经济学中的最优化方法

第九讲　时间最大值原理

范翻

中国财政发展协同创新中心

2024/5/13

基本概念 I

- 存量变量 -> 状态变量 -> y 如资本存量、财富
- 流量变量 -> 控制变量 -> z 如投资、消费
- 存量变动取决于上一期的存量和当期流量，即状态变量的变化可以用下式来刻画：

$$y_{t+1} - y_t = Q(y_t, z_t, t) \tag{10.1}$$

或者

$$y_t + Q(y_t, z_t, t) \geq y_{t+1}$$

同时可能存在任意时点上关于所有变量的约束：

$$G(y_t, z_t, t) \leq 0 \tag{10.2}$$

- 目标函数是**加性可分的**，即可以表达成一系列函数的和，且每个函数仅依赖于当期的状态变量和控制变量：

$$\sum_{t=0}^{T} F(y_t, z_t, t) \tag{10.3}$$

- 可能存在初值条件和终值条件：
    - 初值条件：$y_0 = \bar{y}_0$
    - 终值条件：$y_{T+1} = \bar{y}_{T+1}$
- **写出上述跨期最大化问题的标准形式**。

基本概念 III

一个包含时间维度的最大值问题可以表述为：

$$\begin{aligned}
\max_{y_t, z_t} \quad & \sum_{t=0}^{T} F(y_t, z_t, t) \\
s.t. \quad & y_{t+1} - y_t = Q(y_t, z_t, t) \\
& G(y_t, z_t, t) \le 0 \\
& y_0 = \bar{y}_0, \quad y_{T+1} = \bar{y}_{T+1}
\end{aligned}$$

典型例子：生命周期储蓄 I

考虑一个有已知寿命 T 的工人：

- 其每一期的效用函数为 $\ln c_t$，c_t 为第 t 期的消费，且效用折现率为 ρ；
- 他可以选择储蓄或借贷，存款利率和贷款利率均为 r；
- 在其生命周期内他将赚取 w 的收入，并用 k_t 表示其在第 t 期积累的资产存量（如果为负则代表债务）；
- 资产存量 k_t 会为其带来流量收入 $w+rk_t$，因此其资产积累由下式决定

$$k_{t+1} - k_t = w + rk_t - c_t$$

- **写出这个最优化问题的标准形式**，区分状态变量和控制变量。

时间最大值问题 I

对于时间最大值问题：

$$
\begin{aligned}
\max_{y_t, z_t} \quad & \sum_{t=0}^{T} F(y_t, z_t, t) \\
s.t. \quad & y_{t+1} - y_t = Q(y_t, z_t, t) \qquad (10.1) \\
& G(y_t, z_t, t) \leq 0 \qquad (10.2)
\end{aligned}
$$

构造拉格朗日函数，用 π_{t+1} 代表约束 (10.1) 的拉格朗日乘子，λ_t 代表约束 (10.2) 的拉格朗日乘子。

时间最大值问题 II

对于拉格朗日函数

$$\mathcal{L}(y_t, z_t, \pi_{t+1}, \lambda_t) = \sum_{t=0}^{T} \{F(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1}[y_t + Q(y_t, z_t, t) - y_{t+1}] - \lambda_t G(y_t, z_t, t)\}$$

- λ_t 的经济学含义是什么?
  - 关于 t 时刻约束的影子价格
- π_{t+1} 的经济学含义是什么?
  - 关于 $t+1$ 时刻存量的影子价格
- 关于 y_t 和 z_t 的一阶条件分别是什么?

一阶条件 I

关于 $z_t(t = 0, 1, \cdots, T)$ 的一阶条件：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_t} \equiv & F_z(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1} Q_z(y_t, z_t, t) - \\ & \lambda_t G_Z(y_t, z_t, t) = 0 \end{aligned} \tag{10.5}$$

关于 $y_t(t = 0, 1, \cdots, T)$ 的一阶条件，需要将 $\mathcal{L}$ 重新整理为包含所有 y_t 的形式：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \sum_{t=0}^{T} \{F(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1} Q(y_t, z_t, t) + y_t(\pi_{t+1} - \pi_t) - \\ & \lambda_t G(y_t, z_t, t)\} + F(y_0, z_0, 0) + \pi_1 Q(y_0, z_0, 0) + \\ & y_0 \pi_1 - y_{T+1} \pi_{T+1}\end{aligned}$$

因此，关于 $y_t (t = 0, 1, \cdots, T)$ 的一阶条件为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \equiv & F_y(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1} Q_y(y_t, z_t, t) + \\ & \pi_{t+1} - \pi_t - \lambda_t G_y(y_t, z_t, t) \\ = & 0\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}\pi_{t+1} - \pi_t = -[& F_y(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1} Q_y(y_t, z_t, t) - \\ & \lambda_t G_y(y_t, z_t, t)]\end{aligned} \tag{10.8}$$

定义一个新的函数 H，称为**汉密尔顿函数**：

$$H(y, z, \pi, t) = F(y, z, t) + \pi Q(y, z, t).$$

考虑一个目标函数是汉密尔顿函数，约束条件服从 (10.2) 式，选择变量为 z_t 的单期最优化问题：

$$\begin{aligned} max_{z_t} \quad & F(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1} Q(y_t, z_t, t) \\ s.t. \quad & G(y_t, z_t, t) \leq 0 \end{aligned}$$

写出上述单期最大化问题的拉格朗日函数。

哈密尔顿函数 II

拉格朗日函数为：

$$L = H(y_t, z_t, \pi_{t+1}, t) - \lambda_t G(y_t, z_t, t)$$

那么，该拉格朗日函数关于 z_t 的一阶条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial z_t} = F_z + \pi_{t+1} Q_z - \lambda_t G_z = 0$$

等价于跨期问题的一阶条件 (10.5)。当 z_t 达到最优时，上述问题的最大值记为 $H^*(y_t, \pi_{t+1}, t)$。

哈密尔顿函数 III

在这个框架下，(10.8) 可以简写作：

$$\pi_{t+1} - \pi_t = -L_y(y_t, z_t, \pi_{t+1}, t)$$

在静态最大化问题中，只有 z_t 是选择变量，y_t 和 π_{t+1} 都是参数。因此使用包络定理可得：

$$\pi_{t+1} - \pi_t = -H_y^*(y_t, z_t, t) \tag{10.11}$$

此外，由包络定理还有 $H_\pi^* = L_\pi = Q$，并在最优解处取值。因此 (10.1) 式可以写成与 (10.11) 式对称的形式：

$$y_{t+1} - y_t = H_\pi^*(y_t, \pi_{t+1}, t)$$

最大值原理在满足约束 (10.1) 式和 (10.2) 式下最大化 (10.3) 式的一阶必要条件是：

i 对每一期的 t 而言，z_t 在单期约束 $G(y_t, z_t, t) \le 0$ 下最大化汉密尔顿函数 $H(y_t, z_t, \pi_{t+1}, t)$；

ii **差分方程** (10.11) 式和 (10.12) 式共同决定了 y_t 和 π_{t+1} 在时间维度上的变动。

经济学解释 I

最大化条件 (i) 意味着 z_t 的选择会通过 (10.1) 式影响到 y_{t+1}，从而影响到 y_{t+1} 和 $t+1$ 时期目标函数中的各项。例如，今天大肆挥霍的消费虽然会增加今天的效用，但意味着未来只有较少的资本积累，从而降低了未来的消费和效用。如何刻画 z_t 变化对未来的影响？通过利用受影响的存量的影子价格：

- z_t 对 y_{t+1} 的影响等于其对 $Q(y_t.z_t, t)$ 的影响；
- 由此产生的目标函数值变动等于这一影响乘以 y_{t+1} 的影子价格 π_{t+1}；
- 汉密尔顿函数中加入 π_{t+1} 修正了目标函数 $F(y_t, z_t, t)$，使之考虑了在 t 时期控制变量 z_t 的选择对未来的影响。

经济学解释 II

$$\pi_{t+1} - \pi_t = -[F_y(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1} Q_y(y_t, z_t, t) - \lambda_t G_y(y_t, z_t, t)] \quad (10.8)$$

$$= -H_y^*(y_t, z_t, t) \quad (10.11)$$

(10.8) 式或等价的 (10.11) 式意味着：

- 单期约束的影子成本 π_{t+1} 意味着 y_t 的一单位边际变化在时期 t 中产生的边际回报为 $F_y(t) - \lambda_t G_y(t)$，并在下一期产生额外的 $G_y(t)$，即一期中使用 y_t 的利息或机会成本;
- 当 y_t 为最优解时，全部的边际回报应该为零，即

$$[F_y(t) - \lambda_t G_y(t)] + \pi_t Q_y(t) + [\pi_{t+1} - \pi_t] = 0$$

经济学解释 III

- 对于 y_{T+1} 的终值条件，由于这些存量对于目标函数没有任何贡献，最优策略应该是让 y_{T+1} 尽可能低；
- 但在某些情况下，也可以先积累一定存量以提供产出或效用，然后保证其在终值时刻恰好折旧完；
- 换言之，我们应该有

$$y_{T+1} \geq 0, \quad \pi_{T+1} \geq 0, \text{满足互补松弛条件}$$

最大化问题可以写作

$$\max_{c_t} \quad \sum_{t=0}^{T}(1+\rho)^{-t}ln(c_t)$$
$$s.t. \quad k_{t+1}-k_t = w + rk_t - c_t$$

定义汉密尔顿函数为

$$H(k_t, c_t, \pi_{t+1}, t) = (1+\rho)^{-t}ln(c_t) + \pi_{t+1}(w + rk_t - c_t)$$

典型例子：生命周期储蓄 III

使 H 取得最大值的关于 c_t 的条件为：

$$c_t^{-1}(1+\rho)^{-t} - \pi_{t+1} = 0$$

因此，汉密尔顿函数的最大值就是

$$H^* = -[ln(\pi_{t+1}) + \rho t](1+\rho)^{-t} + \pi_{t+1}(w + rk_t) - (1+\rho)^{-t}$$

关于 k_t 和 π_{t+1} 的差分方程为：

$$k_{t+1} - k_t = \partial H^*/\partial \pi_{t+1} = w + rk_t - \pi_{t+1}^{-1}(1+\rho)^{-t}$$

$$\pi_{t+1} - \pi_t = -\partial H^*/\partial k_t = -r\pi_{t+1}$$

由此可得 $\pi_t = \pi_0(1+r)^{-t}$，$c_t = \pi_0^{-1} \frac{1+r}{1+\rho}^t$，这意味着：

- 当 $r > \rho$ 时，该工人的最有消费水平会在其一生中不断增长
  - 在生命早期有 $c < w$，而在后面的年份中则有 $c > w$
- 如果 $r < \rho$ 情况则相反。

连续时间模型 I

把连续时间视作离散时间的长度 Δt 趋近于零，因此可以修改 (10.1)-(10.3) 式：

$$y(t+\Delta t) - y(t) = Q(y(t), z(t), t)\Delta t$$

$$G(y(t), z(t), t) \leq 0$$

$$\sum_{i=0}^{T/\Delta t} F(y(i\Delta t), z(i\Delta t), i\Delta t)\Delta t$$

状态变动方程 (10.1) 式可以写为连续形式：

$$\dot{y}(t) = Q(y(t), z(t), t)$$

目标函数 (10.3) 式可以写为连续形式：

$$\int_0^T F(y(t), z(t), t)dt$$

定义哈密尔顿函数

$$
\begin{aligned}
&H(y(t), z(t), \pi(t), t) = \\
&\qquad F(y(t), z(t), t) + \pi(t) Q(y(t), z(t), t)
\end{aligned}
$$

记 H^* 为最大值函数，那么 $y(t)$ 和 $\pi(t)$ 满足下面这对微分方程：

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= H^*_\pi(y(t), \pi(t), t) \\
\dot{\pi}(t) &= -H^*_y(y(t), \pi(t), t)
\end{aligned}
$$

定义整个连续时间下最优化问题的拉格朗日函数 $\mathcal{L}$：

$$\mathcal{L} = \int_0^T \{F(y(t), z(t), t) + \pi(t)[Q(y(t), z(t), t) - \dot{y}(t)]\} - \lambda G(y(t), z(t), t)dt$$

观察上式可以发现，如果我们想得到 $y(t)$ 的一阶条件，其中比较困难的部分是 $\int_0^T \pi(t)\dot{y}(t)dt$。而类似 (10.6) 的重新整理：

$$-\int_0^T \pi(t)\dot{y}(t)dt = \int_0^T y(t)\dot{\pi}(t)dt + y(0)\pi(0) - y(T)\pi(T)$$

拉格朗日函数 II

因此，可以重新整理拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = \int_0^T \{F(y(t), z(t), t) + \pi(t)Q(y(t), z(t), t) + y(t)\dot{(\pi)}(t) - \lambda(t)G(y(t), z(t), t)dt\} + \pi(0)y(0) - \pi(T)y(T)$$

可以分别得到关于 $z(t)$ 和 $y(t)$ 的一阶条件：

$$F_z + \pi(t)Q_z - \lambda(t)G_z = 0$$

$$F_y + \pi(t)Q_y + \dot{\pi}(t) - \lambda(t)G_y = 0$$

假设经济体中存在连续时间内生存的个体：

- 消费者决定每期消费 $c(t)$，效用函数为 $U(c)$，且效用折现率为 ρ。消费者最大化终生效用：

$$\int_0^T U(c)e^{-\rho t}dt$$

- 消费者收入取决于经济体的资本存量 $k(t)$，服从生产函数 $F(k)$，生产函数是递增的严格凹函数。
- 资本存量以 δ 比例折旧，消费者收入用于消费以外的部分用于储蓄，并完全转化为投资。因此资本积累方程为：

$$\dot{k} = F(k) - \delta k - c$$

定义汉密尔顿函数 $H = U(c)e^{-\rho t} + \pi[F(k) - \delta k - c]$。
c 使 H 取得最大值的一阶条件为 $U'(c)e^{-\rho t} = \pi$ 两边同时对 t 求导得到

$$\dot{\pi} = [U''(c)\dot{c} - \rho U'(c)]e^{-\rho t}$$

同时 π 满足的微分方程为

$$\dot{\pi} = \partial H/\partial k = -\pi[F'(k) - \delta]$$

最终我们得到

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{F'(k) - (\rho + \delta)}{-cU''(c)/U'(c)} \qquad \text{(欧拉方程)}$$

相图

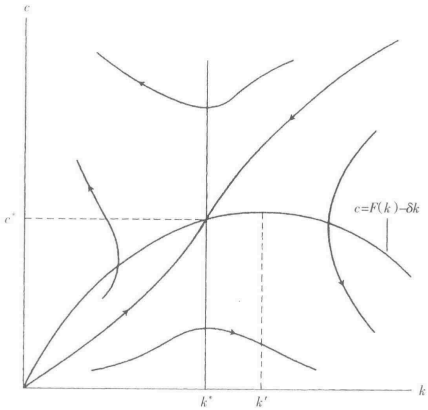

图 10. 1　最优增长的相位图