16. (数学一、数学三) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n (a > 0)$ 的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$，则 a 应满足________.

(数学二) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r^2 dr$ 在直角坐标系先 x 后 y 的积分次序为________.

三、解答题：17 ～ 22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

求 a, b 的值，使得 $f(x) = \ln(1 - ax) + \frac{x}{1 + bx}$ 在 $x \to 0$ 时是 x 的 3 阶无穷小.

18. (本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 可导，满足 $xf'(x) = f'(-x) + 1, f(0) = 0$.

(1) 求 $f'(x)$ 的表达式；

(2) 求 $f(x)$ 的极值.

8. 设函数 $f(\ \ ),g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0,g(0)<0$，且 $f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(\ \ )g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　).

(A) $f''(0)<0,g''(0)>0$　　(B) $f''(0)<0,g''(0)$ ……

(C) $f''(0)>0$ …… $g''(0)>0$　　(D) $f''(0)>0,g''(\ \ )<0$

9. 设 $D:x^2+y^2\leqslant$ …… $y,x\geqslant 0$，$f(x,y)$ 在 D 上连续，且

$$f(x,y)= \sqrt{1-x^2-y^2}- \ \cdots \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ (　　).

(A) $\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\right)$　　(B) …… $6\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$　　(C) $\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$　　(D) $\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$

10. 设 $y=x$ 和 $y=\mathrm{e}^{2x}$ 都是某 n 阶常系数齐次线性微分方程的解，则 n 最低是(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

二、填空题：11 ~ 16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 曲线 $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

12. (数学一) 函数 $z=\mathrm{e}^{3(x-1)+4y}\cos(xy)$ 在点 $(1,0)$ 处的最大变化率为________.

(数学二) 曲线 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t^2),\\ y=\arctan t\end{cases}$ 在 $t=2$ 处的曲率为________.

(数学三) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为________.

13. (数学一) 设抛物面壳 $\Sigma:z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的面密度为 z，则该抛物面壳的质量为________.

(数学二) 设不定积分 $\int\frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$ 的结果中不含反正切函数，则 $a=$ ________.

(数学三) 设 E 表示 $[0,4\pi]$ 这一闭区间，则定积分 $\int_E|\cos x|\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x=$ ________.

14. (数学一) 若常数 λ 可使向量 $2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 在右半平面 $x>0$ 上成为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，则 $\lambda=$ ________.

(数学二、数学三) 设 $f(x+y,x-y)=2(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2-y^2}$，则 $f'_x(x,y)-f'_y(x,y)=$ ________.

15. 设 $\begin{cases}y'-\left(2x-\frac{1}{x}\right)y=x^2,x\geqslant 1,\\ y(1)=y_1,\end{cases}$ 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}$ 存在，则 $y_1=$ ________.

张宇考研数学高等数学基础阶段模考试卷

一、选择题：1 ～ 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0, \\ x^2, & x>0, \end{cases}$ 则 $I=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{x(1-\cos x)}}=$ (　　).

(A) $e^{\frac{2}{3}}$　　(B) $e^{\frac{3}{2}}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{3}{2}$

2. 设 $g(x)=\begin{cases} 2-x, & x\leqslant 0, \\ 2+x, & x>0, \end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0, \\ -x-1, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $g[f(x)]$ 的(　　).

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点　　(C) 连续点　　(D) 第二类间断点

3. (数学一、数学三) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散，则(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 发散　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 发散

(数学二) 等边三角形当高为 8 时，其面积对高的变化率为(　　).

(A) $\frac{4}{\sqrt{3}}$　　(B) $\frac{8}{\sqrt{3}}$　　(C) $\frac{16}{\sqrt{3}}$　　(D) $\frac{32}{\sqrt{3}}$

4. 设 $f(x)=\ln(2+x)$，则 $f'''(0)=$ (　　).

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) 1

5. 曲线 $f(x)=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

6. 设 $y(x)$ 满足 $\Delta y=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y(0)=0$，则 $\int_0^2 y(x)\mathrm{d}x=$ (　　).

(A) π　　(B) $\frac{\pi}{2}$　　(C) $\frac{\pi}{3}$　　(D) $\frac{\pi}{4}$

7. 设 n 为正整数，S_n 是第一象限内曲线 $y=n\cos nx$ 与该曲线在点 $\left(\frac{\pi}{2n},0\right)$ 处的切线所围成的平面图形的面积，则(　　).

(A) S_n 与 n 有关　　(B) S_n 与 n 无关

(C) 无法判断 S_n 与 n 的关系　　(D) 以上都不正确

19.（本题满分 12 分）

求微分方程 $x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$ 的一个解 $y=y(x)$，使得由曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1$，$x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小.

20.（本题满分 12 分）

现有函数 $u(x,t)$，试利用变量代换 $\begin{cases}\xi=x-2t,\\ \eta=x+3t\end{cases}$ 将 u 关于变量 x,t 的方程 $6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ 化为 u 关于变量 ξ,η 的方程，其中 u 具有二阶连续偏导数.

21.（本题满分 12 分）

（数学一）计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 $\Sigma:(x-1)^2+y^2+z^2=a^2(a>0$ 且 $a\neq 1)$，取外侧.

（数学二、数学三）设 D 是由封闭曲线 $x^2+y^2=a(x+\sqrt{x^2+y^2})$ 所围成的有界闭区域，其中常数 $a>0$. 求二重积分 $I=\iint\limits_{D}[x^2\ln(y+\sqrt{1+y^2})+x\sqrt{x^2+y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

22.（本题满分 12 分）

（数学一、数学三）求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}x^n$ 的收敛域与和函数.

（数学二）设 $f(x)$ 在$[0,1]$上非负且连续.

(1) 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f(\xi)=\int_{\xi}^{1}f(t)\mathrm{d}t$；

(2) 又设 $f(x)$ 在$(0,1)$内可导，且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，证明(1)中的 ξ 是唯一的.

张宇考研数学高等数学
基础阶段模考参考答案及评分细则

一、选择题

1. **答** 应选(A).

解 当 $x>0$ 时，$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}t^{2}\mathrm{d}t=1+\frac{1}{3}x^{3}$，于是

$$I=\lim_{x\to0^{+}}\left(1+\frac{1}{3}x^{3}\right)^{\frac{1}{x(1-\cos x)}}\xlongequal{1^{\infty}}\mathrm{e}^{A},$$

其中 $$A=\lim_{x\to0^{+}}\frac{1}{x(1-\cos x)}\cdot\left(1+\frac{1}{3}x^{3}-1\right)=\lim_{x\to0^{+}}\frac{1}{\frac{1}{2}x^{3}}\cdot\frac{1}{3}x^{3}=\frac{2}{3},$$

故 $I=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$.

2. **答** 应选(B).

解 **方法一** 先求出 $g[f(x)]$.

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+f(x), & f(x)>0,\\ 2-f(x), & f(x)\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}2+x^{2}, & x<0,\\ 2-(-x-1), & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2+x^{2}, & x<0,\\ 3+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^{+}}g[f(x)]=\lim_{x\to0^{+}}(3+x)=3,\lim_{x\to0^{-}}g[f(x)]=\lim_{x\to0^{-}}(2+x^{2})=2.$$

因此，应选(B).

方法二 不必先求 $g[f(x)]$ 的表达式，直接计算 $\lim\limits_{x\to0^{+}}g[f(x)]$ 和 $\lim\limits_{x\to0^{-}}g[f(x)]$.

$$\lim_{x\to0^{+}}g[f(x)]=\lim_{x\to0^{+}}g(-x-1)=\lim_{x\to0^{+}}[2-(-x-1)]=3,$$

$$\lim_{x\to0^{-}}g[f(x)]=\lim_{x\to0^{-}}g(x^{2})=\lim_{x\to0^{-}}(2+x^{2})=2.$$

因此，应选(B).

3. **(数学一、数学三) 答** 应选(C).

解 用反证法证明(C)是正确的，假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛，由于 $0\leqslant|a_n|\leqslant|a_n|+|b_n|$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 必收敛，进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也就收敛了，这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散矛盾，于是假设不成立，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 发散. 另外，其余选项不正确，可自行举反例排除.

(数学二) 答 应选(C).

解 设 h 表示等边三角形的高，于是面积 $S=\frac{h^{2}}{\sqrt{3}}$，于是 $S'_h=\frac{2h}{\sqrt{3}}$，当 $h=8$ 时，$S'_h=\frac{16}{\sqrt{3}}$，选(C).

4. 答　应选(C).

解　$f(x)=\ln\left[2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3-\cdots$,由 $\frac{f'''(0)}{3!}=\frac{1}{24}$,得 $f'''(0)=\frac{1}{4}$.

5. 答　应选(C).

解　$f'(x)=2(x-1)(x-3)^2+2(x-1)^2(x-3)=2(x-1)(x-3)(2x-4)$,显然 $f'(1)=f'(2)=f'(3)=0$,于是必存在 $\xi_1\in(1,2)$,$\xi_2\in(2,3)$,分别使得 $f''(\xi_1)=0$ 和 $f''(\xi_2)=0$,而注意到 $f(x)$ 是四次多项式,于是 $f''(x)$ 就是二次多项式,综上 $f''(x)=0$ 只有上述两个根 ξ_1 和 ξ_2,可以设 $f''(x)=12(x-\xi_1)(x-\xi_2)$,其中 $\xi_1\in(1,2)$,$\xi_2\in(2,3)$,显然 $f''(x)$ 在 ξ_1 和 ξ_2 两侧都变号,于是 $f(x)$ 的拐点共有 2 个.

6. 答　应选(B).

解　由 $\Delta y=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$,知 $y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$,于是

$$y=\int\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}(2x-x^2)=\sqrt{2x-x^2}+C,$$

由 $y(0)=0$,知 $C=0$,所以 $y=\sqrt{2x-x^2}$,进而

$$\int_0^2 y(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi\times1^2=\frac{1}{2}\pi.$$

7. 答　应选(B).

解　$y=n\cos nx$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2n},0\right)$ 处的切线为 $y-0=y'\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)$,即 $y=-n^2x+\frac{\pi}{2}n$,注意到曲线 $y=n\cos nx$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2n}\right)$ 内是凸的,于是切线在曲线上方,从而所围图形面积 $S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\left[\left(-n^2x+\frac{\pi}{2}n\right)-n\cos nx\right]\mathrm{d}x=\left(-\frac{n^2x^2}{2}+\frac{\pi}{2}nx-\sin nx\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2n}}=\frac{\pi^2}{8}-1$,故 S_n 与 n 无关,选(B).

8. 答　应选(A).

解　由 $z=f(x)g(y)$,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y),\frac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)g(y),\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y),\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)g''(y),$$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}=f''(0)g(0),B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}=f'(0)g'(0)=0,$$

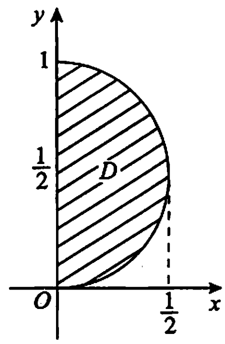
$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}=f(0)g''(0).$$

由于

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=f'(0)g(0)=0,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=f(0)g'(0)=0,f(0)>0,g(0)<0,$$

显然只有当 $f''(0)<0,g''(0)>0$ 时，$B^2-AC<0$，且 $A>0$，即此时 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值. 因此选项(A) 是正确的.

9. **答**　应选(B).



解　令 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$，则原等式成为 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A$，两端在 D 上同时作积分，得

$$\begin{aligned}A&=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D\frac{8}{\pi}A\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{8}{\pi}A\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

从而 $A=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-A$，所以

$$2A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right),$$

故 $A=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

10. **答**　应选(C).

分析　对 n 阶常系数齐次线性微分方程，其特征根与解的关系如下.

若 λ 是单根，必有解 $\mathrm{e}^{\lambda x}$；

若 λ 是二重根，必有解 $\mathrm{e}^{\lambda x},x\mathrm{e}^{\lambda x}$；

若 λ 是三重根，必有解 $\mathrm{e}^{\lambda x},x\mathrm{e}^{\lambda x},x^2\mathrm{e}^{\lambda x}$.

依次类推更高重实根即可.

若 $\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ 是一重虚根，必有解 $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$；

若 $\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ 是二重虚根，必有解 $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,x\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,x\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$.

依次类推更高重虚根即可.

解　$y=x=x\mathrm{e}^{0x}$ 是解 $\Rightarrow 0$ 至少是二重根，且 e^{0x}(也就是 1) 也是解，$y=\mathrm{e}^{2x}$ 是解 $\Rightarrow 2$ 至少是单根，综上 n 最低是 3，选(C).

二、填空题

11. **答**　应填 $y=x+\frac{3}{2}$.

解

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}-1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}=\frac{3}{2},$$

于是斜渐近线方程为 $y=x+\frac{3}{2}$.

12.(数学一)答　应填 5.

解　函数 $z=\mathrm{e}^{3(x-1)+4y}\cos(xy)$ 在点(1,0)处的梯度 $\mathbf{grad}\,z\big|_{(1,0)}=(z'_x,z'_y)\big|_{(1,0)}=(3,4)$，于是函数 $z=\mathrm{e}^{3(x-1)+4y}\cos(xy)$ 在点(1,0)处的最大变化率为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$.

(数学二)答　应填 $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

解　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1}{(t-1)^2}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{(t-1)^2}\right]\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{-2}{(t-1)^3}\cdot\frac{1}{x'_t}=-\frac{2(1+t^2)}{(t-1)^5}$，

$t=2$ 处的曲率为 $\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=2}=\frac{5}{\sqrt{2}}$.

(数学三)答　应填 $y=\frac{1}{2}x+1$.

解　方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 两端同时对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)\cdot(y+xy')=0,$$

将 $x=0,y=1$ 代入，得 $y'=-2$，于是点(0,1)处的法线方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-0)$，即 $y=\frac{1}{2}x+1$.

13.(数学一)答　应填 $\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1)$.

解　质量

$$m=\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant2}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant2}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}r^2\cdot\sqrt{1+r^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1).$$

(数学二)答　应填 -1.

解　$\frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx}{x^2+1}+\frac{C}{x^2+1}$，要使积分结果不含反正切函数，必有 $C=0$，此时 $\frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx}{x^2+1}$，通分，对比两端分子，有 x^2+

$ax+2=A(x^2+1)+Bx(x+1)=(A+B)x^2+Bx+A$,于是$\begin{cases}1=A+B,\\a=B,\\2=A,\end{cases}$ 故 $a=-1$.

(数学三) 答 应填$\frac{8}{3}$.

分析 这里的$\sqrt{\sin x}$是关键,$\sin x$只能在$[0,\pi]$及$[2\pi,3\pi]$取非负值而使得$\sqrt{\sin x}$有意义.

解 $I=\int_0^{\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x-\int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi}\cos x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8}{3}.$$

14. **(数学一) 答** 应填-1.

解 令$P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}$,$Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}$. 由题意知$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,则

$$4x(x^4+y^2)^{\lambda}(\lambda+1)=0.$$

于是,当且仅当$\lambda=-1$时,所给向量场在右半平面$x>0$上是梯度场.

【注】 如何进一步求解$u(x,y)$,解答如下:在$x>0$的半平面内,以任意一点,如$(1,0)$,作为积分路径的起点,则得

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}+C$$

$$=\int_1^x\frac{2x\cdot 0}{x^4+0^2}\mathrm{d}x-\int_0^y\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y+C$$

$$=-\arctan\frac{y}{x^2}+C,$$

式中,C为任意常数.

(数学二、数学三) 答 应填$(x-y)\mathrm{e}^{xy}(2-x^2-y^2)$.

解 由$\begin{cases}x+y=u,\\x-y=v\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{u+v}{2},\\y=\frac{u-v}{2},\end{cases}$于是$f(u,v)=(u^2+v^2)\mathrm{e}^{uv}$,即$f(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{xy}$,所以$f'_x(x,y)-f'_y(x,y)=(x-y)\mathrm{e}^{xy}(2-x^2-y^2)$.

15. **答** 应填-1.

解

$$y'-\left(2x-\frac{1}{x}\right)y=x^2,$$

$$y = e^{\int (2x-\frac{1}{x})dx}\left[\int x^2 e^{-\int (2x-\frac{1}{x})dx}dx + C\right] = \frac{e^{x^2}}{x}\left(\int x^3 e^{-x^2}dx + C\right)$$

$$= \frac{e^{x^2}}{x}\left(-\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + C\right) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + C\frac{e^{x^2}}{x}.$$

由 $y(1) = y_1$，得 $C = (y_1 + 1)e^{-1}$，得初值问题的解为

$$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + (y_1 + 1)e^{-1}\frac{e^{x^2}}{x}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} + (y_1 + 1)e^{-1}\frac{e^{x^2}}{x^2}\right].$$

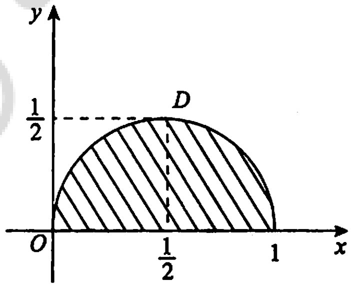
若 $y_1 + 1 \neq 0$，则上式最后一项趋于无穷，故应取 $y_1 = -1$.

当且仅当 $y_1 = -1$ 时上述极限存在，为 $-\frac{1}{2}$.

16.（数学一、数学三）答　应填 $0 < a < 1$.

解　要想使得收敛域为 $(-\infty, +\infty)$，只需 $\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}a^{2n+1} = 0(a > 0) \Rightarrow 0 < a < 1.$

（数学二）答　应填 $\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x,y)\sqrt{x^2+y^2}dx.$



解　$r = \cos\theta \Rightarrow r^2 = r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = x$（见图），配方得 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$，于是

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2},$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r^2dr = \int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x,y)\sqrt{x^2+y^2}dx.$$

注意，看清题目是 r^2dr 不是 rdr.

三、解答题

17. 解　$\ln(1 - ax) = -ax - \frac{1}{2}(-ax)^2 + \frac{1}{3}(-ax)^3 + o(x^3)$，　……3 分

$$x \cdot \frac{1}{1 + bx} = x \cdot [1 - bx + (-bx)^2 + o(x^2)] = x - bx^2 + b^2x^3 + o(x^3),$$

……6 分

$$f(x) = \ln(1 - ax) + \frac{x}{1 + bx} = (-a + 1)x - \left(\frac{1}{2}a^2 + b\right)x^2 + \left(-\frac{1}{3}a^3 + b^2\right)x^3 + o(x^3),$$

……8 分

若想使 $f(x)$ 在 $x \to 0$ 时是关于 x 的 3 阶无穷小，则 $-a + 1 = 0, -\left(\frac{1}{2}a^2 + b\right) = 0$，即 $a =$

$1, b=-\frac{1}{2}$，此时 $f(x)=-\frac{1}{12}x^3+\cdots$ 刚好是 x 的 3 阶无穷小. ……10 分

18. 解 (1) 将 $xf'(x)=f'(-x)+1$ 中的 x 置换为 $-x$，得 $-xf'(-x)=f'(x)+1$，

……3 分

结合两式，解得 $f'(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$. ……5 分

(2) 由 $f'(x)=\frac{x-1}{x^2+1}=0$，得唯一驻点 $x=1$. ……6 分

当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，于是 $f(1)$ 是 $f(x)$ 的唯一极小值.

……8 分

$$f(1)=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x+f(0)=\int_0^1\frac{x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x+0$$

$$=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}.$$ ……12 分

19. 解 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}y=-1,$$

这是一阶非齐次线性微分方程，故直接套用公式得

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(-\int\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x^2\left(\frac{1}{x}+C\right)=x+Cx^2.$$ ……4 分

由曲线 $y=x+Cx^2$，直线 $x=1, x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为

$$V(C)=\int_1^2\pi(x+Cx^2)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^3}{3}+\frac{C}{2}x^4+\frac{C^2}{5}x^5\right)\Big|_1^2=\pi\left(\frac{31}{5}C^2+\frac{15}{2}C+\frac{7}{3}\right),$$

……8 分

令 $V'(C)=0$，得

$$\pi\left(\frac{62}{5}C+\frac{15}{2}\right)=0,$$

解出 $C=-\frac{75}{124}$. ……10 分

又 $V''(C)=\frac{62}{5}\pi>0$，故 $C=-\frac{75}{124}$ 为唯一极小值点，也就是最小值点. 因此

$$y=x-\frac{75}{124}x^2$$

为所求解. ……12 分

20. 解 由于 $\xi=x-2t, \eta=x+3t$，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 1, \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot(-2)+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 3.$$ ……2 分

进一步，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 1=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$ ……4 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot 3\right]+3\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 3\right]$$

$$=4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-12\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$ ……6 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot 3+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 3$$

$$=-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$ ……8 分

此时，方程 $6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ 化为

$$6\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+\left(-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)-\left(4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-12\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=0,$$

……10 分

从而得 $25\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$，即 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$. ……12 分

21.（数学一）分析　若 a 比较小，当 $0<a<1$ 时，Σ 没有包含原点 $(0,0,0)$，此时可以直接使用高斯公式；若 a 比较大，当 $a>1$ 时，Σ 包含原点 $(0,0,0)$，则可在挖去原点 $(0,0,0)$ 后使用高斯公式.

解　容易验证 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,(x,y,z)\neq(0,0,0)$. ……2 分

若 $0<a<1$，则 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=0$； ……4 分

若 $a>1$，构造 $\Sigma_0: x^2+y^2+4z^2=\varepsilon^2$，取外侧，此时根据高斯公式，有

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0^-}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

故

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0^-}-\iint\limits_{\Sigma_0^-}=0-\iint\limits_{\Sigma_0^-}=\iint\limits_{\Sigma_0}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$$ ……6 分

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_0}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ ……8 分

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega: x^2+y^2+4z^2\leqslant\varepsilon^2}(1+1+1)\mathrm{d}v$$ ……10 分

$$=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}=2\pi.$$ ……12 分

（数学二、数学三）解　曲线 $x^2+y^2=a(x+\sqrt{x^2+y^2})$ 在极坐标系下是

$$r=a(1+\cos\theta),a>0,$$ ……4 分

这是心形线，如下图所示. 由于 $x^2\ln(y+\sqrt{1+y^2})$ 对 y 是奇函数，且积分区域 D 关于 x 轴对

称，则

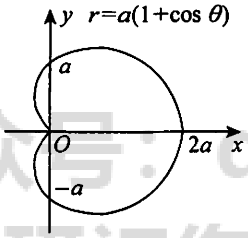
$$I = 0 + 2\iint_{D_上} x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \cdots\cdots 6 分$$

$$= 2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^3\cos\theta\,\mathrm{d}r \qquad \cdots\cdots 8 分$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+4\cos\theta+6\cos^2\theta+4\cos^3\theta+\cos^4\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad \cdots\cdots 10 分$$

$$= a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^2\theta+4\cos^4\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{7\pi a^4}{4}. \qquad \cdots\cdots 12 分$$



22.（数学一、数学三）解 （1）由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+1}{(n+1)^2-1}}{\dfrac{n}{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)^2-1}\cdot\frac{n^2-1}{n} = 1,$$

知收敛半径 $R=1$. ……2 分

收敛区间为 $(-1,1)$，对 $x=-1$，原级数成为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2-1}$，是交错级数，满足莱布尼茨定理，故收敛；

对 $x=1$，原级数成为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{n^2-1}$，是正项级数，与 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 同敛散，故发散.

综上，收敛域为 $[-1,1)$. ……4 分

（2）$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}x^n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n-1)(n+1)}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)x^n$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$$

$$= \frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1} + \frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}, -1<x<1, 且\ x\neq 0. \qquad \cdots\cdots 6 分$$

记 $S_1(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}x^{n-1}$，$S_1(0)=0$，则 $S_1'(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty}x^{n-2}$（等比级数）$=\dfrac{1}{1-x}$，于是

$$S_1(x) = \int_0^x S_1'(t)\,\mathrm{d}t + S_1(0) = \int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t + 0 = -\ln(1-x); \qquad \cdots\cdots 8 分$$

记 $S_2(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，$S_2(0)=0$，则 $S_2'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^n$（等比级数）$=\frac{x^2}{1-x}$，于是

$$S_2(x)=\int_0^x S_2'(t)\mathrm{d}t+S_2(0)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t}\mathrm{d}t+0=\int_0^x\frac{t^2-1+1}{1-t}\mathrm{d}t=-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x);$$

……10 分

所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}x^n=-\frac{x}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2x}\left[\frac{x^2}{2}+x+\ln(1-x)\right]$，$-1\leqslant x<1$，且 $x\neq0$；

而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}x^n\Big|_{x=0}=\left(\frac{2}{3}x^2+\cdots\right)\Big|_{x=0}=0.$

综上，

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}x^n=\begin{cases}-\frac{x}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2x}\left[\frac{x^2}{2}+x+\ln(1-x)\right], & -1\leqslant x<1,\text{且 } x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

……12 分

（数学二）证明 （1）令

$$F(x)=-x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t,$$ ……4 分

则 $$F(0)=0,F(1)=0.$$ ……5 分

由罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $-\int_\xi^1 f(t)\mathrm{d}t-\xi[-f(\xi)]=0$，亦即

$\xi f(\xi)=\int_\xi^1 f(t)\mathrm{d}t.$ ……6 分

（2）对于方程 $xf(x)=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$，在（1）中已证明了其在 $(0,1)$ 内至少有一个根 ξ，再考虑

$$\left[xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x)+xf'(x)+f(x)=2f(x)+xf'(x),$$ ……8 分

由于 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，$0<x<1$，于是

$$2f(x)+xf'(x)>0,0<x<1,$$

所以 $$\left[xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\right]'>0,$$ ……10 分

也就是说 $xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(0,1)$ 内单调，故上述 ξ 唯一. ……12 分