿命 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, & x>100,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

若一台收音机上装有三个这种电子管，且是否正常工作相互独立. 求：

(1) 在使用的最初 150 小时内，至少有两个电子管被烧坏的概率；

(2) 在使用的最初 150 小时内，烧坏的电子管数 Y 的分布律；

(3) Y 的分布函数.

15. 抛一枚均匀硬币，若正面向上，则在区间 $(0,1)$ 上任取一数 X；若反面向上，则在区间 $(2,4)$ 上任取一数 X，求 X 的分布函数.

C组

1. 设某地电压为服从正态分布 $N(220,20^2)$ 的随机变量，某种元件一天内在电压不超过 200 伏时损坏的概率为 0.05，在电压超过 200 伏但不超过 240 伏时损坏的概率为 0.1，在电压超过 240 伏时损坏的概率为 0.15. 若电路中共有 3 个该种元件，每个元件是否损坏是相互独立的，且至少要有 2 个元件损坏电路才发生故障，则一天内电路发生故障的概率为________.

2. 设随机变量 X 服从参数为$\sqrt{6}$ 的泊松分布，则当 $P\{X=n\}$ 最大时，$n=$________.

3. 市场上某产品由甲、乙两厂各生产$\dfrac{1}{2}$，已知甲厂和乙厂的产品指标分别服从分布函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，现从市场上任取一件产品，则其指标服从的分布函数为________.

4. 设在某时段进入某景区游览的游客人数服从参数 $\lambda=30$ 的泊松分布，每位游客乘坐观光缆车的概率均为 0.6，且每位游客是否乘坐观光缆车是相互独立的. 求进入该景区的游客乘坐观光缆车人数的概率分布.

第3章　一维随机变量函数的分布

A组

1. 设随机变量X的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$随机变量$Y=X^2$的概率密度记为$f_Y(y)$，则$f_Y(2)=(\quad)$.

(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　(D) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2. 设$X\sim N(0,1)$，$Y=X+|X|$，Y的分布函数为$F_Y(y)$，则$F_Y(y)$的间断点个数是(　　).

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

3. 设X是离散型随机变量，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ 0.2, & -2\leqslant x<-1,\\ 0.35, & -1\leqslant x<0,\\ 0.6, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

令$Y=|X+1|$，则随机变量Y的分布律为________.

4. 设连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1}, & 0<x<\mathrm{e}-1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则$Y=\sqrt{X}$的概率密度为________.

5. 设随机变量X服从参数为1的指数分布，令$Y=\max\{X,1\}$，求：

(1)Y的分布函数；

(2)$P\{Y=1\}$.

6. 设连续型随机变量X的概率密度$f(x)$为偶函数，证明：随机变量$-X$与X有相同的概率密度.

B组

1. 设随机变量 X 服从(0,1)上的均匀分布，则 $Y=-\ln X$ 服从(　　).

(A) 几何分布　　(B) 标准正态分布

(C) t 分布　　(D) 指数分布

2. 设随机变量 $X\sim U[-1,1]$，函数 $y=g(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & -1\leqslant x<0,\end{cases}$ 则 $Y=g(X)$ 的分布函数的间断点个数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

3. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$F(x)$为其分布函数，则随机变量 $Y=F(X)$的分布函数(　　).

(A) 处处可导　　(B) 恰有1个不可导点

(C) 恰有2个不可导点　　(D) 恰有3个不可导点

4. 设随机变量 X 与 $-X$ 服从同一均匀分布 $U[a,b]$，已知 X 的概率密度 $f(x)$ 的平方 $f^2(x)$ 也是概率密度，则 $b=$(　　).

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) -2　　(D)2

5. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 求：

(1) $P\{X=0\}$，$P\{X=1\}$；

(2) $Y=F(X)$ 的分布函数.

6. 设随机变量 X 服从(0,1)上的均匀分布，令随机变量 $Y=\begin{cases}X^2, X\leqslant \dfrac{1}{2},\\ X, X>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

(1) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$；

(2) 求 Y 的数学期望 EY.

C组

1. 令随机变量 $Y = g(X) = \frac{1}{2}[1+(-1)^X]$.

(1) 若随机变量 X 的概率分布为

X	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.3	0.4

求 Y 的概率分布；

(2) 若 $X \sim B(n,p)$，求 X 取值为偶数时的概率 $P\{X\text{为偶数}\}$.

第 4 章　多维随机变量及其分布

A组

1. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	1
0	$\frac{1}{15}$	p
1	q	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

若 X 与 Y 相互独立，则 $(p,q)=($　　$)$.

(A) $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{15}\right)$　　(B) $\left(\frac{1}{15},\frac{1}{5}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{10},\frac{2}{15}\right)$　　(D) $\left(\frac{2}{15},\frac{1}{10}\right)$

2. 设随机变量 X,Y 相互独立，且分别服从参数为 3 和 2 的泊松分布，则 $P\{X+Y=0\}=($　　$)$.

(A) e^{-5}　　(B) e^{-3}　　(C) e^{-2}　　(D) e^{-1}

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(0,\sigma_2^2)$，则 $P\{|X-Y|<1\}$(　　).

(A) 随 σ_1 的增加而增加，随 σ_2 的减少而增加　　(B) 随 σ_1 的增加而减少，随 σ_2 的减少而减少

(C) 随 σ_1 的增加而减少，随 σ_2 的减少而增加　　(D) 随 σ_1 的增加而增加，随 σ_2 的减少而减少

4. 设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 D 上的均匀分布，其中 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，则关于 t 的方程 $t^2+2Xt+Y=0$ 无实数根的概率为(　　).

(A) $\frac{1}{3}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{3}{4}$

5. 设二维随机变量 (X,Y) 在 $G=\left\{(x,y)\,\middle|\,-\frac{1}{2}<x<0,0<y<2x+1\right\}$ 上服从均匀分布，则 $P\left\{-\frac{1}{4}<X<0\,\middle|\,\frac{1}{2}<Y<1\right\}=$ ________.

6. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$，$Y\sim E(1)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $P\{Y\leqslant X\}=$ ________.

7. 已知随机变量 X 和 Y 的分布律分别为

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

且 $P\{XY=1\}=\frac{1}{2}$，则 (X,Y) 的分布律为________.

8. 已知二维连续型随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0 \text{ 或 } y<0, \\ x^3y^2, & 0\leqslant x<1, 0\leqslant y<1, \\ x^3, & 0\leqslant x<1, y\geqslant 1, \\ y^2, & x\geqslant 1, 0\leqslant y<1, \\ 1, & x\geqslant 1, y\geqslant 1. \end{cases}$$

求 (X,Y) 的边缘分布函数，并讨论 X 与 Y 的独立性.

9. 设袋中有5个球，其中有2个红球，3个白球，每次从袋中任意抽取1个，抽取两次，定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases} 1, & \text{第一次抽取的是红球}, \\ 0, & \text{第一次抽取的是白球}; \end{cases} \quad Y=\begin{cases} 1, & \text{第二次抽取的是红球}, \\ 0, & \text{第二次抽取的是白球}. \end{cases}$$

若采取无放回抽取，求：

(1) (X,Y) 的分布律和边缘分布律；

(2) $P\{X\geqslant Y\}$.

10. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{4}(y-x)e^{-y}, & |x|<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：(1) (X,Y) 分别关于 X,Y 的边缘概率密度；

(2) 在条件 $X=x$ 下随机变量 Y 的条件概率密度.

11. 设 X 关于 Y 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases} \frac{3x^2}{y^3}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

而 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} 5y^4, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}$.

B组

1. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，已知 $X=Y$，且都服从标准正态分布. 如有 $F(a,b)=\frac{1}{2}$，则必有（　　）.

(A)$a=0,b=0$　　(B)$a=0,b>0$

(C)$a=0,b<0$　　(D)$\min\{a,b\}=0$

2. 已知随机变量(X,Y)的分布律如下，

$X \backslash Y$	y_1	y_2
x_1	p_{11}	p_{12}
x_2	p_{21}	p_{22}

则X与Y相互独立的充要条件是(　　).

(A)$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \neq 0$　　(B)$r\left(\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\right)=1$

(C)$\dfrac{p_{11}}{p_{21}} \neq \dfrac{p_{12}}{p_{22}}$　　(D)$p_{ij} \neq 0(i,j=1,2)$

3. 已知二维随机变量(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	a	0.4
1	0.1	b

若随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，令

$$U=\max\{X,Y\},V=\min\{X,Y\},$$

则$P\{U+V=1\}=$(　　).

(A)0.1　　(B)0.3

(C)0.5　　(D)0.7

4. 设随机变量X与Y相互独立，且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，若$P\{X>Y\}<\dfrac{1}{2}$，则(　　).

(A)$\mu_1<\mu_2$　　(B)$\mu_1>\mu_2$

(C)$\sigma_1<\sigma_2$　　(D)$\sigma_1>\sigma_2$

5. 设随机变量X与Y有相同的概率分布，为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{3}{5} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix},$$

并且满足$P\{XY=0\}=1$，则$P\{X=Y\}=$(　　).

(A)0　　(B)$\dfrac{1}{5}$

(C)$\dfrac{1}{2}$　　(D)1

6. 设(X,Y)服从二维正态分布$N(0,1;1,1;0)$，$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数，则$P\{XY<0\}=$(　　).

(A)$\dfrac{1}{4}$　　(B)$\dfrac{1}{2}$

(C)$\Phi(1)$　　(D)$1-\Phi(1)$

7. 设随机变量 X 服从 $[-3,3]$ 上的均匀分布，$Y=X^2$，$F(x,y)$ 为 X 与 Y 的联合分布函数，则 $F(1,4)=$ ________.

8. 设随机变量 X,Y,Z 相互独立且都服从参数为 2 的指数分布，$U=\max\{X,Y,Z\}$，则 $P\{U<1\}=$ ________.

9. 设 $X\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，$Y$ 服从 $(0,3)$ 上的均匀分布，X 与 Y 相互独立，则行列式 $\begin{vmatrix} X & X-1 & 1 \\ 0 & Y & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的概率为________.

10. 已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{4}(i=1,2,3,4)$，及 $X=i$ 的条件下 Y 的条件分布 $P\{Y=j\mid X=i\}=\frac{1}{5-i}(j=i,i+1,\cdots,4)$. 求：

(1) X 和 Y 的联合分布律；

(2) 在 $Y=3$ 的条件下 X 的条件分布.

11. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-2x}, & x\geqslant 0,0\leqslant y\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：(1) 常数 A；

(2) (X,Y) 的分布函数.

12. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 6x, & 0<x<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求 $P\{X+Y<1\}$；

(2) 求 X 和 Y 的边缘概率密度；

(3) 在 $X=\frac{1}{3}$ 的条件下，求 $0<Y<\frac{1}{2}$ 的概率.

13. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0 \text{ 或 } y<0, \\ x^2y^2, & 0\leqslant x<1,0\leqslant y<1, \\ x^2, & 0\leqslant x<1,y\geqslant 1, \\ y^2, & x\geqslant 1,0\leqslant y<1, \\ 1, & x\geqslant 1,y\geqslant 1. \end{cases}$$

求：(1) $P\left\{0<X<\frac{1}{2},\frac{1}{4}<Y<1\right\}$，$P\left\{0\leqslant X<\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{4}<Y<1\right\}$；

(2) $P\{X\leqslant Y\}$，$P\{X=Y\}$.

14. 设 $X\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$，在 $X=x$ 的条件下，Y 服从正态分布 $N\left(x,\frac{1}{2}\right)$，求 Y 的概率密度.

C组

1. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & |x|<1,|y|<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则(　　).

(A) X与Y相互独立，X^2与Y^2也相互独立

(B) X与Y相互独立，X^2与Y^2不相互独立

(C) X与Y不相互独立，X^2与Y^2相互独立

(D) X与Y不相互独立，X^2与Y^2也不相互独立

2. 设随机变量X与Y相互独立，证明：X^2与Y^2也相互独立.

第5章　多维随机变量函数的分布

A组

1. 已知随机变量(X_1,X_2)的概率密度为$f_1(x_1,x_2)$，设$Y_1=2X_1,Y_2=\frac{1}{3}X_2$，则随机变量$(Y_1,Y_2)$的概率密度$f_2(y_1,y_2)=$（　　）.

(A) $f_1\left(\frac{y_1}{2},3y_2\right)$　　(B) $\frac{3}{2}f_1\left(\frac{y_1}{2},3y_2\right)$

(C) $f_1\left(2y_1,\frac{y_2}{3}\right)$　　(D) $\frac{2}{3}f_1\left(2y_1,\frac{y_2}{3}\right)$

2. 设随机变量X和Y独立同分布，且X的分布函数为$F(x)$，则$Z=\min\{X,Y\}$的分布函数为（　　）.

(A) $F^2(z)$　　(B) $F(x)F(y)$

(C) $1-[1-F(z)]^2$　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

3. 设随机变量X的概率密度为$f(x)$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，且$X,Y$相互独立，则$Z=\frac{X}{Y}$的概率密度为（　　）.

(A) $f(z)$　　(B) $f(-z)$

(C) $\frac{1}{2}[f(z)-f(-z)]$　　(D) $\frac{1}{2}[f(z)+f(-z)]$

4. 设二维随机变量(X,Y)的分布律为

X \ Y	1	2	3
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

则随机变量$Z=Y\cdot\min\{X,Y\}$的分布律为________.

5. 设随机变量X与Y相互独立，且都服从参数为1的指数分布，则随机变量$Z=\frac{Y}{X}$的概率密度为________.

6. 设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\leqslant k,\\ 1, & Y>k\end{cases}(k=1,2).$$

求：(1) 二维随机变量 (X_1,X_2) 的概率分布；

(2) 随机变量 $Z=X_1-X_2$ 的概率分布.

7. 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,-y\leqslant x\leqslant y\}$，二维随机变量 (X,Y) 服从 D 上的均匀分布. 求：

(1) (X,Y) 分别关于 X,Y 的边缘概率密度；

(2) 随机变量 $Z=X-Y$ 的概率密度.

8. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}Ax^2y, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $Z=X^2+Y^2$，求：

(1) 常数 A 的值；

(2) Z 的概率密度.

B组

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从参数为 λ 的指数分布，则下列随机变量中服从参数为 2λ 的指数分布的是(　　).

(A) $X+Y$　　(B) $X-Y$

(C) $\max\{X,Y\}$　　(D) $\min\{X,Y\}$

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim B(n,p)(0<p<1)$，则 $X+Y$ 的分布函数(　　).

(A) 为连续函数　　(B) 恰有 $n+1$ 个间断点

(C) 恰有 1 个间断点　　(D) 有无穷多个间断点

3. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则随机变量 $(2X,Y+1)$ 的概率密度 $f_1(x,y)=$ ________.

4. 设一元二次方程 $x^2-Xx+Y=0$ 的两个根相互独立，且都服从 $(0,2)$ 内的均匀分布，分别求 X 与 Y 的概率密度.

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从 $(0,1)$ 内的均匀分布. 求 $Z=|X-Y|$ 的概率密度及 $P\left\{-\dfrac{1}{2}<X-Y<\dfrac{1}{2}\right\}$.

6. 设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求：(1) $Z=|X|+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

(2) EZ.

7. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}Ax+By, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 且

$P\{Y>X\}=\dfrac{5}{12}$，记 $Z=\min\{X,Y\}$，求：

(1) 常数 A,B 的值；

(2) Z 的概率密度.

8. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 X_i 服从参数为 $\lambda_i(\lambda_i>0)$ 的指数分布，其概率密度为

$$f_i(x)=\begin{cases}\lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n,$$

求 $P\{X_1=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\}$.

9. 设随机变量 X,Y 相互独立且同分布，X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{3}(k=1,2,3)$，$Z\sim U[0,1]$，$V=\min\{X,Y\}$，$T=Z+V$. 求：

(1) V 的概率分布；

(2) T 的分布函数.

C组

1. 设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，下列各式都有意义.

① $E(XY)=EXEY$；

② $f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$；

③ $P\{X>x,Y>y\}=1-F_X(x)F_Y(y)$；

④ 令 $Z=X+Y$，则 $F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$.

若 X 与 Y 独立，则上式中必成立的个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

2. 已知随机变量 X_1,X_2,X_3 独立同分布于 $f_i(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $i=1,2,3$. 记 $X=\max\{\min\{X_1,X_2\},X_3\}$，则当 $x>0$ 时，X 的分布函数 $F(x)=$ ________.

3. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+y)}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，并判断 X 与 Y 是否独立；

(2) 记 $U=X$，$V=Y-X$，求 (U,V) 的分布函数 $F(u,v)$，并判断 U,V 是否独立.

4. 某商品一周的需求量 X 是随机变量，已知其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

设各周的需求量相互独立，以 U_k 表示 k 周的总需求量. 求：

(1) U_2 和 U_3 的概率密度 $f_k(x)(k=2,3)$；

(2) 接连三周中的周最大需求量的概率密度 $f_{(3)}(x)$.

第 6 章　数字特征

A 组

1. 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的指数分布，若 $P\{X > DX\} = (P\{X > EX\})^3$，则 $\lambda =$ (　　).

(A)3　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{1}{3}$

2. 设随机变量 X 服从参数为 $\frac{3}{4}$ 的 $0-1$ 分布，随机变量 Y 服从参数为 $\frac{1}{4}$ 的 $0-1$ 分布，且 $P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{1}{8}$，则 $E(XY) =$ (　　).

(A) $\frac{1}{8}$　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{3}{8}$　　(D) $\frac{1}{2}$

3. 设随机变量 $X \sim N(2,4)$，$Y \sim N(2,5)$，且 $D(X+Y) = DX - DY + 14$，则下列结论正确的是(　　).

(A) $E(XY) = EXEY + 2(DX - DY)$　　(B) $D(X-Y) = DY$

(C) X, Y 独立　　(D) X, Y 不相关

4. 设 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$，二维随机变量 (X,Y) 服从 D 上的均匀分布，$Z = \min\{X, Y\}$，则 $EZ =$ (　　).

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{1}{6}$

5. 设随机变量 $X \sim E(1)$，记 $Y = \max\{X, 1\}$，则 $EY =$ (　　).

(A)1　　(B) $1 - e^{-1}$

(C) $1 + e^{-1}$　　(D) e^{-1}

6. 设随机变量 $X \sim N(1,1)$，$Y \sim N(-1,1)$，且 X, Y 相互独立，则下列结论不正确的是(　　).

(A) (X,Y) 服从二维正态分布　　(B) $2X + Y$ 服从正态分布

(C) $P\{2X + Y > 1\} = \frac{1}{2}$　　(D) $2X + Y$ 与 $X + 2Y$ 相互独立

7. 设随机变量 X_1, X_2 相互独立，且都服从标准正态分布 $N(0,1)$，记 $Y = X_1 - X_2$，$Z = X_1X_2$，则 Y, Z 的相关系数 $\rho_{YZ} =$ (　　).

(A) -1　　(B)0　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D)1

8. 设随机变量 X 在 $[-1,1]$ 上服从均匀分布，$Y = X^3$，则 X 与 Y(　　).

(A) 不相关且相互独立　　(B) 不相关且不独立
(C) 相关且相互独立　　(D) 相关且不独立

9. 设随机变量 $X \sim U[-1,3]$，$Y=\begin{cases}-1, & X \leqslant 0,\\ 1, & X>0,\end{cases}$ 则 $DY=$ ________.

10. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\frac{1}{5}\Phi(x)+\frac{4}{5}\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$ ________.

11. 设 X 和 Y 相互独立，且 (X,Y) 的分布律如下，

Y \ X	0	2	4
1	a	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	b

则 $E(XY)=$ ________.

12. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9，若 $Z=X-0.4$，则 Y 与 Z 的相关系数为________.

13. 二维正态分布一般表示为 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，设 $(X,Y)\sim N(1,1;4,9;0.5)$，令 $Z=2X-Y$，则 Z 与 Y 的相关系数为________.

14. 设随机变量 X 的数学期望 $EX=75$，方差 $DX=5$，由切比雪夫不等式估计得

$$P\{|X-75|\geqslant k\}\leqslant 0.05,$$

则 $k=$ ________.

15. 在区间 $[0,2]$ 上任取两数 X,Y，求 $|X-Y|$ 的数学期望与方差.

16. 设点 (X,Y) 在以 $(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$ 为顶点的三角形内服从均匀分布，求 X 与 Y 的相关系数.

B 组

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 若 $Y=X^2$，则 $DY=$ (　　).

(A) $20-2\pi^2$　　(B) $4\pi^2-20$　　(C) $28-2\pi^2$　　(D) $4\pi^2-28$

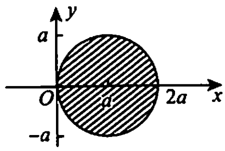
2. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=n+1\}=\frac{1}{3}\cdot P\{X=n\}(n=1,2,\cdots)$，则 $EX=$ (　　).

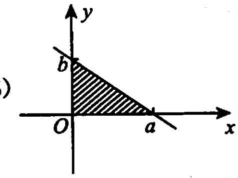
(A) $\frac{1}{3}$　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{3}{2}$　　(D) 3

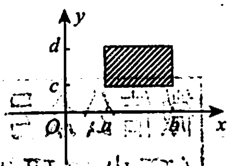
3. 设 a 为区间 $(0,1)$ 内一个定点，随机变量 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布. 以 Y 表示点 X 到 a 的距离，当 X 与 Y 不相关时，$a=$ (　　).

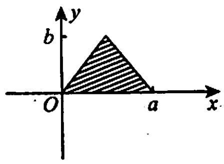
(A) 0.1　　(B) 0.3　　(C) 0.5　　(D) 0.7

4. 已知 (X,Y) 在下述各区域上服从二维均匀分布，则 X 与 Y 不独立且不相关的是(　　).

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

5. 设随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，则下列给出的选项中X与Y不独立且一定不相关的是(　　).

(A)$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-x-2y}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他\end{cases}$　　(B)$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & 其他\end{cases}$

(C)$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$　　(D)$f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

6. 设随机变量$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，且$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1,Y=-1\}$，则$X$与$Y$(　　).

(A) 必不相关　　(B) 必独立　　(C) 必不独立　　(D) 必相关

7. 甲、乙两人约定8～12点在某地会面，设两人分别于8点后X与Y小时到达会面地，两人到达时间相互独立且均服从$[0,4]$上的均匀分布，则先到者的平均等待时间为(　　).

(A) $\frac{1}{3}$小时　　(B) $\frac{2}{3}$小时　　(C)1小时　　(D) $\frac{4}{3}$小时

8. 设(X,Y)服从二维正态分布$N(0,0;0.5,0.5;0)$，则$D(|X-Y|)$为(　　).

(A)0　　(B)$1-\frac{2}{\pi}$　　(C)1　　(D)$1+\frac{2}{\pi}$

9. 设圆的半径X服从区间$(0,1)$上的均匀分布，其周长与面积分别记为Y与Z，则$\mathrm{Cov}(Y,Z)=$(　　).

(A) $\frac{1}{12}\pi^2$　　(B) $\frac{1}{6}\pi^2$　　(C) $\frac{1}{3}\pi^2$　　(D) $\frac{1}{2}\pi^2$

10. 设$EX=\frac{1}{2}$，$DX=\frac{1}{4}$，令$p=P\{-1<X<2\}$，则由切比雪夫不等式得(　　).

(A)$p\leqslant\frac{1}{9}$　　(B)$p\geqslant\frac{1}{9}$　　(C)$p\leqslant\frac{8}{9}$　　(D)$p\geqslant\frac{8}{9}$

11. 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}(x-2)}, & x\geqslant 2,\\ 0, & x<2,\end{cases}$随机变量$Y$服从参数为1的泊松分布，且$X$与$Y$独立，则$D(XY)=$________.

12. 设随机变量X与Y的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

与

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

且相关系

数 $\rho_{XY}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 (X,Y) 的分布律为________.

13. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

令 $Y=X^2$，则 X 与 Y 的协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$________.

14. 设随机变量 X 服从正态分布，且概率密度为 $f(x)=Ae^{-\frac{x^2}{2}+Bx}(-\infty<x<+\infty)$，其中 A,B 为常数，已知 $EX=DX$，则 $E(Xe^{-2X})=$________.

15. 若连续型随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，令随机变量 $Y=[X+1]$，其中 $[\cdot]$ 表示取整符号，则 $EY=$________.

16. 独立重复试验中事件 A 发生的概率为 $\dfrac{1}{3}$，若随机变量 X 表示事件 A 第一次发生时前面已经进行的试验次数，则 $EX=$________.

17. 已知随机变量 X 在 $(1,2)$ 上服从均匀分布，在 $X=x$ 条件下 Y 服从参数为 x 的指数分布，则 $E(XY^2)=$________.

18. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则随机变量 $Z=X-Y$ 的方差为________.

19. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y), & 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则随机变量 $U=X+2Y,V=-X$ 的协方差 $\mathrm{Cov}(U,V)=$________.

20. 袋中有 n 张卡片，分别记有号码 $1,2,\cdots,n$，从中有放回地抽取 k 次，每次抽取 1 张，以 X 表示所得号码之和，求 EX,DX.

21. 设 $X\sim U\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right]$，若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，求：

(1) $D[X]$；

(2) $D(X-[X])$.

22. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ae^{x(B-x)}(-\infty<x<+\infty)$，且 $EX=2DX$，求：

(1) 常数 A,B 的值；

(2) $E(X^2+e^X)$ 的值；

(3) $Y=|\sqrt{2}(X-1)|$ 的分布函数 $F(y)$.

23. 设随机变量 X 与 Y 同分布，且 $P\{|X|=|Y|\}=0$. 已知 X 的概率分布为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(1) 求 X 与 Y 的联合概率分布，并计算 $P\{|X+Y|=1\}$；

(2) 求 X 与 Y 的协方差与相关系数，并讨论 X 与 Y 的相关性与独立性；

(3) 求 $D(2X-3Y)$.

24. 设随机变量 X,Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

且 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{8}$，求：

(1) X 与 Y 的联合概率分布；

(2) Y 在 $X=1$ 条件下的条件分布；

(3) $E(|X-Y|)$.

25. 在 x 轴上的闭区间 $[-1,1]$ 上及 y 轴上的闭区间 $[0,1]$ 上分别任取一点，求这两点距离的平方的数学期望与方差.

26. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x^2y, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$Z=\max\{X,Y\}$，求 $\mathrm{Cov}(X+Y,Z)$.

27. 设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & |x|<1,\\ \frac{1}{8}, & 1\leqslant |x|\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 令

$$Y=g(X)=\begin{cases}X^2+1, & X<1,\\ 2, & X\geqslant 1.\end{cases}$$

求：(1) $F_Y(y)$；

(2) $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

28. $\triangle ABC$ 边 AB 上的高 CD 长度为 h. 向 $\triangle ABC$ 中随机投掷一点 P，求：

(1) 点 P 到边 AB 的距离 X 的概率密度；

(2) X 的数学期望与方差.

29. 设 X 和 Y 相互独立且均服从 0－1 分布，$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=0.6$. 证明：$U=X+Y$，$V=X-Y$ 不相关且不独立.

30. 设 $X\sim N(0,1)$，Y 各以 0.5 的概率取值 ± 1，且假定 X 与 Y 相互独立. 令 $Z=XY$.

(1) 求 Z 的分布；

(2) 问 X 与 Z 是否独立？是否相关？

C组

1. 设 A,B 为两个事件，$0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$，且 A,B 不相容. 记随机变量 $X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生},\end{cases}$ 则以下结论不正确的是(　　).

(A) $E(XY) < EXEY$　　(B) $D(XY) > DXDY$

(C) $D(X-Y) > DX+DY$　　(D) $D(X+Y) < DX+DY$

2. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=f(-x,y)$，且 ρ_{XY} 存在，则 $\rho_{XY}=$ (　　).

(A) 1　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -1 或 1

3. 某人对某一目标进行独立重复射击，直到命中与未命中两个结果都出现为止. 设每次射击命中目标的概率均为 p，X 表示射击次数. 若 $EX=3$，则 $p=$ (　　).

(A) $\dfrac{1}{4}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{1}{3}$

4. 一个均匀的四面体，有三面分别染上红、白、黑三种颜色，第四面同时染上这三种颜色. 投掷此四面体，观察底面的颜色. 设

$$X=\begin{cases}1, & \text{底面有红色},\\ 0, & \text{底面没有红色},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & \text{底面有白色},\\ 0, & \text{底面没有白色},\end{cases}\quad Z=\begin{cases}1, & \text{底面有黑色},\\ 0, & \text{底面没有黑色},\end{cases}$$

则下列选项中正确的是(　　).

(A) X,Y,Z 相互独立　　(B) X,Y,Z 两两独立

(C) XY 与 Z 不相关　　(D) XY 与 Z 独立

5. 已知随机变量 X_1,X_2,X_3 的方差都是 $\sigma^2(\sigma^2>0)$，任意两个随机变量之间的相关系数都是 ρ，则 ρ 的最小值为________.

6. 在上半单位圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上任取两点 M,N，记扇形 OMN 的面积为 S_1，三角形 OMN 的面积为 S_2，求 $\mathrm{Cov}(S_1,S_2)$.

7. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，已知方差 $DX=1$，而随机变量 Y 的概率密度为 $f(-y)$，且 X 与 Y 的相关系数为 $-\dfrac{1}{4}$. 记 $Z=X+Y$.

(1) 求 EZ,DZ；

(2) 用切比雪夫不等式估计 $P\{|Z|\geqslant 2\}$.

8. 商店销售某种季节性商品，每售出一件获利500元，季度末未售出的商品每件亏损100元，以 X 表示该季度此种商品的需求量，若 X 服从正态分布 $N(100,4)$，求：

(1) 进货量最少为多少时才能以超过95%的概率保证供应？

(2) 进货量为多少时商店获利的期望值最大？

($\Phi(1.65)=0.95, \Phi(0.95)=0.83$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数)

9. 把一颗骰子独立地投掷 n 次，记1点出现的次数为随机变量 X，6点出现的次数为随机变量 Y，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 次投掷出现 1 点},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad Y_j=\begin{cases}1, & \text{第 } j \text{ 次投掷出现 6 点},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

(1) 求 EX,DX；

(2) 分别求 $i\neq j$ 时与 $i=j$ 时 $E(X_iY_j)$ 的值；

(3) 求 X 与 Y 的相关系数.

10. 对于任意两个事件 A_1,A_2,考虑随机变量

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{若事件 } A_i \text{ 出现},\\ 0, & \text{若事件 } A_i \text{ 不出现}\end{cases}\quad (i=1,2).$$

证明:随机变量 X_1 和 X_2 相互独立的充分必要条件是事件 A_1 和 A_2 相互独立.

第 7 章　大数定律与中心极限定理

A组

1. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立同分布，X_n 的概率密度是 $f(x)$，则下列 $f(x)$ 中，不能满足辛钦大数定律条件的是（　　）.

(A) $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{4}x, & 0\leqslant x<2,\\ \dfrac{1}{x^2}, & x\geqslant 2\end{cases}$　　(B) $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0,\\ 1-x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

2. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，则在下列条件中能使 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2,\cdots$ 满足独立同分布中心极限定理的是（　　）.

(A) $P\{X_i=m\}=p^m(1-p)^{1-m},m=0,1;0<p<1$

(B) $P\{X_i\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\pi(1+t^2)}\mathrm{d}t$

(C) $P\{|X_i|=m\}=\dfrac{c}{m^2},m=1,2,\cdots$；常数 $c=\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{2}{m^2}\right)^{-1}$

(D) X_i 服从参数为 i 的指数分布

3. 已知产品的废品率 $p=0.005$，则 10 000 件产品中废品数不大于 70 的概率为________.（$\Phi(2.84)=0.997\ 7$）

4. 设连续型随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{40}$ 相互独立同分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

记 $Y=\sum\limits_{i=1}^{40}X_i$，则依中心极限定理，$\dfrac{Y-\mu}{\sigma}$ 近似服从 $N(0,1)$，且 $\sigma>0$，其中 μ 和 σ 分别取值为________.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从标准正态分布 $N(0,1)$，问当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$（$k$ 为正奇数）依概率收敛于何值？

B组

1. 设$Z \sim N(0,1)$，令$X=\mu+\sigma Z$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本，则当$n\to\infty$时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^3$依概率收敛于(　　).

(A)μ^3　　(B)σ^3　　(C)$\mu^3+3\mu\sigma^2$　　(D)$\mu^3+3\mu^2\sigma^3$

2. 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且都服从参数为$\frac{1}{2}$的指数分布，则当n充分大时，随机变量$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$近似服从(　　).

(A)$N(2,4)$　　(B)$N\left(2,\frac{4}{n}\right)$　　(C)$N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4n}\right)$　　(D)$N(2n,4n)$

3. 设随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立且都服从$U[1,4]$，$\Phi(x)$是标准正态分布的分布函数，则$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{2\sum_{i=1}^{n}X_i-5n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=$(　　).

(A)$\Phi(x)$　　(B)$\Phi(\sqrt{3}x)$　　(C)$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$　　(D)$\Phi\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)$

4. 设一本书共有100万个印刷符号，在排版时每个符号被排错的概率为0.000 1，校对时每个排版错误被改正的概率为0.9，则校对后排版错误不超过15个的概率为________.$(\Phi(1.58)=0.942\,9)$

5. 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$相互独立，且均服从二项分布$B\left(1,\frac{1}{2}\right)$，若根据中心极限定理，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{a\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-X_{2i-1})\leqslant\sqrt{n}x\right\}=\Phi(x)(a>0),$$

其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$a=$________.

6. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是独立同分布的随机变量序列，且$EX_i=\mu,DX_i=\sigma^2,i=1,2,\cdots,n$，令$Y_n=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iX_i$. 证明：随机变量序列$\{Y_n\}$依概率收敛于$\mu$.

C组

1. 设随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立同分布，且$E(X_i^k)=\mu_k,DX_i=\sigma^2(i,k=1,2,\cdots)$，记$A_1=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$表示随机变量序列的一阶原点矩，$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$表示随机变量序列的二阶原点矩，$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$表示随机变量序列的二阶中心矩，则当$n\to\infty$时，(　　).

(A) 由大数定律，依概率，$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 趋于 μ_2 且 $B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 趋于 σ^2

(B) 由大数定律，依概率，$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 趋于 μ_2，但 $B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 不趋于 σ^2

(C) 由大数定律，依概率，$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 不趋于 μ_2，但 $B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 趋于 σ^2

(D) 由大数定律，依概率，$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 不趋于 μ_2 且 $B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 不趋于 σ^2

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且同服从标准正态分布 $N(0,1)$，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，问当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 依概率收敛于何值？

第 8 章　统计量及其分布

A组

1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,Q^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则(　　).

(A) $\overline{X}\sim N(0,1),Q^2\sim\chi^2(n)$　　(B) $\overline{X}\sim N(0,n),Q^2\sim\chi^2(n-1)$

(C) $\overline{X}\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right),Q^2\sim\chi^2(n)$　　(D) $\overline{X}\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right),Q^2\sim\chi^2(n-1)$

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 是来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，则统计量

$$Y=\frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}}$$

服从(　　).

(A) $\chi^2(n-1)$　　(B) $t(n-1)$　　(C) $F(n,1)$　　(D) $F(1,n-1)$

3. 设随机变量 $X\sim N(0,4)$，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则(　　).

(A) $\frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\sim\chi^2(1)$　　(B) $\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$

(C) $\sqrt{\frac{(n-1)X_n^2}{\sum_{i=1}^{n-1}X_i^2}}\sim t(n-1)$　　(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$

4. 设随机变量 $X\sim F(n,n)$，记 $p_1=P\{X\geqslant 1\},p_2=P\{X\leqslant 1\}$，则(　　).

(A) $p_1<p_2$　　(B) $p_1>p_2$

(C) $p_1=p_2$　　(D) p_1,p_2 大小无法比较

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自标准正态总体 X 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,Y=\overline{X}-S$，则 $E(Y^2)=$(　　).

(A) $1-\frac{1}{n}$　　(B) $1+\frac{1}{n}$　　(C) $1-\frac{1}{n-1}$　　(D) $1+\frac{1}{n-1}$

6. 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则对于统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$，有(　　).

(A)$ET_1 > ET_2, DT_1 > DT_2$　　(B)$ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$

(C)$ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$　　(D)$ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$

7. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 独立同分布，且 $EX_i = 0, DX_i = 10$，$i = 1,2,\cdots,100$，令 $\overline{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$，则 $E\left[\sum_{i=1}^{100}(X_i - \overline{X})^2\right] =$ ______.

8. 设 $X \sim N(0,\sigma^2)(\sigma > 0)$，$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i$，$Z = \frac{\sqrt{6}\,\overline{X}}{|X_4 - X_5|}$.

(1) 证明：$Z \sim t(1), Z^2 \sim F(1,1)$；

(2) 设 $S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(X_i - \overline{X})^2$，若 $S^2 \sim \chi^2(2)$，求 σ.

B组

1. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n (n > 1)$ 是取自总体 X 的简单随机样本，样本均值为 $\overline{X}$，如果 $P\{|X - \mu| < a\} = P\{|\overline{X} - \mu| < b\}$，则比值 $\frac{a}{b}$（　）.

(A) 与 σ 及 n 都有关　　(B) 与 σ 及 n 都无关

(C) 与 σ 无关，与 n 有关　　(D) 与 σ 有关，与 n 无关

2. 设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$（σ^2 已知），$X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 是取自总体 X 的简单随机样本，S^2 为样本方差，则下列结论中正确的是（　）.

(A) $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$　　(B) $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}S} \sim t(n)$

(C) $\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$　　(D) $\frac{(n-1)X_n^2}{\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2} \sim F(n-1,1)$

3. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，且 $Y = \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{4} X_i^2 + aX_1X_2 + aX_3X_4$ 服从参数为 n 的 χ^2 分布，则 $(n,a) =$（　）.

(A)(1,1)　　(B)(1,2)　　(C)(2,1)　　(D)(2,2)

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n > 2)$ 是来自正态总体 $X \sim N(0,\sigma^2)(\sigma > 0)$ 的简单随机样本. 记

$$\overline{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i (k = n-1, n), S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \overline{X}_{n-1})^2,$$

已知 $Y = \frac{\overline{X}_n}{S_{n-1}}\sqrt{a}$（$a$ 为正常数）服从参数为 b 的 t 分布，则参数 a, b 应为（　）.

(A)$a = n-1, b = n-1$　　(B)$a = n-1, b = n-2$

(C)$a = n, b = n-1$　　(D)$a = n, b = n-2$

5. 设 n 为正整数，随机变量 $X\sim t(n),Y\sim F(1,n)$，常数 c 满足 $P\{X>c\}=\dfrac{2}{5}$，则 $P\{Y\leqslant c^2\}=$（　　）.

(A) $\dfrac{1}{5}$　　(B) $\dfrac{2}{5}$　　(C) $\dfrac{3}{5}$　　(D) $\dfrac{4}{5}$

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 $N(1,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为其样本均值，S^2 为其样本方差. 记统计量 $T=\dfrac{3(\overline{X}-1)}{S}$，若 $P\{-2<T<0\}=0.3$，则 $P\{T>2\}=$（　　）.

(A)0.1　　(B)0.2　　(C)0.3　　(D)0.4

7. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，记 $S_0^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,S_1^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，当样本量 $n>2$ 时，下列结论中正确的是（　　）.

(A) $D(S_1^2)>D(S_0^2)>D(S^2)$　　(B) $D(S_0^2)>D(S^2)>D(S_1^2)$

(C) $D(S^2)>D(S_1^2)>D(S_0^2)$　　(D) $D(S^2)>D(S_0^2)>D(S_1^2)$

8. 设总体 X 服从分布 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1,0<p<1$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，记 $Y_1=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\},Y_2=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{X_j\},Y_3=Y_1-Y_2$，则 $EY_3=$ ________.

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为取自正态总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$Y_i=X_i-\overline{X}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $DY_i=$ ________.

10. 设随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0;1,4;0)$，则 $D(X^2-2Y^2)=$ ________.

11. 设总体 X 和 Y 相互独立，且分别服从正态分布 $N(0,4)$ 和 $N(0,7)$，$X_1,X_2,\cdots,X_8$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{14}$ 分别为来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则统计量 $|\overline{X}-\overline{Y}|$ 的数学期望和方差分别为________.

12. 设 $F\sim F(20,30)$，则在 $\alpha=0.95$ 的条件下其上侧分位数为________. ($F_{0.05}(30,20)=2.04,F_{0.05}(20,30)=1.93$)

13. 设总体 X 服从 $N(0,9)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S 为样本标准差，A_2 为样本二阶原点矩，求：

(1) $E[(\overline{X}S)^2]$；

(2) EA_2 与 DA_2.

14. 设 X_1,X_2 是来自总体 X 的简单随机样本，且

$$\overline{X}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}X_i,S_2^2=\sum_{i=1}^{2}(X_i-\overline{X})^2,Y=\sqrt{X_1X_2}.$$

(1) 若 X 服从参数为 $\dfrac{1}{2}$ 的指数分布，求 EY；

(2) 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $E[(\overline{X}S_2^2)^2]$.

C组

1. 设 $X_1,\cdots,X_{10}$ 是总体服从 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记

$$Y_1=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X_i,Y_2=\frac{1}{6}\sum_{j=5}^{10}X_j,$$

$$S_1^2=\sum_{i=1}^{4}(X_i-\mu)^2,S_2^2=\sum_{j=5}^{10}(X_j-Y_2)^2.$$

则下列选项中不正确的是(　　).

(A) $Y_1-Y_2\sim N\left(0,\frac{5}{12}\right)$

(B) $P\left\{2\sqrt{3}\left(\frac{Y_1-Y_2}{S_2}\right)>0\right\}=\frac{1}{2}$

(C) $D(S_1^2+S_2^2)=20$

(D) 当 $\mu=0$ 时,令 $Q=\frac{5X_1^2}{S_2^2}$,若给定 $\alpha(0<\alpha<1)$ 满足 $P\{F>F_\alpha(5,1)\}=\alpha$,则 $P\{Q<F_{1-\alpha}(1,5)\}=\alpha$

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布于 $N(\mu,\sigma^2)$,令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,V_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n$,则 $Z_k=\frac{(k+1)V_k+V_{k+1}+\cdots+V_{n-1}}{\sigma\sqrt{k(k+1)}}(k=1,2,\cdots,n-1)$ 服从的分布为(　　).

(A) $t(n-1)$　　(B) $N(0,1)$　　(C) $\chi^2(1)$　　(D) $F(1,1)$

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 是取自总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本,令 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}X_k$,则 $D\left[\sum_{k=1}^{n}(X_{2k-1}+X_{2k}-2\overline{X})^2\right]=$ ______.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}(n\geqslant 2)$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,

$$\overline{X^*}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X^*})^2,$$

求统计量 $T=\frac{X_{n+1}-\overline{X^*}}{S^*}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ 的分布.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是来自总体 $X\sim N(0,2^2)$ 的简单随机样本,$\overline{X}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}X_i$.

(1) 令随机变量 $Y=\sum_{i=1}^{3}(X_i-\overline{X})^2+(X_4-X_5)^2$,求 EY 与 DY;

(2) 求随机变量 $Z=\frac{X_4-X_5}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(X_i-\overline{X})^2}}$ 的分布;

(3) 对于(2) 中的 Z,给定 $\alpha(0<\alpha<0.5)$,常数 c 满足 $P\{Z>c\}=\alpha$,随机变量 $U\sim F(2,1)$,求 $P\left\{U>\frac{1}{c^2}\right\}$.

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2),X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\geqslant 2)$ 是来自总体 X 的简单随机样本,且 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$,统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$.

(1) 求统计量 Y 的数学期望;

(2) 当 $\mu=0$ 时,求 $D(\overline{X}^2)$.

第 9 章　参数估计

A 组

1. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个简单随机样本，则参数 λ 的矩估计量为（　　）.

(A) $\dfrac{2}{\overline{X}}$　　(B) $\dfrac{1}{2\overline{X}}$　　(C) $\dfrac{\overline{X}}{2}$　　(D) $2\overline{X}$

2. 设总体 X 的分布律为 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.5 & p & 0.5-p\end{pmatrix}$，其中 $0<p<\dfrac{1}{2}$. 已知容量为 7 的一个样本值为 1,0,2,0,0,2,1，则参数 p 的最大似然估计值为________.

3. 设总体 X 的概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $(\theta>0$ 未知$)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，则 θ 的最大似然估计量为________.

4. 设总体 X 的概率分布为

X	0	1
P	$1-p$	p

，其中 $0<p<1$ 是未知参数，又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值.

(1) 求参数 p 的矩估计量和最大似然估计量；

(2) 求以上两个估计量的数学期望.

5. 设总体 X 的概率分布为 $\left(0<\theta<\dfrac{1}{2}\right)$

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

(1) 利用总体 X 的简单随机样本值 3,1,3,0,3,1,2,3，求 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}$；

(2) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X（其未知参数 θ 为(1)中确定的 $\hat{\theta}$）的简单随机样本，当 n 充分大时，取值为 2 的样本个数 N 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{N-a}{b}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$，求 a,b.（$\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数）

6. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}}, & 0<x\leqslant\beta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中参数 α,β 均大于零，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 当 $\beta=\mathrm{e}$ 时，求 α 的最大似然估计量；

(2) 当 α 已知时，求 β 的最大似然估计量.

7. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}3(x-\theta)^2, & \theta<x\leqslant\theta+1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求：

(1) θ 的矩估计量；

(2) θ 的最大似然估计量.

B 组

1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个简单随机样本，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则 $E(X^2)$ 的矩估计量是(　　).

(A) $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$　　(B) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

(C) $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\overline{X}^2$　　(D) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\overline{X}^2$

2. 设总体 X 在 $\{0,1,2,\cdots,k\}$ 上等可能取值，k 为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本值，则 k 的最大似然估计值为(　　).

(A) x_n　　(B) $\overline{x}$

(C) $\min\{x_1,\cdots,x_n\}$　　(D) $\max\{x_1,\cdots,x_n\}$

3. 设总体 X 服从区间 $[-\theta,\theta]$ 上的均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=$(　　).

(A) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$　　(B) $-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$

(C) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|X_i|\}$　　(D) $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|X_i|\}$

4. 设 $X\sim P(\lambda)$，其中 $\lambda>0$ 是未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是总体 X 的一组样本值，则 $P\{X=0\}$ 的最大似然估计值为(　　).

(A) $\mathrm{e}^{-\frac{1}{\overline{x}}}$　　(B) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$　　(C) $\dfrac{1}{\ln\overline{x}}$　　(D) $\mathrm{e}^{-\overline{x}}$

5. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\alpha, & -1<x<0,\\ \beta, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ 是未知参数，总体 X 的样本值为 $-0.5,0.3,-0.2,-0.6,-0.1,0.4,0.5,-0.8$，则 α 的最大似然估计值为________.

6. 设总体 X 服从均匀分布,其概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x\leqslant\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,则总体 X 的方差 DX 的最大似然估计量 $\widehat{DX}=$ ________.

7. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,$X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,$\mu,\sigma^2$ 为未知参数,Y 服从参数为 σ 的指数分布,并记 $\theta=P\{Y>1\}$,则 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=$ ________.

8. 设总体 X 的分布列为截尾几何分布

$$P\{X=k\}=\theta^{k-1}(1-\theta),k=1,2,\cdots,r,$$
$$P\{X=r+1\}=\theta^r,$$

从中抽得样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,其中有 m 个取值为 $r+1$,求 θ 的最大似然估计量.

9. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,当 $k<X\leqslant k+1$ 时,$Y=k(k=0,1,\cdots)$.

(1) 求 Y 的分布律;

(2) 设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为来自总体 Y 的一个简单随机样本,求参数 λ 的最大似然估计量.

10. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\lambda)=\dfrac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$,$-\infty<x<+\infty$,其中 $\lambda>0$ 未知. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本.

(1) 利用原点矩求 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1$ 与 $(\hat{\lambda}_1)^2$ 的数学期望;

(2) 求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_2$ 与 $\hat{\lambda}_2$ 的数学期望.

11. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本.

(1) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$,并求出 $E(\hat{\sigma}^2)$;

(2) 比较 $D(\hat{\sigma}^2)$ 与 $D(S^2)$ 的大小(S^2 为样本方差).

12. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 μ,σ 均为未知参数,且 $\sigma>0$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 μ 与 σ^2 的矩估计量和最大似然估计量;

(2) 求 μ 的最大似然估计量的数学期望.

13. 设总体 X 的概率密度 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x-\mu|}(-\infty<x<+\infty)$,其中 μ 为未知参数.

(1) 若总体 X 有样本值:1 000,1 100,1 200,求 μ 的矩估计值;

(2) 若总体 X 有样本值:1 000,1 100,1 200,求 μ 的最大似然估计值;

(3) 若总体 X 有样本值:1 000,1 100,问 μ 的最大似然估计值唯一吗?

C 组

1. 设某种电子器件的寿命(以小时计)T 服从参数为 λ 的指数分布,其中 $\lambda>0$ 未知. 从这批器件中任取 $n(n\geqslant 2)$ 只,并在时刻 $t=0$ 时投入独立寿命试验,试验进行到预定时间 T_0 结束,此时有 $k(0<k<n)$ 只器件失效,则 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$ 为(　　).

(A) $\frac{1}{T_0}e^{nT_0}$ (B) $\frac{1}{T_0}e^{-nT_0}$ (C) $\frac{1}{T_0}\ln\frac{n-k}{n}$ (D) $\frac{1}{T_0}\ln\frac{n}{n-k}$

2. 设总体 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\mu x, & 0\leqslant x<1,\\ \theta x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ μ,θ 为未知参数且 $\mu>0,\theta>0,Y=e^X$，X 的样本观测值为 0.1,0.9,1.2,1.2，则 $P\{Y<4\}$ 的最大似然估计值为________.

3. 已知总体 X 的分布律为 $P\{X=k\}=-\frac{1}{k}\cdot\frac{p^k}{\ln(1-p)}(0<p<1),k=1,2,\cdots$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ $(n\geqslant 2)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则 p 的矩估计量为________.

4. 罐中有 N 枚硬币，其中有 θ 枚是普通硬币(掷出正面与反面的概率均为 0.5)，其余 $N-\theta$ 枚硬币两面都是正面，从罐中有放回地随机取出一枚硬币，把它连掷两次，记下结果，但不去查看它属于哪种硬币，如此重复 n 次，若掷出 0 次、1 次、2 次正面的次数分别为 $n_0,n_1,n_2(n_0+n_1+n_2=n)$.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$，最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；

(2) 求 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 的数学期望；

(3) 当 $N=n=10$ 时，求 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 的方差.

张宇

博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《张宇考研数学基础30讲》《张宇考研数学题源探析经典1000题》《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》《张宇考研数学真题大全解》《考研数学命题人终极预测8套卷》《张宇考研数学最后4套卷》《张宇经济类综合能力数学通关优题库》作者，高等教育出版社原《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》及《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》编者之一，北京、上海、广州、西安等全国著名考研数学辅导班首席主讲。

张宇考研数学系列丛书

教材类

张宇考研数学基础30讲·高等数学分册 书课包

张宇考研数学基础30讲·线性代数分册 书课包

张宇考研数学基础30讲·概率论与数理统计分册 书课包

张宇高等数学18讲 书课包

张宇线性代数9讲 书课包

张宇概率论与数理统计9讲 书课包

题集类

张宇考研数学题源探析经典1000题（分数学一、数学二、数学三） 书课包

张宇考研数学真题大全解（分数学一、数学二、数学三） 书课包

考研数学命题人终极预测8套卷（分数学一、数学二、数学三） 书课包

张宇考研数学最后4套卷（分数学一、数学二、数学三） 书课包

北京理工大学出版社网址： http://www.bitpress.com.cn

宇哥考研
新浪微博二维码

张宇考研数学
微信公众号

启航教育
微信公众号

ISBN 978-7-5763-0815-0

01>

9 787576 308150

定价：169.90 元（共2册）