拉格朗日方法及其拓展

范翻

中央财经大学 (CCFD)

1. 拉格朗日方法
2. 扩展与一般化

问题的陈述

假定选择变量为 x_1 和 x_2，其向量形式为：

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

目标函数为 $F(x)$，约束函数是一般的非线性函数 $G(x) = c$。

套利方法 I

假设从某个特定的点 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ 开始，考虑一个无穷小的变动：

$$dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$$

我们要求 $\bar{x} + dx$ 仍然满足约束条件，并看它是否能产生一个更高的目标函数值。

将目标函数 $F(x)$ 对于 x_1 和 x_2 的偏导数分别记作 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$。当我们在点 $\bar{x}$ 处计算这两个值时，它们的值分别写作 $F_1(\bar{x})$ 和 $F_2(\bar{x})$。

套利方法 II

从任意一点 x 到 $x+dx$ 的微小变动所引起的 $F(x)$ 的变动的一阶泰勒展开为：

$$\begin{aligned} dF(x) &= F(x+dx) - F(x) \\ &= F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 \end{aligned}$$

对 $G(x)$ 的变动也有一个类似的表达式：

$$dG(x) = G_1(x)dx_1 + G_2(x)dx_2$$

如果 $\bar{x}$ 和 $\bar{x}+dx$ 同时满足约束条件，那么必然有 $dG(\bar{x}) = 0$，即：

$$G_1(\bar{x})dx_1 = -G_2(\bar{x})dx_2 = dc$$

套利方法 III

首先假定 $G_1(\bar{x})$ 和 $G_2(\bar{x})$ 都是非零的，那么：

$$dx_1 = dc/G_1(\bar{x}), \quad dx_2 = -dc/G_2(\bar{x})$$

因此目标函数值的变动为：

$$dF(\bar{x}) = [F_1(\bar{x})/G_1(\bar{x}) - F_2(\bar{x})/G_2(\bar{x})]dc$$

当 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 都不碰到某个自然边界（如零）时，变动量 dc 就可以是任意符号的。如果 $\bar{x}$ 是最优的，那么对于任意变动 dc 而言，$F(\bar{x})$ 都不会增加，即：

$$F_1(\bar{x})/G_1(\bar{x}) - F_2(\bar{x})/G_2(\bar{x}) \Longrightarrow F_1(\bar{x})/G_1(\bar{x}) = F_2(\bar{x})/G_2(\bar{x})$$

套利方法 IV

当 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 位于某个自然边界时:

- 当 $x_1 \geq 0$ 且位于下界时，我们会得到什么条件?

套利方法 IV

当 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 位于某个自然边界时:

- 当 $x_1 \geq 0$ 且位于下界时，我们会得到什么条件?
- 当 $x_1 \leq 100$ 且位于上界时，我们会得到什么条件?

必要条件和充分条件

如果 $G(x) = c$ 的约束下在 $\bar{x}$ 点可以使得 $F(x)$ 取得最大值，那么必然有：

$$F_1(\bar{x})/G_1(\bar{x}) = F_2(\bar{x})/G_2(\bar{x})$$

换言之，上述条件是 $\bar{x}$ 为最优解的一阶必要条件。
一阶必要条件的价值在于，在寻找最优解时有助于缩小搜寻的范围：

- 如果仅有唯一的 $\bar{x}$ 同时满足约束条件和一阶必要条件，那么它一定是我们所要寻找的最优解

必要条件和充分条件

如果 $G(x)=c$ 的约束下在 $\bar{x}$ 点可以使得 $F(x)$ 取得最大值，那么必然有：

$$F_1(\bar{x})/G_1(\bar{x})=F_2(\bar{x})/G_2(\bar{x})$$

换言之，上述条件是 $\bar{x}$ 为最优解的一阶必要条件。
一阶必要条件的价值在于，在寻找最优解时有助于缩小搜寻的范围：

- 如果仅有唯一的 $\bar{x}$ 同时满足约束条件和一阶必要条件，那么它一定是我们所要寻找的最优解
- 如果存在多个满足一阶条件的解，那么还必须采用其他办法来进行判断

必要条件和充分条件

如果 $G(x)=c$ 的约束下在 $\bar{x}$ 点可以使得 $F(x)$ 取得最大值，那么必然有：

$$F_1(\bar{x})/G_1(\bar{x})=F_2(\bar{x})/G_2(\bar{x})$$

换言之，上述条件是 $\bar{x}$ 为最优解的一阶必要条件。
一阶必要条件的价值在于，在寻找最优解时有助于缩小搜寻的范围：

- 如果仅有唯一的 $\bar{x}$ 同时满足约束条件和一阶必要条件，那么它一定是我们所要寻找的最优解
- 如果存在多个满足一阶条件的解，那么还必须采用其他办法来进行判断
- 对于最大化问题和最小化问题而言，一阶必要条件是相同的！

拉格朗日方法 I

对于目标函数为 $F(x)$、约束条件为 $G(x)=c$ 的最优化问题，定义拉格朗日函数：

$$L(x,\lambda)=F(x)+\lambda[c-G(x)]$$

其中 λ 被称为待定的拉格朗日乘子。记 L 的偏导数分别为：

$$L_j=\partial L/\partial x_j;\quad L_\lambda=\partial L/\partial\lambda$$

拉格朗日方法 II

拉格朗日定理: 假定 x 为一个二维向量，c 为标量，函数 F 和 G 取标量值。定义拉格朗日函数 $L(x,\lambda)=F(x)+\lambda[c-G(x)]$。如果没有其他约束（如非负约束条件），$\bar{x}$ 使 $F(x)$ 取得最大值且满足 $G(x)=c$，并且如果对于至少一个 $j, G_j(\bar{x})\neq 0$ 成立，那么存在一个 λ 值，使得

$$L_j(\bar{x},\lambda)=0, \quad j=1,2; \quad L_\lambda(\bar{x},\lambda)=0$$

例子：隐含不变预算份额的偏好

考虑一个消费者在价格分别为 p, q 的两种商品 x, y 之间进行选择，其预算约束为 $px + qy = I$，效用函数为

$$U(x, y) = \alpha \ln(x) + \beta \ln(y)$$

求消费者在两种商品上的最优支出，及其在总收入中所占的份额。

例子：线性支出系统

假设消费者面对两种商品 x, y，每种商品分别存在一个维持生存的最低消费数量x_0, y_0。消费者的效用函数形式为：

$$
\begin{aligned}
U(x, y) &= \alpha \ln(x - x_0) + \beta \ln(y - y_0) \\
\alpha + \beta &= 1
\end{aligned}
$$

两种商品的价格分别为 p, q，消费者的总收入为 I，求消费者在两种商品上的最优支出。

例子：生产和成本最小化

考虑一个生产者，他以每年 r 的价格租赁机器 K，以每年 w 的工资雇佣劳动 L，以生产产出 Q，其中

$$Q = \sqrt{K} + \sqrt{L}$$

假定他想以最小的成本来生产固定数量的 Q。找出他的要素需求函数。证明拉格朗日乘子为下式：

$$\lambda = 2wrQ/(w + r)$$

并为 λ 给出一个经济学解释。

1 拉格朗日方法

2 扩展与一般化

多个变量和多个约束条件

假设有 n 个选择变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 m 个约束：

$$G^i(x) = c_i, \ i = 1, 2, \cdots, m, \quad m < n$$

对每个约束我们定义一个乘子 λ_i，并定义拉格朗日函数为：

$$L(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = F(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [c_i - G^i(x_1, \cdots, x_n)]$$

则在最优解 $\bar{x}$ 处满足的一阶必要条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \ j = 1, 2, \cdots, n$$

和

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, \ i = 1, 2, \cdots, m$$

矩阵形式 I

定义一个矩阵形式的最优化问题：

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} / \min \quad & F(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & G(\mathbf{x}) = c \end{aligned}$$

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 n 维向量

矩阵形式 I

定义一个矩阵形式的最优化问题：

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} / \min \quad & F(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & G(\mathbf{x}) = c \end{aligned}$$

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 n 维向量
- G 为由分量函数 G^i 组成的列向量函数

矩阵形式 I

定义一个矩阵形式的最优化问题:

$$\max_{\mathbf{x}} / \min \quad F(\mathbf{x})$$
$$\text{s.t.} \quad G(\mathbf{x}) = c$$

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 n 维向量
- G 为由分量函数 G^i 组成的列向量函数
- 每个 G^i 的偏导数组成行向量 $G^i_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$

矩阵形式 I

定义一个矩阵形式的最优化问题：

$$\max_{\mathbf{x}} / \min \quad F(\mathbf{x})$$
$$\text{s.t.} \quad G(\mathbf{x}) = c$$

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 n 维向量
- G 为由分量函数 G^i 组成的列向量函数
- 每个 G^i 的偏导数组成行向量 $G^i_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$
- 目标函数 $F(\mathbf{x})$ 的偏导数组成行向量 $F_x(\mathbf{x})$

矩阵形式 I

定义一个矩阵形式的最优化问题：

$$\max_{\mathbf{x}} / \min \quad F(\mathbf{x})$$
$$\text{s.t.} \quad G(\mathbf{x}) = c$$

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 n 维向量
- G 为由分量函数 G^i 组成的列向量函数
- 每个 G^i 的偏导数组成行向量 $G^i_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$
- 目标函数 $F(\mathbf{x})$ 的偏导数组成行向量 $F_x(\mathbf{x})$
- 拉格朗日乘子构成行向量 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$

矩阵形式 II

在矩阵形式下，拉格朗日函数可以写作：

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = F(\mathbf{x}) + \lambda[c - G(\mathbf{x})]$$

对应的一阶条件：

$$L_x(\bar{\mathbf{x}}, \lambda) = 0$$
$$L_\lambda(\bar{\mathbf{x}}, \lambda) = 0$$

拉格朗日定理：矩阵形式

拉格朗日定理：假定 $\mathbf{x}$ 是 n 维向量，c 是 m 维向量，F 为标量值函数，G 为 m 维向量值函数，且 $m < n$。定义

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = F(\mathbf{x}) + \lambda[c - G(\mathbf{x})]$$

若 $\bar{x}$ 在 $G(x) = c$ 约束下最大化 $F(x)$，且 $G_x(\bar{x})$ 的秩 $= m$，则存在 λ 满足：

$$L_x(\bar{\mathbf{x}}, \lambda) = 0$$
$$L_\lambda(\bar{\mathbf{x}}, \lambda) = 0$$

非负变量

经济学中常假定变量 x_j 非负：

$$L_j(\bar{\mathbf{x}}) = F_j(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_j^i(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0$$

需满足：

$$L_j(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0, \ \ \bar{\mathbf{x}} \geq 0$$

且至少有一个等式成立

互补松弛条件

条件：

$$\bar{\mathbf{x}} L_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

互补松弛条件

- 等式成立时为紧约束

互补松弛条件

条件：

$$\bar{\mathbf{x}} L_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

互补松弛条件

- 等式成立时为紧约束
- 不等式成立时为松约束

互补松弛条件

条件：

$$\bar{\mathbf{x}} L_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

互补松弛条件

- 等式成立时为紧约束
- 不等式成立时为松约束
- 子项说明：松约束允许调整空间

互补松弛条件

条件：

$$\bar{\mathbf{x}} L_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

互补松弛条件

- 等式成立时为紧约束
- 不等式成立时为松约束
- 子项说明：松约束允许调整空间
- 互补性：一个松弛必伴随另一个紧致

拉格朗日定理：非负变量

定理：定义

$$L(x,\lambda) = F(x) + \lambda[c - G(x)]$$

若 $\bar{x}$ 在 $G(x) = c$ 和 $x \geq 0$ 约束下最大化解，且 $G_x(\bar{x})$ 满秩，则存在 λ 满足：

$$\begin{cases} L_x(\bar{x},\lambda) \leq 0 \\ \bar{x} \geq 0 \\ \text{互补松弛条件} \end{cases}$$

和

$$L_\lambda(\bar{x},\lambda) = 0$$

不等式约束 I

考虑更一般的不等式约束，例如假定约束中的第一个分量只需要以不等式形式成立：

$$G^1(x) \leq c_1$$

此时我们可以定义一个新的变量 $x_{n+1} = c_1 - G^1(x)$，使得

- 不等式约束变成了一个等式约束

不等式约束 I

考虑更一般的不等式约束，例如假定约束中的第一个分量只需要以不等式形式成立：

$$G^1(x) \leq c_1$$

此时我们可以定义一个新的变量 $x_{n+1} = c_1 - G^1(x)$，使得

- 不等式约束变成了一个等式约束
- 新变量 x_{n+1} 面临非负约束

不等式约束 II

记新问题的拉格朗日函数为：

$$\begin{aligned}\hat{L}(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\lambda_1,\cdots,\lambda_m) &= F(x_1,\cdots,x_n)\\ &\quad+\lambda_1[c_1-G^1(x)-x_{n+1}]\\ &\quad+\sum_{i=2}^{m}\lambda_i[c_i-G^i(x)]\\ &= L(x,\lambda)-\lambda_1 x_{n+1} output\end{aligned}$$

一阶条件： - $\frac{\partial \hat{L}}{\partial x_{n+1}} = -\lambda_1 \leq 0$ - $x_{n+1} \geq 0$（互补松弛条件）

不等式约束 III

当 $x_{n+1} = c_1 - G^1(x) = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}$ 时，条件可写为：

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0$$

满足互补松弛条件：

拉格朗日定理：不等式约束

定理定义拉格朗日函数：

$$L(x,\lambda) = F(x) + \lambda[c - G(x)]$$

若 $\bar{x}$ 在 $G(x) \leq c$ 下最大化 F，且约束规范成立，则存在 λ 满足：

$$\begin{cases} L_x(\bar{x},\lambda) = 0 \\ L_\lambda(\bar{x},\lambda) \geq 0 \\ \lambda \geq 0 \quad (\text{互补松弛}) \end{cases}$$

库恩-塔克定理

定理考虑最一般情形：

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & F(x) \\ \text{约束} \quad & G(x) \leq c \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

拉格朗日函数：

$$L(x, \lambda) = F(x) + \lambda[c - G(x)]$$

最优解 $\bar{x}$ 满足：

$$\begin{cases} L_x(\bar{x}, \lambda) \leq 0, \bar{x} \geq 0 & (\text{互补松弛}) \\ L_\lambda(\bar{x}, \lambda) \geq 0, \lambda \geq 0 & (\text{互补松弛}) \end{cases}$$

例子：拟线性偏好

问题消费者效用函数：

$$U(x,y) = y + a\ln x \quad (a > 0)$$

求解预算约束下最大化效用：

$$\begin{aligned} \max \quad & y + a\ln x \\ \text{s.t.} \quad & px + qy \le I \\ & x > 0,\ y > 0 \end{aligned}$$

关键步骤：构造拉格朗日函数并求解一阶条件

例子: 技术性闲置

生产可行性约束:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 300 & (\text{劳动}) \\ x + 2y \leq 450 & (\text{土地}) \end{cases}$$

优化分析: 1. 绘制可行域 2. 识别极值点 3. 计算最优解
数学模型:

$$\begin{aligned} \max \quad & \pi = p_x x + p_y y \\ \text{s.t.} \quad & 2x + y \leq 300 \\ & x + 2y \leq 450 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{aligned}$$

求解策略: - 使用库恩-塔克条件 - 分析边角解可能性