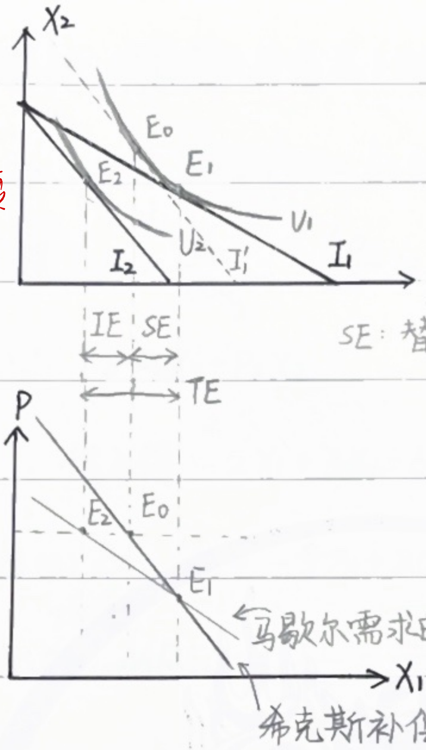
1. 解:



1、希克斯替代为效用不变假设，区分SE & IE

2、P_1变化导致Q_1变化，可以区分为SE/IE，并不是指点的平移

X_1价格上涨

图中$I_1' // I_2$ 且I_1'与U_1切于点E_0

SE：替代效应　IE：收入效应　TE：总效应

E_2与E_0处于同一价格

2. 解：构造拉格朗日函数 $L(x_1,x_2,\lambda)=\ln x_1+x_2-\lambda(I-P_1X_1-P_2X_2)$

其中 λ是拉格朗日乘子.

$\therefore$ 有 $\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1}=\dfrac{1}{x_1}-\lambda P_1=0 \\ \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2}=1-\lambda P_2=0 \\ I-P_1X_1-P_2X_2=0 \end{cases}$　解得 $\begin{cases} x_1^*=\dfrac{P_2}{P_1} \\ x_2^*=\dfrac{I-P_2}{P_2} \end{cases}$

$\therefore$ 如果消费者的收入I足够高，则收入的变化不会导致该消费者对商品1消费的变化．　证毕.

3. 解：(1) 由图知，消费者只买商品1时有30单位数量.

$\therefore$ 收入 $I=2\times30=60$ (元)

(2) 同理 $P_2=\frac{I}{Q_2}=\frac{60}{20}=3$ (元) 即商品2价格3元.

(3) $\because I=P_1X_1+P_2X_2$

$\therefore$ 代入得 $2X_1+3X_2=60$.

(4) 由(3)知 $X_2=-\frac{2}{3}X_1+20$ $\therefore$ 预算线斜率为 $k=-\frac{2}{3}$

(5) E点均衡，此时 $MRS_{12}=\frac{P_1}{P_2}=\frac{2}{3}$

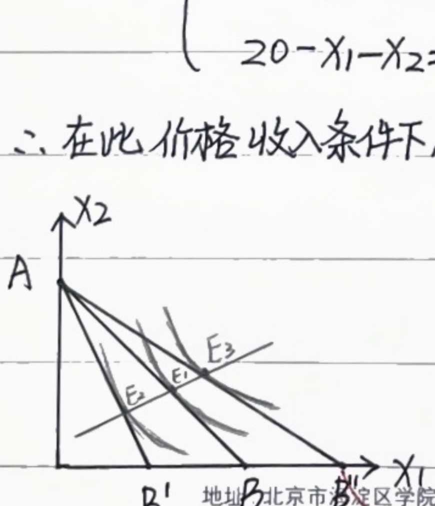
4. 解：(1) 由题意得，预算线为 $x_1+x_2=20$.

设拉格朗日函数 $L(x_1,x_2,\lambda)=x_1x_2+\lambda(20-x_1-x_2)$，其中 λ 为拉格朗日乘子.

则 $\begin{cases}\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1}=x_2-\lambda=0\\ \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2}=x_1-\lambda=0\\ 20-x_1-x_2=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1^*=10\\ x_2^*=10\end{cases}$

$\therefore$ 在此价格收入条件下，最优消费组合 (x_1^*, x_2^*) 为 $(10,10)$.

(2)



AB为初始预算线，X_1 价格上涨后变为AB'，

X_1 价格下降后变为AB''.

轨迹如图所示.

地址：北京市海淀区学院南路39号 邮编：100081
Add:39 South College Rd,Haidian District Beijing,China Post Code:100081

(3) 此时预算线方程为 $x_1+2x_2=20$.

构造拉格朗日函数 $L(x_1,x_2,\lambda)=x_1x_2+\lambda(20-x_1-2x_2)$，其中$\lambda$为拉格朗日乘子.

则 $\begin{cases}\dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1}=x_2-\lambda=0\\ \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2}=x_1-2\lambda=0\\ 20-x_1-2x_2=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1^*=10\\ x_2^*=5\end{cases}$

∴ 最优消费组合是 $(10,5)$，买10单位商品1，买5单位商品2.

(4) 效用函数 $U=(x_1,x_2)=500-x_1^2-x_2$

显然 $Q_1=Q_2=0$ 时效用最大

一个小坑，大家全部躺平进陷阱里.

5. 解：(1) 由题意得，预算线方程为 $4X+4Y=144$

构造拉格朗日函数 $L(X,Y,\lambda)=X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}+\lambda(144-4X-4Y)$，其中$\lambda$为拉格朗日乘子.

则 $\begin{cases}\dfrac{\partial L(X,Y,\lambda)}{\partial X}=\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}-4\lambda=0\\ \dfrac{\partial L(X,Y,\lambda)}{\partial Y}=\frac{1}{2}X^{\frac{1}{2}}Y^{-\frac{1}{2}}-4\lambda=0\\ 144-4X-4Y=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}X^*=18\\ Y^*=18\end{cases}$

∴ 为使效用最大化，X取18单位，Y取18单位.

地址：北京市海淀区学院南路39号 邮编：100081
Add:39 South College Rd.Haidian District Beijing,China Post Code:100081

(2) 由(1)知 $U=18^{\frac{1}{2}}\cdot 18^{\frac{1}{2}}=18$ 即消费者总效用为18

每单位货币的边际效用为 $\lambda=\frac{MU}{P}=\frac{1}{8}$

注意："单位货币"所对应的边际效用

(3) 此时预算线方程为 $9X+4Y=144$

构造拉格朗日函数 $L(X,Y,\lambda)=X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}+\lambda(144-9X-4Y)$

则 $\begin{cases}\dfrac{\partial L(X,Y,\lambda)}{\partial X}=\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}-9\lambda=0\\ \dfrac{\partial L(X,Y,\lambda)}{\partial Y}=\frac{1}{2}X^{\frac{1}{2}}Y^{-\frac{1}{2}}-4\lambda=0\\ 144-9X-4Y=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}X^*=8\\ Y^*=18\end{cases}$

此时总效用 $U=8^{\frac{1}{2}}\cdot 18^{\frac{1}{2}}=12$

(4) $\because \frac{MU_X}{P_X}=\frac{MU_Y}{P_Y}$ $\therefore \frac{\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}}{9}=\frac{\frac{1}{2}X^{\frac{1}{2}}Y^{-\frac{1}{2}}}{4}\Rightarrow 9X=4Y$

又$\because$维持原有效用水平 $\therefore X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}=18$

联立解得 $X=12,\ Y=27$

$\therefore$ 收入 $I=9\times12+4\times27=216$ (元)

? (5)

本题中 (1) $(P_X,P_Y)=(4,4)$，此时 $Q_X^1=18$，$Q_Y^1=18$，$U_1=18$

(3) $(P_X,P_Y)=(9,4)$，此时 $Q_X^2=8$，$Q_Y^2=18$，$U_2=12$

(4) $(P_X,P_Y)=(9,4)$，$U_3=18$时，$Q_X^3=12$，$Q_Y^3=27$

替代效用：P_X变化时，保持U不变，即 $(P_0,I_0)\to(P_0',I_0')$，(1)→(4) $12-18=-6$

收入效用：$(P_0',I_0')\to(P_0',I_0)$，(4)→(3) $8-12=-4$

注：题目中未明确指出希克斯/斯勒茨基替代，根据前几小问所述可直接求得希克斯替代（有同学算斯勒茨基替代，算对了的我也给分了）

6. 解：(1) 构造拉格朗日函数 $L(X_1,X_2,\lambda)=X_1^{\alpha}X_2^{\beta}+\lambda(M-P_1X_1-P_2X_2)$，

地址：北京市海淀区学院南路39号 邮编：100081
Add:39 South College Rd,Haidian District Beijing,China Post Code:100081

其中λ为拉格朗日乘子.

则 $\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} - \lambda P_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = x_1^{\alpha} \beta x_2^{\beta-1} - \lambda P_2 = 0 \\ m - P_1 x_1 - P_2 x_2 = 0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_1^* = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \dfrac{m}{P_1} \\ x_2^* = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \dfrac{m}{P_2} \end{cases}$

∴ 比例为 x_1: $\dfrac{x_1 P_1}{m} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

x_2: $\dfrac{x_2 P_2}{m} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$

注意题目要求所问为占收入的"比例"

∴ $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \dfrac{m}{P_1}$ ×

$\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\%$ ×

$\dfrac{100\beta}{\alpha+\beta}\%$

? (2) 由(1)知 x_1的需求函数为 $x_1 = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \dfrac{m}{P_1}$

x_2的需求函数为 $x_2 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \dfrac{m}{P_2}$.

(-1 不对)

(3) 消费者均衡时，商品x_1的需求价格弹性为 $e_1 = -\dfrac{P_1}{x_1} \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial P_1} = 1$

公式中带一个负号，计算结果+1。注意细节!

商品x_2的需求价格弹性为 $e_2 = -\dfrac{P_2}{x_2} \cdot \dfrac{\partial x_2}{\partial P_2} = 1$

$e_1 = -\dfrac{P_1}{x_1} \dfrac{\partial x_1}{\partial P_1} = -\dfrac{\alpha m}{\alpha+\beta} \left(-\dfrac{1}{P_1^2}\right) \times \dfrac{P_1}{x_1} = 1$

7. 解: (1) 此时若纳税人少申报没受罚，收入 $w - xt$，概率 $1-p$

少申报并受罚，收入 $w - wt - (w-x)\theta t$，概率p.

∴ 消费者决策 $\max\{p\ln(w - wt - (w-x)\theta t) + (1-p)\ln(w - \cancel{w}xt)\}$

求导，得 $\dfrac{p}{1-p} \cdot \dfrac{\theta t}{(1-t)w - \theta t(w-x)} = \dfrac{t}{w - tx}$

解得 $x^* = \dfrac{[p\theta - (1-p)(1-t) + \theta t(1-p)]w}{\theta t}$

∴ w越大，x^*越大.

(2) 由(1)知，当$\theta=0$时，$x^*=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{[p\theta-(1-p)(1-t)+\theta t(1-p)]W}{\theta t}$

$$=\frac{Wp+Wt(1-p)}{t}-\lim_{\theta\to0}\frac{(1-p)(1-t)}{\theta t}$$

$=0$　即最优申报收入为0

$\boxed{\text{经济学直觉}}$：因为隐瞒真实收入后并没有罚款，而且如果没有被审计发现就可以节省一笔钱提高自己的效用，所以纳税人会尽可能隐瞒自己的收入少交税.

没有解释只有式子的都扣分了

(3) ∵纳税人是风险中性

$$\therefore \max_{0\le x\le W} E(U)=p[(1-t)W-\theta t(W-x)]+(1-p)(W-tx)$$

解题关键：

一阶导为临界条件

求导得　$p\theta-(1-p)\ge0$时，x越大效用越大

$p\theta-(1-p)\le0$时，x越大效用越小 → 申报零收入.

∴不一定会选择申报零税收入，在$p\theta-(1-p)\le0$时会选择.