经济学中的最优化方法

第一讲　最优化问题概述

范翻

中国财政发展协同创新中心

2024/2/26

课程信息

成绩构成：

1. 考勤（15 分）
2. 期中考试（15 分）
3. 期末考试（70 分）

教材：

- 《经济理论中的最优化方法》迪克西特
- 《动态最优化基础》蒋中一

一般表述

一个典型的最优化问题可以表示为：

$$\max_x/\min \quad F(x) \qquad G(x) \le 0 \qquad H(x) = 0 \tag{P}$$

- 选择变量 $x \in X$，X 为选择变量 x 的取值空间（范围）；
- 目标函数 $F(x): X \to R$，R 为实数空间，代表效用，利润等；
- 约束条件：
  - 不等式约束 $G(x): X \to Y$，Y 是约束的值向量；
  - 等式约束 $H(x): X \to Z$
- X, Y, Z 可为多维（有限维）实数空间或无限维函数空间。

非线性规划问题 (nonlinear programming, NLP)

当变量空间 X 和约束条件中函数的取值空间 Y, Z 均为有限维实数空间时，上述最优化问题 (P) 被称为非线性规划问题:

$$\min_{x_1,\cdots,x_n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$s.t.\quad g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{bmatrix} g_1(x_1,x_2,\cdots,_n) \\ g_2(x_1,x_2,\cdots,_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1,x_2,\cdots,_n) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(NLP)}$$

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{bmatrix} h_1(x_1,x_2,\cdots,_n) \\ h_2(x_1,x_2,\cdots,_n) \\ \vdots \\ h_l(x_1,x_2,\cdots,_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

消费者选择问题 I

给定消费者的效用函数形式，在完全竞争市场下，消费者面对给定的市场价格，在给定收入约束下，如何选择不同消费品的最优组合以最大化效用？对于这个问题：

1. 消费者的选择变量是什么？
2. 目标函数是什么？
3. 约束条件是什么？

从另一个角度来看，如果消费者要达到一定的效用水平，如何最小化消费总支出？对应的选择变量、目标函数和约束条件是什么？如何用非线性规划的形式来表述上述问题？

消费者选择问题 II

效用最大化问题:

$$\max_{x_1,\cdots,x_n} U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$s.t. \quad p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots p_nx_n \leq y$$

支出最小化问题:

$$\min_{x_1,\cdots,x_n} p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots p_nx_n$$
$$s.t. \quad U(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq v$$

古典变分法问题 (calculus of variation)

当变量空间 X 为函数空间时，最优化问题 (P) 可称为函数空间的非线性规划问题。函数空间的最优化问题，包括**古典变分法问题**与在其基础上发展而来的**最优控制问题**。

一个最简变分法问题寻求符合端点条件的、使目标积分值最小的函数：

$$\min_{x(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt \qquad \text{(CVP)}$$

$$s.t. \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

其中，$\dot{x}(t) = dx(t)/dt$ 表示 $x(t)$ 的导函数。

最优控制问题 (optimal control problem, OCP)

20 世纪 50 年代，古典变分法进一步发展出最优控制理论 (optimal control theory)，一个基础的最优控制问题如下：

$$\min_{x(\cdot),u(\cdot)} \int_{t_0}^{t^1} f(t, x(t), u(t))\,dt \tag{a}$$

$$s.t. \quad \dot{x}(t) = \Phi(t, x(t), u(t)) \tag{b}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{c}$$

状态变量 $x(t)$ 的变化由微分方程 (b) 决定，且通过 (a) 直接影响目标函数 $f(t, x, u)$;

控制变量 $u(t)$ 会通过两种渠道影响最优值:

- 直接渠道是影响 (a) 中的目标函数;
- 间接渠道是影响 (b) 中控制变量 $u(t)$ 影响状态变量 $x(t)$，进而影响目标函数.

最优经济增长问题（连续型）I

假设经济体中存在无限期生存的消费者：

- 经济体的人均产出完全转化为消费者的收入，且取决于人均资本存量和技术水平，即 $f(k(t))$;
- 消费者在每一时点上选择当期的消费 $c(t)$ 和储蓄，且储蓄完全转化为下一期的投资，初始人均资本存量为 $k(0)$;
- 消费者的效用函数形式为 $U(c(t))$;
- θ 代表时间偏好率或主观贴现率，衡量了不同时点效用的替代程度。

在这个连续型最优经济增长问题中，消费者的状态变量、控制变量分别是什么？

最优经济增长问题（连续型）II

最优增长问题的核心是消费者在预期每期收入的情况下，选择最优的消费路径，并由此决定了相对应的资本路径，从而最大化其从现在到将来的效用贴现值总和。以最优控制问题的形式可以表述为：

$$
\begin{aligned}
\max_{c(\cdot),k(\cdot)} \quad & \int_{t=0}^{\infty} U(c(t))e^{-\theta t}dt && \text{(效用贴现值总和)} \\
s.t. \quad & \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) && \text{(资本变动路径)} \\
& k(0) = k_0 && \text{(初始资本存量状态)}
\end{aligned}
$$

在这个最优控制问题中，消费路径 $c(t)$ 控制变量，资本存量 $k(t)$ 是状态变量，该问题的最优解 $c(t), k(t)$ 即表示最优的消费和资本的增长路径。

动态规划 (dynamic programming)

当选择变量 X 是有限维向量时，要考虑的最优化问题也就是有限维空间的非线性规划问题 (NLP)。如果选择函数 X 是无限维的离散变量 $(x_1, x_2, \cdots)$ 时，通常采取动态规划方法 (dynamic programming, DP)：

$$
\begin{aligned}
\min_{x_t, u_t} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} f(t, x_t, u_t) \\
s.t. \quad & x_{t+1} - x_t = g(t, x_t, u_t) \\
& x_0 = \bar{x}_0 \\
& u_t \in U
\end{aligned}
\tag{DP}
$$

其中 t 代表离散的时间，$t = 0, 1, 2, \cdots$，约束条件的动态方程一般称为*差分方程*。

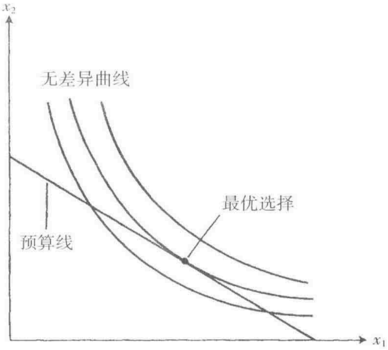
无限期离散型 Ramsey 最优经济增长问题

用离散型变量描述上述最优经济增长问题时，可以重新表述为：

$$\begin{aligned} \max_{c_t, k_t} s.t. \quad & k_{t+1} - k_t = f(k_t) - c_t, \quad t = 0, 1, \cdots \\ & k_0 = \bar{k}_0 \end{aligned}$$

离散形式的目标函数更直观地表述了每期消费效用贴现值的总和，差分方程也更直观地描述了前后期资本存量的变化。但不论是表述为连续形式还是离散形式，主要数学结论与经济学含义应该是一致的。

消费者的最优选择



考虑一个两商品的效用最大化问题，对于消费者而言：

- 选择变量是什么？
- 目标函数是什么？
- 约束条件是什么？

套利方法 I

在任意试验性的消费束下，考虑消费者选择的商品组合出现一个微小的变动：

- 如果这种微小变动带来效用的改进，那么后者将作为一个新的试验性消费束而被消费者采取；
- 一旦发现某个消费束已经无法用这种方式来改进，那么它就成为消费者的**最优配置**。

套利方法 II

当两种商品分别变动 dx_1, dx_2 时，消费者效用变化为：

$$MU_1 dx_1 + MU_2 dx_2$$

- dx_1, dx_2 代表对应商品的“一个微小（边际、无穷小量）变动”，意味着 $\Delta x \to 0$，但不能理解为等于 *0*;
- MU_1, MU_2 代表对应商品的边际效用，意味着每单位商品增加所能额外给消费者带来的效用;
- dx_1 和 dx_2 之间存在什么关系？

套利方法 III

由于预算约束 $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ 的存在，dx_1 和 dx_2 之间必然满足：

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = dI$$

假设消费者的收入没有发生变化 ($dI = 0$)，则商品 1 消费数量的微小增加 $dx_1 > 0$ 必然导致商品 2 消费数量的微小减少：

$$dx_2 = -\frac{p_1}{p_2} dx_1 < 0$$

此时，消费者效用的边际变化为：

$$MU_1 dx_1 + MU_2 dx_2 =$$
$$p_1 dx_1 \left[\frac{MU_1}{p_1} - \frac{MU_2}{p_2}\right]$$

套利方法 IV

如果在某个消费束 (x_1, x_2) 处，消费者达到效用最大化，意味着 x_1 任意方向的变化（增加或减少），都至少不会增加消费者效用：

$$p_1 dx_1 \left[\frac{MU_1}{p_1} - \frac{MU_2}{p_2}\right] \leq 0$$

具体而言

- 当 x_1 略微增加时，$dx_1 > 0$，必然有 $\frac{MU_1}{p_1} - \frac{MU_2}{p_2} \leq 0$;
- 当 x_1 略微减少时，$dx_1 < 0$，必然有 $\frac{MU_1}{p_1} - \frac{MU_2}{p_2} \geq 0$。

综合上述可得，最优配置下的消费束必然满足无套利条件：

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2} \qquad \text{(no-arbitrage)}$$

相切条件方法

从图形可以看出，最优化的消费束必然满足预算约束线和无差异曲线相切，即两者的斜率相等。将预算约束方程改写为：

$$x_2 = (I/p_2) - x_1(p_1/p_2)$$

可以看出预算约束线的斜率为 (p_1/p_2)。无差异曲线的斜率是消费者的边际替代率 *(MRS)*，它等于商品边际效用的比率 (MU_1/MU_2)。

在最优选择处，无差异曲线的斜率（边际替代率）等于预算约束线的斜率（价格比），因而

$$MU_1/MU_2 = p_1/p_2$$

角点解

套利方法相比相切条件方法的优势在哪儿？考虑其中一种商品存在不被购买可能的情况：

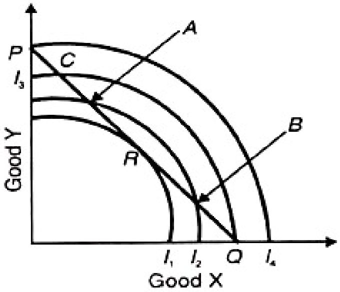


Fig. 19

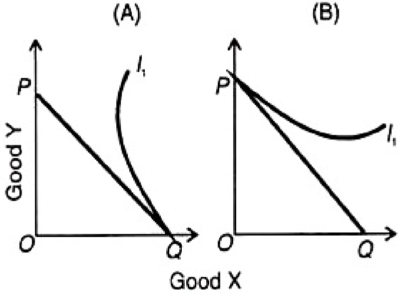


Fig. 20

收入的边际效用

假定消费者获得额外收入 dI 且全部用于消费，此时他可以

- 全部用于商品 1，即购买额外的 (dI/p_1) 单位的商品 1，并取得额外的 $(MU_1 dI/p_1)$ 单位的效用；
- 全部用于商品 2，即购买额外的 (dI/p_2) 单位的商品 2，并取得额外的 $(MU_2 dI/p_2)$ 单位的效用；

根据无套利条件 (no-arbitrage condition)，这两个效用的增量必须相等，才能达到新的最优值点。此时消费者获得的边际效用为

$$\lambda dIMU_1 dI/p_1 = MU_2 dI/p_2$$

λ 可以理解为收入的边际效用:

$$\lambda MU_1/p_1 = MU_2/p_2$$

多商品情形

假定有 n 种商品，价格和数量分别为 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 和 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，在最优消费束下：

- 对于所有购买了正数量的商品，必然存在一个相同的边际效用，而这个值可以被解释为收入的边际效用 λ；
- 对于没有被购买的商品而言，其边际效用对价格的比例必然小于或至多等于收入的边际效用 λ。

因此，对任意商品 i 而言：

$$MU_i/p_i \begin{cases} = \lambda, & \text{当}x_i > 0\text{时} \\ \leq \lambda, & \text{当}x_i = 0\text{时} \end{cases}$$

对于多个约束条件，我们可以对每个约束条件设置一个单独的 λ，它可以理解为放松该约束条件的边际效用。

非紧的约束条件

假设一个有钱的消费者已经满足到无法花光所有收入，那么预算约束应该是一个不等式 $p_1x_1+p_2x_2\leq I$。
通过定义一种新商品 x_3（“没有被花掉且不带来任何效用的收入”），其价格为 1，那么预算方程将变为：

$$p_1x_1+p_2x_2+x_3=I$$

假设消费者选择了一个正的 x_3：

- 那么对于 $i=3$ 而言，$\lambda=MU_3=0$，意味着如果消费者没有花完所有收入，那么收入增量所带来的边际效用应该为零；
- 对于 x_1,x_2 而言，由 $\lambda=0$ 可知，最优消费下 $MU_i=0$，意味着这些商品被消费到了一个产生零边际效用的水平。

不带约束的最优化问题

定义 (极大/极小值点)

考虑多变量函数 $f(\mathbf{x}): D \subset R^n \to R, \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$:

- 如果存在 $\delta > 0$，使得所有满足 $x \in D, |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| < \delta$ 的 x 都有 $f(\mathbf{x}) \geq (\leq) f(\mathbf{x}^*)$，则称 $\mathbf{x}^*$ 为局部极小 (极大) 值点；
- 如果对任意满足 $\mathbf{x} \in D, |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| < \delta, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ 的 $\mathbf{x}$ 都有 $f(\mathbf{x}) > (<) f(\mathbf{x}^*)$，则称 $\mathbf{x}^*$ 为局部严格极小 (极大) 值点；
- 若 $\forall \mathbf{x} \in D$ 都有 $f(\mathbf{x}) \geq (\leq) f(\mathbf{x}^*)$，则称 $\mathbf{x}^*$ 为全局极小 (极大) 值点。

梯度向量和海塞矩阵

对于多变量函数 $f(\mathbf{x}) : D \subset R^n \to R$，其梯度向量为：

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

记其二阶偏导数为 $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$，其海塞矩阵为：

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

必要条件

定理 (一阶)

设定义开集 D 上的函数 $f\colon DR^n \to R$ 在 D 上可微，若 $\boldsymbol{x}^*$ 是局部极小/极大值点，则有 $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$。

定理 (二阶)

设定义开集 D 上的函数 $f\colon DR^n \to R$ 在 D 上二阶可微，若 $\boldsymbol{x}^*$ 是局部极小/极大值点，则有：

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}, \quad d^T H(\boldsymbol{x}^*) d \geq 0, \quad \forall d \in R^n$$

二阶充分条件

设定义开集 D 上的函数 $f: DR^n \to R$ 在 D 上二阶可微，如果对于 $\mathbf{x}^*$ 有：

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad d^T H d > 0, \quad \forall d \in R^n, \quad d \neq 0.$$

则 $\mathbf{x}^*$ 是一个严格局部极小值点。

[证明] 考虑二阶泰勒展开：

$$f(\mathbf{x}^* + \epsilon d) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x})^T \epsilon d + \frac{1}{2}\epsilon^2 d^T H(\mathbf{x}^*) d$$

这里，$\forall d \in R^n, \theta \in [0,1], \epsilon \to 0$。

带等式约束的最优化问题 I

考虑以下含等式约束的最优化问题：

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & f(x_1, x_2) \\ s.t. \quad & g(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \tag{NLP-1}$$

假定 g 满足隐函数定理的相关条件，则等式约束隐含了 $x_2 = x_2(x_1)$，代入目标函数则有

$$f(x_1, x_2(x_2))\phi(x_1)$$

且 $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g_{x_1}}{g_{x_2}}$。其对 x_1 的一阶导数为

$$\frac{\phi}{dx_1} = f_{x_1} - f_{x_2}\frac{g_{x_1}}{g_{x_2}}$$

带等式约束的最优化问题 II

根据无约束条件下最优化问题的一阶条件，对于 $\phi(x_1)$ 有 $\frac{d\phi}{dx_1}(x_1^*) = 0$。此时，不妨设 $\lambda = \frac{f_{x_2}(x^*)}{g_{x_2}(x^*)}$，则有：

$$f_{x_1}(x^*) + \lambda g_{x_1}(x^*) = 0$$

类似地，等式约束隐含了 $x_1 = x_1(x_2)$，可以得出

$$f_{x_2}(x^*) + \lambda g_{x_2}(x^*) = 0$$

因此，带等式约束的最优化问题 (NLP-1) 在 x^* 处取得最优化的一阶必要条件等价于函数

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

在 x^* 处取得最优化的一阶必要条件。

拉格朗日函数

称 $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)$ 为拉格朗日 *(Lagrange)* 函数，则其在 $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ 处取得最大值/最小值的一阶条件为:

$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_{x_1}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ f_{x_2}(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_{x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ g(x_1^*, x_2^*) = 0 \end{cases}$$