已存照片

满分: 100.0 考试时间: 2022-06-27 10:00 至 2022-06-27 12:00

一. 单选题（共8题，24.0分）

1. (单选题, 3.0分)

行列式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & 2 & 1 \\ 3x & -x & -6 & -3 \\ 0 & 5 & 2x & 1 \\ 1 & 3 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中常数项为________.

A 2

B -2

C -1

D 0

下一题

2. (单选题, 3.0分)

设 A 是 3 阶方阵，A_{ij} 是 A 的代数余子式，若已知 A 的每行元素和均为 2 且 A 的行列式等于 3，则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$________.

A $\frac{2}{3}$

B 2

C 3

D $\frac{3}{2}$

3. (单选题, 3.0分)

设 A,B 均为 4 阶方阵，det 表示行列式，则下列正确的是________.

A

$\det(AB)=\det(BA)$

B

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

C

$(AB)^2=A^2B^2$

D

$\det(A+B)=\det A+\det B$

设 A 是 3 阶方阵，P 是 3 阶可逆方阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

若 $P=(p_1,p_2,p_3)$，$Q=(p_1+p_2,p_2,p_3)$，则 $Q^{-1}AQ=$________.

A $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

5. (单选题, 3.0分)

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，下列不能保证 n 元非齐次线性方程组 $AX=b$ 有解的选项有______个.

选项：(1) $m>n$　(2) A 的秩等于 n　（3）A 的列向量组线性相关

(4) $m=n$　(5) A 的秩等于 m　(6）A 的行向量组线性无关

A 3

B 2

C 4

D 5

6. (单选题, 3.0分)

设三阶矩阵 A 的特征值为 1，-1，-2，则 $|4A^{-1}|=$________.

A 8

B 32

C 128

D 2

7. (单选题, 3.0分)

排列 531462 的逆序数为______.

A 5

B 8

C 6

D 7

8. (单选题, 3.0分)

齐次线性方程组 $AX=O$ 仅有零解的充分必要条件是________.

A A 的行向量组线性相关

B A 的行向量组线性无关

C A 的列向量组线性相关

D A 的列向量组线性无关

二. 判断题（共16题，32.0分）

1. (判断题, 2.0分)

设 A,B 均为 3 阶方阵, 且 $|A|=2,|B|=-2$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|-A^*B^{-1}|=-4$.

A 对

B 错

2. (判断题, 2.0分)

若 n 阶方阵 A 与 B 均为可逆矩阵， 则 $A+B$ 也是可逆矩阵.

A 对

B 错

3. (判断题, 2.0分)

可对角化的实方阵必能分解成两个对称矩阵的乘积.

A 对

B 错

4. (判断题, 2.0分)

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3-x_1)^2$ 的秩为 3.

A 对

B 错

5. (判断题, 2.0分)

设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 2b_1+c_1 \\ b_2 & a_2 & 2b_2+c_2 \\ b_3 & a_3 & 2b_3+c_3 \end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

已知关系 $A=BP_2P_1$, 则 $P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A 对

B 错

6. (判断题, 2.0分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & a\\ -1 & a & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}b & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 相似，则 $a=1, b=-1$.

A 对

B 错

7. (判断题, 2.0分)

秩相等的两个 n 阶方阵必等价.

A 对

B 错

8. (判断题, 2.0分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5 & 1 & 4\\ 2 & 3 & a & 5 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$ 的秩为 3，则 $a=3$.

A 对

B 错

9. (判断题, 2.0分)

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关.

A 对

B 错

10. (判断题, 2.0分)

若3阶方阵A能相似于对角矩阵，则A有3个不同的特征值.

A 对

B 错

11. (判断题, 2.0分)

若实对称矩阵A与B相似，则A与B必合同.

A 对

B 错

12. (判断题, 2.0分)

行列式为零的矩阵的行向量组必然线性相关.

A 对

B 错

13. (判断题, 2.0分)

已知 4 元非齐次线性方程组 $AX=b$ 有无穷多个解，若系数矩阵 A 的秩为 2，则 $AX=b$ 的解集合中至多有 3 个线性无关的解向量.

A 对

B 错

14. (判断题, 2.0分)

n 阶方阵的两个不同特征值的特征向量的和可以是某个特征值的特征向量.

A 对

B 错

15. (判断题, 2.0分)

若方阵 A 与 B 有相同的秩，则 A^2 与 B^2 也有相同的秩.

A 对

B 错

16. (判断题, 2.0分)

二次型的标准形中平方项的系数被二次型矩阵的特征值唯一确定.

A 对

B 错

1. (计算题, 10.0分)

已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = a \end{cases}$有解，

求参数a的值并求其通解（用导出组的基础解系表示）.

三. 计算题（共3题，34.0分）

2. (计算题, 14.0分)

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，若该二次型的矩阵的全部特征值之和为5，特征值之积为-12，

(1) 求a,b的值并求该二次型的矩阵A；

(2) 求正交矩阵Q，使变换$X=QY$把$f(X)$化成关于$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$的标准形.

三. 计算题（共3题，34.0分）

3. (计算题, 10.0分)

已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，若$A^2B+AX=B$，

试解矩阵方程求矩阵X

题型说明：证明题

1. (论述题, 10.0分)

已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\ge 2)$ 线性无关，

设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\cdots,\beta_m=\alpha_m+\alpha_1$，

试讨论向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的线性相关性并证明你的结论.

一、单项选择题(本题共7道小题,每题3分,把答案填在横线上)

1. 若 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{44}a_{5j}$ 是五阶行列式中带正号的一项，则 i,j 之值为______.

(A) $i=1,j=3$ (B) $i=2,j=3$ (C) $i=1,j=2$ (D) $i=2,j=1$

2. 设 A,B 是 n 阶方阵，则下列结论正确的是 ______.

(A) $AB\ne O\Leftrightarrow A\ne O$ 且 $B\ne O$ (B) $|AB|=O\Leftrightarrow |A|=O$ 或 $|B|=O$

(C) $|A|\ne O\Leftrightarrow A\ne O$ (D) $A=E\Leftrightarrow |A|=1$

3. 设 A 为3阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B，再交换 B 的第二行与第三行得单位矩阵. 若记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$ ______.

(A) P_1P_2 (B) $P_1^{-1}P_2$ (C) $P_2^{-1}P_1$ (D) $P_2P_1^{-1}$

4. 设向量 β,α_1,α_2 线性相关，而 β,α_2,α_3 线性无关，则______.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

(C) β 可以被 α_1,α_2 线性表示 (D) α_1 可以被 β,α_2,α_3 线性表示

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是4元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的三个解向量，且 $R(A)=3$，$\alpha_1=(0,1,2,3)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(2,4,2,6)^T$，$k$ 是任意常数，则 $AX=b$ 的通解是______.

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\3\\0\\3\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\3\\0\\3\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}2\\4\\2\\6\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$

6. 设 A 是 4×5 矩阵，且 A 的行向量组线性无关，则下列说法错误的是______.

(A) 对任意的 b，$A^TX=b$ 有唯一解 (B) $A^TX=0$ 只有零解

(C) 对任意的 b，$AX=b$ 有无穷多解 (D) $A^TAX=0$ 必有无穷多解

7. 若矩阵 A,B 相似，E 是单位矩阵，则 ______.

(A) $A-\lambda E=B-\lambda E$ (B) A,B 有相同的特征值和特征向量

(C) A,B 相似于同一个对角矩阵 (D) 对任意实数 k，A^2-kE 与 B^2-kE 相似

二. 填空题(本题共6道小题,每题3分,把答案填在横线上)

1. 已知4阶方阵 A 的第三列元素是 $1,3,-2,2$，其对应的余子式分别为 $3,-2,1,1$，则行列式 $|A|=$______.

2. 设列向量 $\alpha=(1,\ 2,\ -1)^T$，则 $\alpha\alpha^T=$______.

3. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若向量组 $\alpha_1+k\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性相关，则 $k=$______.

4. 若 n 阶方阵设 A 满足设 $A^2-2A-3E=0$，则 $A^{-1}=$______.

5. 设四阶方阵 A 的四个特征值为：$\lambda_1=3,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2,\lambda_4=2$，则下列矩阵多项式的行列式 $|A^2-3E|=$______.

6. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似，则 $a=$______，$b=$______

三. 计算题(本题 5 道小题，共 55 分)

1.（8 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

2.（8 分）设 $\alpha_1=(1,3,0,5)^T$，$\alpha_2=(1,1,2,4)^T$，$\alpha_3=(1,2,1,3)^T$，

$\alpha_4=(1,3,0,2)^T$，$\alpha_5=(1,6,-3,6)^T$.

（1）求向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$ 的秩和一个极大线性无关组；

（2）将其余向量用所求的极大线性无关组表示.

3.（9 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且矩阵 B 满足 $AB+A+2E=A^2+2B$，

(1)求矩阵 B，(2)用初等行变换求 B 的逆矩阵.

4.（15 分）已知二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$，

(1)写出此二次型对应的矩阵 A，并求出二次型的秩；

(2)对 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，求正交变换 $X=QY$ 把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成关于 $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 的标准型.

5.（15）已知方程组 $\begin{cases} (1+\lambda)x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda+1 \\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2+1 \end{cases}$，

讨论当 λ 取何值时，（1）方程组有唯一解；（2）方程组无解；
（3）方程组有无穷多解，求其通解（用导出组的基础解系表示）.

四，证明计算题 （6 分）

设 A 是 3 阶实方阵，已知 A 的两个特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，列向量 α_1,α_2 分别是属于 λ_1,λ_2 的特征向量，另有列向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$.

（1）证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.（4 分）

（提示：请合理利用性质属于不同特征值的特征向量线性无关.）

（2）令矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$ （2 分）