启航教育 云图 YUN TU 2024版

张宇考研数学系列丛书·一

书课包

张宇考研数学基础30讲

【概率论与数理统计分册】

主编 张宇

副主编 高昆轮

北京理工大学出版社

启航教育 云图 YUN TU

张宇考研数学系列丛书·一

张宇考研数学基础30讲

书课包

【概率论与数理统计分册】

○主编 张宇

○副主编 高昆轮

张宇考研数学系列丛书编委（按姓氏拼音排序）

蔡燧林 曹泽祺 陈静静 方春贤 高昆轮 胡金德 贾建厂 李家隆
刘硕 吕倩 马丁 秦艳鱼 沈利英 石臻东 史明洁 全雨晨 王国娟
王慧珍 王爽 王燕星 卫鹿琳 徐兵 严守权 杨若昕 亦一（笔名）
曾凡（笔名） 张翀 张乐 张雷 张青云 张勇利 张宇 郑利娜 朱杰

北京理工大学出版社

启航教育 云图 YUN TU

张宇考研数学系列丛书·一

张宇考研数学基础30讲

书课包

【概率论与数理统计分册】

主编 张宇

副主编 高昆轮

张宇考研数学系列丛书编委（按姓氏拼音排序）

蔡燧林 曹泽祺 陈静静 方春贤 高昆轮 胡金德 贾建厂 李家隆
刘硕 吕倩 马丁 秦艳鱼 沈利英 石臻东 史明洁 仝雨晨 王国娟
王慧珍 王爽 王燕星 卫鹿琳 徐兵 严守权 杨若昕 亦一（笔名）
曾凡（笔名） 张翀 张乐 张雷 张青云 张勇利 张宇 郑利娜 朱杰

北京理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学基础 30 讲. 概率论与数理统计分册 / 张宇主编. — 北京 ：北京理工大学出版社，2022.7

ISBN 978-7-5763-1430-4

Ⅰ.①张… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料②概率论-研究生-入学考试-自学参考资料③数理统计-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 110493 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68944723(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 7.5
字　　数 / 249 千字
版　　次 / 2022 年 7 月第 1 版　2022 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 / 69.90 元

责任编辑 / 多海鹏
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 李志强

前言

《张宇考研数学基础 30 讲》严格按照最新《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》编写，是真正意义上的考研数学基础阶段辅导用书，旨在帮助考生建立完整科学的考研数学基础知识结构体系，打下坚实的考研数学基础。

本书分成三个分册：高等数学分册、线性代数分册、概率论与数理统计分册。其中高等数学分册分为 18 讲、线性代数分册分为 6 讲、概率论与数理统计分册分为 6 讲，共 30 讲。每一讲由基础知识结构、基础内容精讲、基础例题精解、基础习题精练四大模块组成。此外，每个分册附赠对应的《张宇考研数学基础 30 讲——基础 300 题》（简称《基础 300 题》）分册和基础阶段测试卷，作为习题的一个补充，以及学完一学科后对自我水平的一个测评。

《张宇考研数学基础 30 讲》书课包是一套完整的考研数学基础阶段备考方案。为帮助考生更好地理解每一个知识点，我对本书做了系统讲解，同学们扫描书中二维码即可快速定位对应知识点的视频讲解。本书的内容是根据基础课程讲解整理出来的学习笔记，我几乎把要说的话一句一句写出来了，只需要集中精力认真听即可，帮助考生节省了做笔记的时间，真正做到了书和课的完美结合。值得指出的是，我和我的教学团队会不定期以直播的形式对《基础 300 题》和基础阶段测试卷进行讲评，更利于督促和检验考生的复习进度，查漏补缺，巩固所学，以便于切实解决考生在基础阶段遇到的问题和困惑。

我建议考生结合课程反复研读本书直至字字搞懂、句句通透并熟稔于心，达到基础阶段的知识、思路、题型和方法皆会以清晰的结构呈现眼前的效果。本书是我多年基础阶段教学经验的总结，愿助潜心研读者打好地基、夯实基础，勇攀考研数学高峰。

感谢命题专家们给予的支持、帮助与指导，感谢编辑老师们的辛勤工作和无私奉献，感谢学生们的努力和信任。

本书自出版以来，承蒙考生厚爱，在考研数学基础阶段起到了一定的积极作用。望各位不吝赐教，多提意见与建议，特此致谢！

张宇

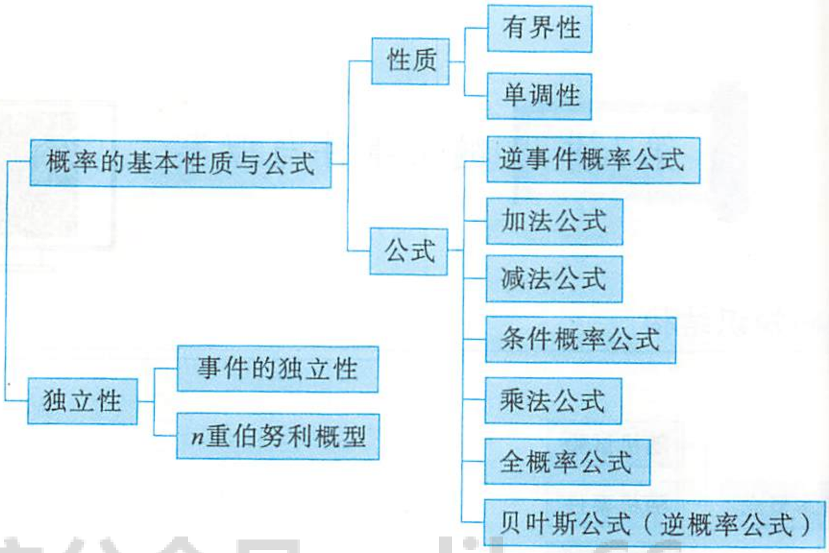
2022 年 6 月　于北京

目录

第1讲 随机事件与概率

基础知识结构

- 基本概念
  - 随机试验
  - 随机事件
  - 样本空间
- 事件的关系与运算
  - 关系
    - 包含
    - 相等
    - 相容
    - 对立
  - 运算
    - 和（并）
    - 差
    - 积（交）
    - 运算法则
      - 吸收律
      - 交换律
      - 结合律
      - 分配律
      - 对偶律（德・摩根律）
- 概率的定义
  - 描述性定义
  - 统计性定义
  - 公理化定义
- 古典概型和几何概型
  - 古典概型
    - 数数法
    - 随机分配
    - 简单随机抽样
  - 几何概型



基础内容精讲

一、基本概念

1. 随机试验

称一个试验为**随机试验**，如果它满足以下三个条件：

(1)试验可以在相同的条件下重复进行；

(2)试验所有可能结果是明确可知道的，并且不止一个；

(3)每一次试验会出现哪一个结果，事先并不能确定.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的，为方便起见，将随机试验简称为**试验**，并用字母 E 或 $E_1,E_2,\cdots$表示.

【注】 在不少情况下，不能确切知道某一随机试验的全部可能结果，但可以知道它不超出某个范围. 这时，也可以用这个范围来作为该试验的全部可能结果的集合. 例如，需要记录某个城市一天的交通事故数量，则试验结果将是非负整数 x. 无法确定 x 的可能取值的确切范围，但可以把这个范围取为$[0,+\infty)$，它总能包含一切可能的试验结果，尽管明知某些结果，如 $x>10\ 000$是不会出现的. 甚至把这个范围取为$(-\infty,+\infty)$也无妨. 这里体现了一定的数学抽象，它可以带来很大的方便.

2. 随机事件

在一次试验中可能出现，也可能不出现的结果称为**随机事件**，简称**事件**，并用大写字母 A,B,C 等表示. 因讨论需要，将每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**，记为 Ω. 每次试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**，记为$\varnothing$.

【注】 随机事件在一次试验中是否发生虽然不能事先确定，但是在大量重复试验的情况下，它的发生呈现出一定的规律性，这门课程正是要研究这种规律性，读者应在学习这门课程后，对此有较为深刻的认识.

3. 样本空间

随机试验的每一个可能结果称为**样本点**，记为 ω. 样本点的全体组成的集合称为**样本空间**(或**基本事件空间**)，记为 Ω，即 $\Omega=\{\omega\}$. 由一个样本点构成的事件称为**基本事件**. 随机事件 A 总是由若干个基本事件组成，即 A 是 Ω 的子集.

二、事件的关系与运算

1. 定义(关系：包含、相等、相容、互斥、对立；运算：和(并)、差、积(交))

(1)如果事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A(或 A 被 B 包含)，记为 $A\subset B$.

(2)如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A=B$. A 与 B 相等，事实上也就是说，A 与 B 由一些完全相同的试验结果构成，它不过是同一事件表面上看起来不同的两个说法而已.

(3)称"事件 A 与 B 同时发生"的事件为事件 A 与 B 的**积事件**(或**交事件**)，记为 $A\cap B$ 或 AB.

【注】 称"有限个(或可列个)事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$ 同时发生"的事件为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$ 的积事件(或交事件)，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$(或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$).

(4)若 $AB\neq\varnothing$，则称事件 A 和 B **相容**；若 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B **互不相容**，也叫**互斥**. 如果一些事件中任意两个事件都互斥，则称这些事件是**两两互斥**的，或简称**互斥**的.

(5)称"事件 A 与 B 至少有一个发生"的事件为事件 A 与 B 的**和事件**(或**并事件**)，记为 $A\cup B$.

【注】 称"有限个(或可列个)事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$ 至少有一个发生"的事件为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$ 的和事件(或并事件)，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$(或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$).

(6)称"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件为事件 A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$；称"事件 A 不发生"的事件为事件 A 的**逆事件**或**对立事件**，记为 $\overline{A}$.

由定义易知

$$A-B=A-AB=A\overline{B},$$

$$B=\overline{A}\Leftrightarrow AB=\varnothing \text{且} A\cup B=\Omega.$$

(7)称有限个(或可列个)事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$ 构成**一个完备事件组**，如果 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$(或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$) $=\Omega$，$A_iA_j=\varnothing$(对一切 $i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n(\cdots)$).

(8)事件的关系与运算可以用**文氏图**形象地表示出来(见图 1-1)，图中的矩形表示必然事件 Ω.

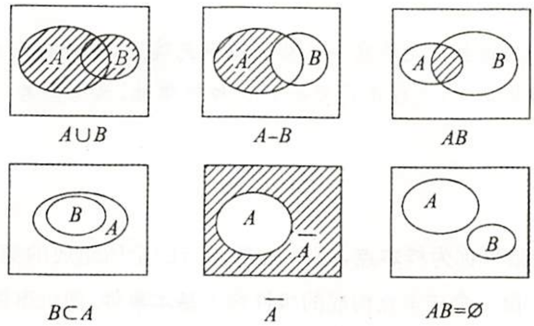


图 1-1

2. 运算法则

(1)吸收律　若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B,A\cap B=A$.

(2)交换律　$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$.

(3)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(4)分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$.

(5)对偶律(德·摩根律)　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

【注】(1)事件运算顺序约定为先进行逆运算,然后进行交运算,最后进行并或差运算.

(2)事件的关系、运算与集合的关系、运算相当,且具有相同的运算法则,所以我们可以对比着理解记忆,并要学会用集合关系去考虑事件关系.

三、概率的定义

1. 描述性定义

通常将随机事件 A 发生的可能性大小的度量(非负值)称为事件 A 发生的**概率**,记为 $P(A)$.

2. 统计性定义

在相同条件下做重复试验,事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 之比 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率**.当试验次数 n 充分大时,频率将“稳定”于某常数 p. n 越大,频率偏离这个常数 p 的可能性越小.这个常数 p 就称为事件 A 的**概率**.

【注】(1)概率的统计性定义实质上是说,用频率 $\frac{k}{n}$ 作为事件 A 的概率 $P(A)$ 的估计.其直观理解为某事件出现的可能性大小,可由其在多次重复试验中出现的频率去刻画.

(2)从上述(1)可以看出,频率只是概率的估计,而非概率本身.也就是说,概率的统计性定义是无法准确给出某事件的概率的,其重要性主要基于以下两点.

①它提供了估计概率的方法.比如在一批产品中抽取样品,来估计该批产品的合格率(合格率是客观的数据,抽取样品计算出来的合格率只是一种估计).

②它提供了一种检验某结论是否正确的准则.比如,你说某批产品的合格率是95%,我们做试验,抽取样品进行计算,得出的结果是合格率为20%,远远低于你所说的95%,于是毫不犹豫地拒绝你的结论.

3. 公理化定义

设随机试验的样本空间为 Ω，如果对每一个事件 A 都有一个确定的实数 $P(A)$，且事件函数 $P(\cdot)$ 满足：

(1)非负性：$P(A) \geqslant 0$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1$；

(3)可列可加性：对任意可列个两两互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$（即 $A_iA_j=\varnothing, i \neq j; i,j=1,2,\cdots$），有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(\cdot)$ 为**概率**，$P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

【注】 (1)数学上所说的"公理"，就是一些不加证明而承认的前提，上述公理化定义只是界定了概率这个概念所必须满足的一些一般性质，它不解决具体场合下的概率计算.

(2)概率 $P(\cdot)$ 是事件的函数.

(3)虽然它不解决具体场合下的概率计算，但是我们却常常用它来判断某事件函数 $P(\cdot)$ 是否是概率，这种题型在考研试题中也是经常遇到的.

四、古典概型和几何概型

下面研究两种非常重要的概率类型：古典概型和几何概型.

(1)称随机试验（随机现象）的概率模型为**古典概型**，如果其样本空间（基本事件空间）满足：

①只有有限个样本点（基本事件）；

②每个样本点（基本事件）发生的可能性都一样.

如果古典概型的基本事件总数为 n，事件 A 包含 k 个基本事件，也叫作有利于 A 的基本事件为 k 个，则 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含基本事件的个数}}{\text{基本事件总数}}.$$

由上式计算得出的概率称为 A 的**古典概率**.

(2)称随机试验（随机现象）的概率模型为**几何概型**，如果：

①样本空间（基本事件空间）Ω 是一个可度量的有界区域；

②每个样本点（基本事件）发生的可能性都一样，即样本点落入 Ω 的某一可度量的子区域 S 的可能性大小与 S 的几何度量成正比，而与 S 的位置及形状无关.

在几何概型随机试验中，如果 S_A 是样本空间 Ω 的一个可度量的子区域，则事件 $A=\{$样本点落入区域 $S_A\}$ 的概率为

$$P(A)=\frac{S_A \text{ 的几何度量}}{\Omega \text{ 的几何度量}}.$$

由上式计算得出的概率称为 A 的**几何概率**.

【注】 古典概型与几何概型的区别：基本事件有限、等可能发生的随机试验为**古典概型**；基本事件无限且具有几何度量、等可能发生的随机试验为**几何概型**.

五、概率的基本性质与公式

1. 性质

(1)有界性:对于任一事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$,且 $P(\varnothing)=0$,$P(\Omega)=1$.

【注】 $P(A)=0$,不能断言 $A=\varnothing$;$P(A)=1$,不能断言 $A=\Omega$,其中道理可见例 1.11.

(2)单调性:设 A,B 是两个事件,若 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\quad P(B)\geqslant P(A).$$

2. 公式

(1)逆事件概率公式:对于任一事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(2)加法公式:对于任意两个事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

【注】 (1)设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

(2)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

(3)减法公式:$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A\overline{B})$.

(4)条件概率公式:设 A,B 为任意两个事件,若 $P(A)>0$,我们称在已知事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率为**条件概率**,记为 $P(B|A)$,且

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

【注】 (1)条件概率 $P(\cdot|A)$ 是概率,概率的一切性质和重要结论对条件概率都适用.

例如:

$$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A),$$

$$P[(B-C)|A]=P(B|A)-P(BC|A),$$

等等.

(2)条件概率就是在一定的附加条件之下所计算的概率.当说到"条件概率"时,总是指另外附加的条件,其形式可归结为"已知某事件发生了".

(5)乘法公式:如果 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

一般地,对于 $n>2$,如果 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(6)全概率公式:如果 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega,A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,$P(A_i)>0$,则对任一事件 B,有

$$B=\bigcup_{i=1}^{n}A_iB,\quad P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

(7)贝叶斯公式(又称逆概率公式):如果 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega,A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n),P(A_i)>0$,则对任一事件 B,只要 $P(B)>0$,就有

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}(j=1,2,\cdots,n).$$

【注】 (1)要注意 $P(B)$ 与 $P(B|A)$ 的区别与联系，虽然二者都是计算事件 B 的概率，但前者 $P(B)$ 实际上是在样本空间 Ω 下计算的，后者 $P(B|A)$ 则是在事件 A 已经发生的条件下(即样本空间现在缩减至 A)计算的.

(2)全概率公式是用于计算某个"结果"B 发生的可能性大小. 如果一个"结果"B 的发生总是与某些前提条件(原因、因素或前一阶段结果)A_i 相联系，那么在计算 $P(B)$ 时，我们总是用 A_i 对 B 作分解：

$$B=\bigcup_{i=1}^{n}A_iB,$$

然后应用全概率公式计算 $P(B)$，我们常称这种方法为**全集分解法**. 如果在"结果"B 发生的条件下，探求导致这一"结果"的各种"原因"，即 A_i 发生的可能性大小 $P(A_i|B)$，则要应用贝叶斯公式.

六、事件的独立性和独立重复试验

1. 事件的独立性

(1)**描述性定义(直观性定义)**　设 A,B 为两个事件，如果其中任何一个事件发生的概率不受另外一个事件发生与否的影响，则称事件 A 与 B **相互独立**. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 个事件，如果其中任何一个或几个事件发生的概率都不受其余的某一个或几个事件发生与否的影响，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

(2)**数学定义**　设 A,B 为两个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B **相互独立**，简称 A 与 B **独立**.

【注】 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 个事件，如果对其中任意有限个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}(2\leqslant k\leqslant n)$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

考研中常考的是 $n=3$ 时的情形. 细致说来，设 A_1,A_2,A_3 为三个事件，若

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2), \tag{1-1}$$

$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3), \tag{1-2}$$

$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3), \tag{1-3}$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3), \tag{1-4}$$

则称事件 A_1,A_2,A_3 **相互独立**. 当去掉上述(1-4)式后，称只满足(1-1),(1-2),(1-3)式的事件 A_1,A_2,A_3 **两两独立**. 见例 1.20.

2. 试验的独立性

如果各个试验结果是相互独立的，则称这些试验是相互独立的. 例如，对试验 E_1 的任一结果 A_1，试验

E_2 的任一结果 A_2，若事件 A_1 与 A_2 相互独立，即 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$，则称随机试验 E_1 和 E_2 是相互独立的. 对试验 E_i 中的任一结果 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$，若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，即对其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件有 $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)=\prod\limits_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$，则称 n 个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是相互独立的.

3. 独立试验序列概型与 n 重伯努利概型

在同样条件下独立重复地进行一系列完全相同的试验，即每次试验的可能结果及其发生的概率都不变，每次试验是相互独立的，称这种重复试验序列的数学模型为**独立试验序列概型**. 如果每次试验只有两个结果 A 与 $\overline{A}$，且在每次试验中 A 发生的概率都相等(即 $P(A)=p$)，将这种试验独立重复 n 次，则称这种试验为**n 重伯努利概型**.

在第 2 讲中会看到，在 n 重伯努利概型中，事件 A 发生 k 次(只管次数，不论位置)的概率为 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,\cdots,n)$，且如果用 X 表示 n 重伯努利概型中事件 A 发生的次数，则 X 服从二项分布$B(n,p)$.

【注】 (1)事件相互独立是概率论中一个重要的概念，它是定义随机试验独立性、随机变量独立性的基础. 我们总是由试验的方式来判定事件的独立性，进而判定事件的相互独立性，再应用事件独立性定义中所揭示的概率关系计算与之有关的事件的概率.

(2)要善于判定独立试验序列概型，只要题目中出现“将……重复进行 n 次”“对……重复观察 n 次”等字样(注意要求每次试验只有两个结果 A 与 $\overline{A}$)，或可以转换为 n 次独立重复试验概型的问题，这些都是要考虑应用二项分布计算与之有关的事件的概率.

基础例题精解

一、事件的关系与运算

随机事件的描述和运算是概率计算的基础，也是考研数学中的一个考点.

(1)求解概率试题，通常要做的是首先**将实际问题符号化**，即用符号及其运算来描述事件，这种描述可以体现出考生求解问题的思路. 用简明的符号和运算准确反映题意、说明问题，是考生数学能力的一种体现.

(2)需要指出，在讨论和推断随机事件之间的关系时，**采用直观的文氏图**常常是一种有效的方法.

(3)此部分虽然比较基础，但很重要，将实际问题符号化的思想会伴随着概率论的整个课程.

例 1.1 以 A 表示事件“甲产品畅销，乙产品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 为(　　).

(A)“甲产品滞销，乙产品畅销”　　(B)“甲、乙产品均畅销”

(C)“甲产品滞销或乙产品畅销”　　(D)“甲产品滞销”

解 应选(C).

先将事件符号化，再利用事件运算解答，即以 A_1 表示事件“甲产品畅销”，A_2 表示事件“乙产品滞销”，则 $A=A_1A_2$，其对立事件为 $\overline{A}=\overline{A_1A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$，表示事件“甲产品滞销或乙产品畅销”，故选择(C).

例 1.2 设 A,B,C 是任意三个事件，则下列选项中正确的是(　　).

(A) 若 $A\cup C=B\cup C$，则 $A=B$

(B) 若 $A-C=B-C$，则 $A=B$

(C) 若 $AC=BC$，则 $A=B$

(D) 若 $AB=\varnothing$ 且 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$，则 $\overline{A}=B$

解 应选(D).

方法一(直接法) 由事件运算的对偶律，有 $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=A\cup B=\overline{\varnothing}=\Omega$. 而由 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，可见 A 和 B 互为对立事件，即 $\overline{A}=B$，因此(D)正确.

方法二(排除法) 前三个选项都不成立，只需分别举出反例. 例如，由于 A,B,C 是任意三个事件，若取 $A\neq B$，而 $C=\Omega$ 是必然事件，则 $A\cup C=B\cup C$ 且 $A-C=B-C$，但 $A\neq B$，从而(A)和(B)不成立.

取 $A\neq B$，$C=\varnothing$，则 $AC=BC$，但 $A\neq B$，因此(C)不成立. 从而选(D).

【注】 本题的结果反映了事件的运算与数的运算的不同之处.

例 1.3 判断下列命题是否成立，并说明理由.

(1) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$；

(2) 若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

(3) $(A\cup B)-B=A$；

(4) $(A-B)\cup B=A$.

解 (1)不成立. $A-(B-C)=A-B\overline{C}=A\overline{B\overline{C}}=A(\overline{B}\cup C)=A\overline{B}\cup AC=(A-B)\cup AC\neq(A-B)\cup C$；也可由图 1-2 快速判断.

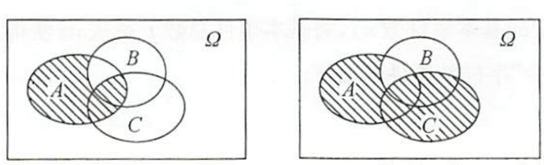


图 1-2

(2)成立. 因 $C\subset A$，有 $BC\subset AB=\varnothing$，故 $BC=\varnothing$.

(3)不成立. 因 $(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}=A-B\neq A$.

(4)不成立. 因 $(A-B)\cup B=A\overline{B}\cup B=(A\cup B)(\overline{B}\cup B)=A\cup B\neq A$.

【注】 读者可再做练习，证明下列事件的运算公式：

(1) $A=AB\cup A\overline{B}$；

(2) $A\cup B=A\cup\overline{A}B$.

证明 (1) $AB\cup A\overline{B}=A(B\cup\overline{B})=A\Omega=A$.

(2) $A\cup\overline{A}B=(A\cup\overline{A})(A\cup B)=\Omega(A\cup B)=A\cup B$.

二、古典概型和几何概型

1. 古典概型

计算的关键是基本事件、样本空间的选定以及基本事件数的计算.

计数方法常用的有三种.

(1)列举法(直接数数法):基本事件数不多时常用这种方法.

(2)集合对应法:①加法原理——完成一件事有 n 类办法,第一类办法中有 m_1 种方法,第二类办法中有 m_2 种方法,……,第 n 类办法中有 m_n 种方法,则完成此事共有 $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ 种方法.

②乘法原理——完成一件事有 n 个步骤.第一步有 m_1 种方法,第二步有 m_2 种方法,……,第 n 步有 m_n 种方法,则完成此事共有 $\prod\limits_{i=1}^{n} m_i$ 种方法.

③排列——从 n 个不同的元素中取出 $m(\leqslant n)$ 个元素,并按照一定顺序排成一列,叫作排列.所有排列的个数叫作排列数,记作

$$\mathrm{P}_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

当 $m=n$ 时,$\mathrm{P}_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$,叫作全排列.

④组合——从 n 个不同的元素中取出 $m(\leqslant n)$ 个元素,并成一组,叫作组合.所有组合的个数叫作组合数,记作

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^m}{m!}.$$

(3)逆数法:先求 $\overline{A}$ 中的基本事件数 $n_{\overline{A}}$,将基本事件总数 n 减去 $n_{\overline{A}}$ 便得 A 中的基本事件数,这种方法常用于计算含有"至少"字样的事件的概率.

古典概型的常见类型如下.

(1)直接用定义求概率.

古典概型的概率计算最基本的做法就是"数数",数出总样本数和事件所含样本点数,在以往考研试题中也出现过这种直接数数的题型.

例 1.4 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$,其中 B,C 分别是将一枚骰子接连抛两次先后出现的点数,则该方程有实根的概率为(　　).

(A) $\frac{19}{36}$　　(B) $\frac{17}{36}$　　(C) $\frac{15}{36}$　　(D) $\frac{13}{36}$

解 应选(A).

本题属于古典概型.由于很难套用现有概型模式或公式求解,一个最简单也是最直接的做法是数出总样本数和事件所含样本点数并计算比值,给出答案.事件所含样本点数可借助列表等手段列出各种可能的结果,然后数出事件所含样本点数.由于接连抛两次,每次都可能出现 6 个点数,因此其总样本数有 6^2 个.

方程有实根，即事件$\{B^2-4C\geqslant 0\}$，列表如下.

B \ B^2-4C \ C	1	2	3	4	5	6
1	−	−	−	−	−	−
2	0	−	−	−	−	−
3	+	+	−	−	−	−
4	+	+	+	0	−	−
5	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+	+

其中事件$\{B^2-4C\geqslant 0\}$所含样本点数为 19，则 $P=\dfrac{19}{36}$，故本题应选择(A).

(2)随机分配.

随机分配也叫随机占位，突出一个"放"字，即将 n 个可辨质点随机地分配到 N 个盒子中，区分每盒最多可以容纳一个和可以容纳任意多个质点，不同分法的总数列表如下.

	分配方式	不同分法的总数
将 n 个质点随机地分配到 N 个盒子中	每盒可容纳任意多个质点	N^n(见注 1)
	每盒可容纳至多一个质点	$\mathrm{P}_N^n=N(N-1)\cdot\cdots\cdot(N-n+1)$(见注 2)

【注 1】 每个质点均可放到 N 个盒子中的任何一个，即有 N 种放法，于是 n 个可辨质点放到 N 个盒子中共有 N^n 种不同放法.

【注 2】 质点可辨，且一个盒子容纳至多一个质点，故 n 个质点放到 $N(N\geqslant n)$个盒子中的所有不同放法即为从 N 个元素中选取 n 个元素的排列数 P_N^n.

例 1.5 5 人共钓到 3 条鱼，每条鱼被各人钓到的可能性相同，求：

(1)3 条鱼由不同的人钓到的概率；

(2)有 1 人钓到 2 条鱼的概率；

(3)3 条鱼由同一人钓到的概率.

分析 看作随机分配问题，即把鱼视作"质点(可辨)"，把人视作"盒子(可容纳任意多个质点)".

解 基本事件总数为 5^3.

(1)先从 5 个人中选 3 个人，共有 C_5^3 种选法，再将 3 条鱼给 3 个人，每人一条，共有 $3!$ 种方法，由乘法原理，基本事件数为 $\mathrm{C}_5^3 3!$，于是

$$P\{3\text{ 条鱼由不同的人钓到}\}=\frac{\mathrm{C}_5^3 3!}{5^3}=\frac{12}{25}=0.48.$$

(2)先在 5 个人中任选 1 人，有 C_5^1 种选法，再从 3 条鱼中任取 2 条，有 C_3^2 种选法，分给这个人，剩下 1 条鱼随机给剩下的 4 个人中的一人，有$(5-1)^{3-2}=4^1=4$(种)选法，基本事件数为 $\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_3^2(5-1)^{3-2}$，于是

$$P\{\text{有 1 人钓到 2 条鱼}\}=\frac{C_5^1C_3^2(5-1)^{3-2}}{5^3}=\frac{12}{25}=0.48.$$

(3)5 个人中任选 1 人，有 C_5^1 种选法，3 条鱼全给一个人，有 C_3^3 种选法，基本事件数为 $C_5^1C_3^3$，于是

$$P\{\text{3 条鱼由同一人钓到}\}=\frac{C_5^1C_3^3}{5^3}=\frac{1}{25}=0.04.$$

(3)简单随机抽样.

设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\}$ 含 N 个元素，称 Ω 为总体. 如果各元素被抽到的可能性相同，自总体 Ω 的抽样称作简单随机抽样，突出一个"取"字.

简单随机抽样分为先后有放回、先后无放回及任取这三种不同的方式. 在每种抽样方式下各种不同抽法(基本事件)的总数列表如下.

	抽样方式	抽法总数
自含 N 个元素的总体 Ω 中 n 次简单随机抽样	先后有放回取 n 次	N^n(见注 1)
	先后无放回取 n 次	$P_N^n=N(N-1)\cdot\cdots\cdot(N-n+1)$(见注 2)
	任取 n 个	C_N^n(见注 3)

【注 1】 既考虑抽到何元素，又考虑各元素出现的顺序，每次从 Ω 中随意抽取一个元素，并在抽取下一元素前将其放回 Ω. 于是每次都有 N 个元素可被抽取，即有 N 种抽法，抽 n 次，即 N^n.

【注 2】 既考虑抽到何元素，又考虑各元素出现的顺序，凡是抽出的元素均不再放回 Ω，于是每次抽取时都比上一次少了一个元素，抽 $n(n\leqslant N)$ 次，即

$$P_N^n=N(N-1)\cdot\cdots\cdot(N-n+1).$$

【注 3】 任取 $n(n\leqslant N)$ 个是指一次性取 n 个元素，相当于将 n 个元素无序且无放回取走，其抽法总数为 $C_N^n=\frac{P_N^n}{n!}$.

例 1.6 从 1,2,…,15 这 15 个数中随机取出 3 个，求下列事件的概率：$A_1=\{$3 个数中最大的是 10$\}$；$A_2=\{$3 个数中大于、等于和小于 7 的各 1 个$\}$；$A_3=\{$3 个数中 2 个大于 7,1 个小于 7$\}$.

解 这是"无放回且无序"的问题. 从 15 个数中随机取出 3 个，总共有 $C_{15}^3=455$(种)不同取法，即总共有 C_{15}^3 个基本事件，其中满足事件 A_1 的取法有 $C_9^2=36$(种)(3 个数中最大的是 10，在小于 10 的 9 个数中随意取 2 个，有 C_9^2 种不同取法)；满足事件 A_2 的取法有 $6\times8=48$(种)(在小于 7 的 6 个数中随意取 1 个，在大于 7 的 8 个数中随意取 1 个，有 6×8 种不同取法)；满足事件 A_3 的取法有 $6\times C_8^2=168$(种)(在小于 7 的 6 个数中随意取 1 个，在大于 7 的 8 个数中随意取 2 个). 于是

$$P(A_1)=\frac{36}{455},\quad P(A_2)=\frac{48}{455},\quad P(A_3)=\frac{168}{455}.$$

2. 几何概型

几何概型的特点是总样本数和事件所含样本点数不能如古典概型那样可以数数，但具有几何特性，如长度、面积或体积等. 解题时应将数量关系用几何图形直观表现出来，其概率通常是事件所含样本点数和总样本数对应区域大小之比.

例 1.7　在区间$(0,1)$中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 0.5 的概率为________.

解　应填 0.75.

设两个数分别为x,y，则依题意(x,y)的取值范围为正方形区域$D=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$. 又$|x-y|<0.5$，则所在区域如图 1-3 中阴影部分所示，于是所求概率为

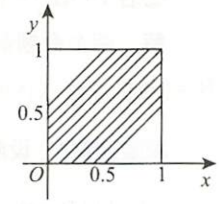


图 1-3

$$p=\frac{1^2-0.5^2}{1^2}=0.75.$$

例 1.8　随机地向半圆$0<y<\sqrt{2ax-x^2}\ (a>0)$内投掷一点，点均匀落在半圆内任何一个区域，求该点和原点连线同x轴的夹角$\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$的概率.

解　由题设，半圆与直线$y=x$的交点坐标为(a,a)，如图 1-4 所示，阴影区域D内任意点与原点连线同x轴的夹角$\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，因此所求概率为

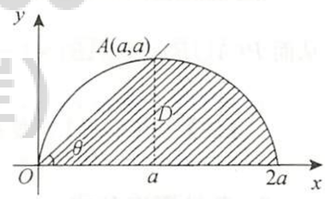


图 1-4

$$P\{(x,y)\in D\}=\left(\frac{\pi a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\right)\Big/\frac{\pi a^2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

三、概率的基本性质与公式

1. 加法公式、减法公式、逆事件概率公式

首先，要记住概率性质和公式（等量关系：加法公式，减法公式与逆事件概率公式. 不等式关系：有界性，单调性，$\sqrt{P(A)P(B)}\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\geqslant P(AB)\ (P(A)>0)$，等等）.

其次，要将题目中的已知条件，即所求事件的概率及其数量关系用数学符号明确表示出来.

最后，通过解方程或等量代换即可求得所要结果.

例 1.9　设A,B为两个随机事件，则(　　).

(A)$P(AB)+P(\overline{A}\,\overline{B})\leqslant1$　　(B)$P(AB)+P(\overline{A}\,\overline{B})\geqslant1$

(C)$P(A-B)\leqslant P(A)-P(B)$　　(D)$P(A\cup B)+P(\overline{A}\cup\overline{B})\leqslant1$

解　应选(A).

本题涉及事件之间的关系，由于$AB\subset A\cup B$，即有$P(AB)\leqslant P(A\cup B)$，从而有

$$P(AB)\leqslant P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B}),$$

即$P(AB)+P(\overline{A}\,\overline{B})\leqslant1$，同时有

$$P(A\cup B)-P(AB)=P(A\cup B)+P(\overline{AB})-1=P(A\cup B)+P(\overline{A}\cup\overline{B})-1\geqslant0,$$

即

$$P(A\cup B)+P(\overline{A}\cup\overline{B})\geqslant1,$$

知选项(B),(D)不正确. 又 $AB\subset B$,有 $P(AB)\leqslant P(B)$,从而有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)\geqslant P(A)-P(B),$$

知选项(C)不正确,故本题选择(A).

例 1.10 设 A 和 B 是任意两个事件,讨论下列命题的正确性.

①若 $P(A)=P(B)$,则 $A=B$;

②若 $P(AB)=0$,则 $AB=\varnothing$.

解 两个命题都不成立. 考虑向区间$[0,2]$上掷一随机点的试验. 令 $A=\{$随机点落入区间$[0,1]$上$\}$, $B=\{$随机点落入区间$[1,2]$上$\}$. 显然 $P(A)=P(B)$, $P(AB)=0$,然而 $A\neq B$, $AB\neq\varnothing$.

例 1.11 设随机事件 A,B 满足 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ 和 $P(A\cup B)=1$,则有(　　).

(A)$A\cup B=\Omega$　　　　(B)$AB=\varnothing$

(C)$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$　　　　(D)$P(A-B)=0$

解 应选(C).

根据加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,将已知条件代入得 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P(AB)$,即 $P(AB)=0$,从而 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1$,选(C).

【注】 $P(A)=1$ 不能推出 $A=\Omega$;$P(B)=0$ 不能推出 $B=\varnothing$.

2. 条件概率公式

例 1.12 已知 $P(\overline{A})=0.3$, $P(B)=0.4$, $P(A\overline{B})=0.5$,求 $P(B|A\cup\overline{B})$.

解 由条件概率的定义知 $P(B|A\cup\overline{B})=\dfrac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}$,其中

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.7+0.6-0.5=0.8.$$

又由 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$,可得

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2.$$

代回原式,可得 $$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{0.2}{0.8}=0.25.$$

例 1.13 设 A,B,C 是三个随机事件,A 与 C 互斥,$P(AB)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{3}$,则 $P(AB|\overline{C})=$ ________.

解 应填$\frac{3}{4}$.

因为 A 与 C 互斥,所以 $P(AC)=0$. 又 $ABC\subset AC$,所以 $P(ABC)=0$,故

$$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

【注】 由于 $AC=\varnothing$,则 $ABC=\varnothing B=\varnothing$,得到 $P(ABC)=0$.

3. 乘法公式

例 1.14 已知 $P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$.

解 由乘法公式知

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},\quad P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6},$$

所以
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

例 1.15 某人给四位亲友各写一封信，然后随机地装入 4 个写好地址的信封中，且每个信封装一封信. 问：

(1)4 封信都装对了的概率；

(2)4 封信都装错了的概率.

解 设事件 $A_i(i=1,2,3,4)$ 为“第 i 封信装对了”，事件 A 为“4 封信都装对了”，事件 B 为“4 封信都装错了”. 于是

(1)$P(A)=P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{24}.$$

(2)$P(B)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})$

$$=1-P\left(\overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}}\right)=1-P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$$

$$=1-\{P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)-$$
$$[P(A_1A_2)+P(A_1A_3)+P(A_1A_4)+P(A_2A_3)+P(A_2A_4)+P(A_3A_4)]+$$
$$[P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_2A_4)+P(A_1A_3A_4)+P(A_2A_3A_4)]-P(A_1A_2A_3A_4)\},$$

其中 $P(A_i)=\frac{1}{4}, P(A_iA_j)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}, P(A_iA_jA_k)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}(1\leqslant i,j,k\leqslant 4, i\neq j\neq k)$，于是

$$P(B)=1-4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{12}-4\times\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{3}{8}.$$

【注】 本题装信过程可看作无放回抽取信件，依次装入信封. 在计算第(2)问时，直接计算是较为困难的，这种情况下，采用逆向思维方法求解问题更加简捷.

4. 全概率公式

全概型的特点是事件的发生是在多个因素或条件下发生的，且这多个因素或条件构成一个完备事件组，抓住并设定完备事件组是解决这类问题的切入点和关键.

例 1.16 每箱产品有 10 件，其次品数从 0 到 2 是等可能的，开箱检验时，从中任取 1 件，如检验出是次品，则认为该箱产品不合格而拒收. 假设由于检验有误，将 1 件正品误认为次品的概率为 2%，1 件次品被漏查而判为正品的概率为 5%，求该箱产品通过验收的概率.

解 题中有两个完备事件组：一是箱中次品的件数为 0，1，2；二是通过验收是在抽取正品和抽取次品的两种情况下发生. 设 $A_i(i=0,1,2)$ 为“箱中有 i 个次品”，B 为“通过验收”，B_1 为“抽取正品”，于是有

$$P(A_i)=\frac{1}{3}(i=0,1,2),$$

$$P(B_1|A_i)=\frac{10-i}{10},$$

从而由全概率公式得

$$P(B_1)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B_1|A_i)$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2}\frac{10-i}{10}=0.9,$$
$$P(\overline{B_1})=0.1,$$

因此由全概率公式得

$$P(B)=P(B_1)P(B|B_1)+P(\overline{B_1})P(B|\overline{B_1})$$
$$=0.9\times0.98+0.1\times0.05=0.887.$$

【注】 本题中，通过验收是在完备事件组 $B_1,\overline{B_1}$ 背景下发生的，抽取正品则是在完备事件组 A_0,A_1,A_2 背景下实现的，因此，具备全概型的特征.

5. 贝叶斯公式（又称逆概率公式）

贝叶斯概型的特点是事件在多种因素或条件下发生，在事件已经发生后反过来讨论该事件是在哪个因素或条件下发生的概率.

例 1.17 设有两批数量相同的零件，已知有一批产品全部合格，另一批产品有 25%不合格. 从两批产品中任取 1 只，经检验是正品，放回原处，并从原所在批次再取 1 只，求这只产品是次品的概率.

分析 两次抽取情况有不同处，第一次是在完全不知情的情况下等可能地从两批产品中抽取，第二次是在第一次抽取产品并检验合格后，这时对所抽取是第一批还是第二批产品的概率已有计算，因此计算要分两步走. 第一步：在已知抽取产品合格的条件下，计算抽取的是第一批还是第二批产品的概率，属于贝叶斯概型；第二步：事件“从第一批产品中抽取”和“从第二批产品中抽取”构成一个完备事件组，计算第二次抽到次品的概率，属于全概型. 两个概型的复合，常常是该类题型的特点.

解 设 $H_i(i=1,2)$ 为“第一次从第 i 批产品中抽取”，A 为“所取产品为正品”，则有

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2},\quad P(A|H_1)=1,\quad P(A|H_2)=\frac{3}{4},$$

即有

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=\frac{7}{8},$$

从而有

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{4}{7},$$
$$P(H_2|A)=1-P(H_1|A)=\frac{3}{7}.$$

又设 $C_i(i=1,2)$ 为“第二次从第 i 批产品中抽取”，则有

$$P(C_1)=P(H_1|A)=\frac{4}{7},\quad P(C_2)=P(H_2|A)=\frac{3}{7},$$
$$P(\overline{A})=P(C_1)P(\overline{A}|C_1)+P(C_2)P(\overline{A}|C_2)$$
$$=\frac{4}{7}\times0+\frac{3}{7}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{28}.$$

四、事件的独立性和 n 重伯努利试验

1. 事件的独立性

例 1.18 三人独立地破译一个密码，他们能单独译出的概率分别为$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，求此密码被译出的概率.

解 记事件 A_i 为"第 i 个人译出密码"，$i=1,2,3$，事件 B 为"密码被译出". 则

$$P(B)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}.$$

【注】 互不相容可简化并事件的概率计算，相互独立可简化交事件的概率计算. 这里为了利用相互独立性，把事件的并在对偶律下转化为事件的交，这一方法会经常用到.

例 1.19 设 A,B 是任意两个事件，其中 $0<P(A)<1$，证明：$P(B|A)=P(B|\overline{A})$是事件 A,B 相互独立的充分必要条件.

证明 由 $0<P(A)<1$，知条件概率 $P(B|A)$，$P(B|\overline{A})$均存在.

必要性. 若 A,B 相互独立，则有 $P(B|A)=P(B)$，$P(B|\overline{A})=P(B)$，从而有 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$.

充分性. 若 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则有

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)},$$

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)[P(B)-P(AB)],$$

从而有 $P(AB)=P(A)P(B)$，即 A,B 相互独立.

例 1.20 将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$，$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$，$A_3=\{$正反面各出现一次$\}$，$A_4=\{$正面出现两次$\}$，则事件（　）.

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立　　(B) A_2,A_3,A_4 相互独立

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立　　(D) A_2,A_3,A_4 两两独立

解 应选(C).

由题设，根据古典概型，有

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{2},$$

$$P(A_1A_2)=\frac{1}{4},\quad P(A_1A_3)=\frac{1}{4},\quad P(A_2A_3)=\frac{1}{4},$$

但

$$P(A_1A_2A_3)=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

知 A_1,A_2,A_3 两两独立，但 A_1,A_2,A_3 不相互独立.

又

$$A_3A_4=\varnothing,\quad P(A_4)=\frac{1}{4},\quad P(A_3)=\frac{1}{2},\quad P(A_3A_4)=0\neq P(A_3)P(A_4),$$

知 A_2,A_3,A_4 不两两独立，也不相互独立，故选择(C).

2. n **重伯努利试验**

(1)**独立试验** 称试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 为相互独立的，如果分别与各个试验相联系的任意 n 个事件之间相互独立.

(2)**独立重复试验** "独立"表示"与各试验相联系的事件之间相互独立"，其中"重复"表示"每个事件在各次试验中出现的概率不变".

(3)**伯努利试验** 只计"成功"和"失败"两种对立结果的试验，称为**伯努利试验**. 将伯努利试验独立地重复进行 n 次，称为 n **重伯努利试验**，亦简称**伯努利试验**.

于是，伯努利试验的特点：

①只有两种对立的结果；

②各次试验相互独立；

③各次试验成功的概率相同.

相应地，n 重伯努利概型是满足下述条件的随机试验：

①每次试验只有 A 与 $\overline{A}$ 两个结果；

②每次试验 A 发生的概率 $p=P(A)$ 不变；

③试验独立重复进行 n 次.

如果用 X 表示 n 次独立试验事件 A 发生的次数，则 $X\sim B(n,p)$，即

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,\cdots,n).$$

例 1.21 对同一目标接连进行 3 次独立重复射击，假设至少命中目标一次的概率为 $\frac{7}{8}$，则每次射击命中目标的概率 $p=$________.

解 应填 $\frac{1}{2}$.

记事件 $A_i=\{$第 i 次命中目标$\}(i=1,2,3)$. 由条件知，事件 A_1,A_2,A_3 相互独立，且其概率均为 p. 已知进行 3 次独立重复射击，则至少命中目标一次的概率为

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})\\&=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})\\&=1-(1-p)^3=\frac{7}{8},\end{aligned}$$

由此得 $p=\frac{1}{2}$.

例 1.22 某人向同一目标独立重复射击，每次命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第二次命中目标的概率为(　　).

(A)$3p(1-p)^2$　　(B)$6p(1-p)^2$　　(C)$3p^2(1-p)^2$　　(D)$6p^2(1-p)^2$

解 应选(C).

依题设，4 次射击，最后一次命中，前 3 次有一次命中. 若设前 3 次射击有 ξ 次命中，则 $\xi\sim B(3,p)$，且有

$$P\{\xi=1\}=C_3^1 p(1-p)^2.$$

于是第 4 次射击恰好第二次命中目标的概率为 $3p^2(1-p)^2$，故选择(C).

基础习题精练

习题

1.1 用事件 A,B,C 的运算关系表示事件:①A,B,C 都不发生;②A,B,C 不都发生;③A,B,C 不多于一个发生.

1.2 甲口袋有 5 个白球、3 个黑球,乙口袋有 4 个白球、6 个黑球.从两个口袋中各任取一个球,求取到的两个球颜色相同的概率.

1.3 从$[0,1]$中随机地取两个数,求其积大于$\frac{1}{4}$,其和小于$\frac{5}{4}$的概率.

1.4 两个人相约 7 点至 8 点到某地会面,先到者等另一人 20 分钟就可以离去,求两个人能会面的概率.

1.5 已知事件 A,B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$,记 $P(A)=p$,求 $P(B)$.

1.6 已知 $P(A)=0.7$,$P(A-B)=0.3$,求 $P(\overline{AB})$.

1.7 设 A,B 为两个随机事件,且 $P(A)=0.4$,$P(A\cup B)=0.7$.若 A,B 互不相容,则 $P(B)=$________;若 A,B 相互独立,则 $P(B)=$________;若 A 发生 B 必发生,则 $P(B)=$________.

1.8 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次,其命中率分别为 0.6 和 0.7.现已知目标被击中,求它是甲射中的概率.

1.9 已知装有同种零件的产品两箱,第一箱内装 50 件产品,其中一等品 10 件;第二箱内装 30 件产品,其中一等品 18 件,现从两箱中任意挑选一箱.求:从中先后取出两件产品(取后不放回),先取出的产品是一等品的概率 p;已知先取出的产品是一等品,那么第二次取出的产品仍然是一等品的概率 q.

1.10 口袋中有 1 个球,不知它的颜色是黑的还是白的,现再往口袋中放入 1 个白球,然后从口袋中任意取出 1 个,发现取出的是白球,求口袋中原来那个球是白球的概率.

1.11 设 A,B,C 为三个随机事件,且 A 与 C 相互独立,B 与 C 相互独立,则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是(　　).

(A)A 与 B 相互独立　　(B)A 与 B 互不相容

(C)AB 与 C 相互独立　　(D)AB 与 C 互不相容

1.12 设事件 A 在每次试验中出现的概率为 p,则在 n 次独立重复试验中事件 A 最多出现一次的概率 $P=$________.

解答

1.1 解 这是一道要求将概率论语言叙述的事件用事件关系来表示的题目,只要知道各种运算所描述的事件关系,此题是不难解答的.

①{A,B,C 都不发生}={A 不发生,且 B 不发生,且 C 不发生}$=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$.

②{A,B,C 不都发生}={A,B,C 至少有一个不发生}={A,B,C 都发生}的逆事件

$=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}$.

③$\{A,B,C$ 不多于一个发生$\}=\{A,B,C$ 至多有一个发生$\}=\{A,B,C$ 至少有两个不发生$\}$

$$=\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}.$$

1.2 解 从两个口袋中各取一个球，共有 $C_8^1C_{10}^1$ 种等可能取法，而两个球颜色相同有两种情况：第一种是从甲口袋取出白球，从乙口袋也取出白球；第二种是从甲口袋取出黑球，从乙口袋也取出黑球. 共有 $C_5^1C_4^1+C_3^1C_6^1$ 种取法，于是 $P\{$取到的两个球颜色相同$\}=\dfrac{5\times4+3\times6}{8\times10}=\dfrac{19}{40}$.

1.3 解 从$[0,1]$中随机地取两个数 x 与 y，可以看成从图 1-5 所示正方形区域中任取一点，满足几何概型的两个特点. 记 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$，$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,x+y<\dfrac{5}{4},xy>\dfrac{1}{4}\right\}$，对应图 1-5 中阴影部分.

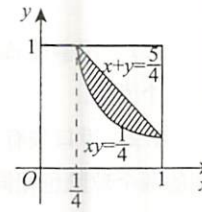


图 1-5

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{\int_{\frac14}^{1}\left(\frac54-x-\frac{1}{4x}\right)\mathrm{d}x}{1}=\left(\frac54x-\frac12x^2-\frac14\ln x\right)\Big|_{\frac14}^{1}$$

$$=\frac{15}{32}-\frac12\ln 2.$$

1.4 解 设两个人到达的时间分别为 x,y，则(x,y)的取值范围为边长为 60 的正方形区域，设两个人会面的事件为 A.

则 A 成立的范围是$\{(x,y)\mid |x-y|\leqslant20\}$，即当 $x\geqslant y$ 时，$x-y\leqslant20$；当 $x<y$ 时，$x-y\geqslant-20$. 于是，如图 1-6 所示，有

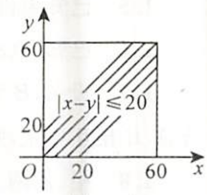


图 1-6

$$P(A)=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac59.$$

1.5 解 因为

$$P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB),$$

由此得
$$1-P(A)-P(B)=0,$$
所以
$$P(B)=1-P(A)=1-p.$$

1.6 解 因为 $0.3=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.7-P(AB)$，由此得 $P(AB)=0.7-0.3=0.4$，所以

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6.$$

1.7 0.3;0.5;0.7 **解** 由加法公式，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，于是：

若 A,B 互不相容，则 $P(AB)=0$，$P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.3$；

若 A,B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$，解得

$$P(B)=\frac{P(A\cup B)-P(A)}{1-P(A)}=0.5;$$

若 A 发生 B 必发生，则 $P(B)=P(A\cup B)=0.7$.

1.8 解 记事件 A 为"目标被击中"，事件 B_1 为"甲射中目标"，事件 B_2 为"乙射中目标"，因为 $A=B_1\cup B_2$，所以

$$P(A)=P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1B_2)$$
$$=0.6+0.7-0.6\times0.7=0.88.$$

考虑到 $B_1\subset A$，故有 $\quad P(B_1|A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)}{P(A)}=\dfrac{0.6}{0.88}\approx0.682.$

1.9 解 记 $A=\{$第一次取出的产品是一等品$\}$，$B=\{$第二次取出的产品是一等品$\}$，则

$$p=P(A),\quad q=P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

要计算 p,q,仅需求出 $P(A),P(AB)$. 而事件 A,AB 都是试验的结果,它与其前提条件产品取自哪一箱有关. 因此我们自然想到:写出前提条件,应用全概率公式计算 $P(A),P(AB)$.

记 $C_i=\{$产品取自第 i 箱$\}(i=1,2)$,则

$$C_1C_2=\varnothing,\quad C_1\cup C_2=\Omega,\quad A=AC_1+AC_2,\quad AB=ABC_1+ABC_2,$$

故

$$\begin{aligned}P(A)&=P(AC_1)+P(AC_2)=P(C_1)P(A|C_1)+P(C_2)P(A|C_2)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}=\frac{2}{5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(ABC_1)+P(ABC_2)=P(C_1)P(AB|C_1)+P(C_2)P(AB|C_2)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}=\frac{276}{1\,421},\end{aligned}$$

$$p=P(A)=\frac{2}{5},\quad q=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{276}{1\,421}\times\frac{5}{2}=\frac{690}{1\,421}.$$

1.10 **解** 记事件 A 为"取出的是白球",事件 B 为"原来那个球是白球". 容易看出:

$$P(A|B)=1,\quad P(A|\overline{B})=\frac{1}{2}.$$

另外,由于不知道袋中原来那个球的颜色,故 $P(B)=P(\overline{B})=\frac{1}{2}$,由贝叶斯公式得

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}=\frac{\frac{1}{2}\times1}{\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

1.11 (C) **解** $A\cup B$ 与 C 相互独立,即 $P[(A\cup B)\cap C]=P(A\cup B)P(C)$.

由

$$\begin{aligned}P[(A\cup B)\cap C]&=P(AC\cup BC)\\&=P(AC)+P(BC)-P(AC\cap BC)\\&=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(ABC),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}P(A\cup B)P(C)&=[P(A)+P(B)-P(AB)]P(C)\\&=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(AB)P(C),\end{aligned}$$

所以 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件为 $P(ABC)=P(AB)P(C)$,即 AB 与 C 相互独立. 应选(C).

1.12 $(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$ **解** 设 $B_k=\{$在 n 次独立重复试验中事件 A 恰好出现 k 次$\}(k=0,1)$,则

$$P=P(B_0)+P(B_1)=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}.$$

第2讲 一维随机变量及其分布

基础知识结构

- 一维随机变量
  - 概念
  - 分布函数
    - 概念
    - 性质
    - 应用——求概率
- 一维离散型随机变量
  - 分布律
  - 性质
  - 应用——求概率
  - 五大分布
    - 0—1分布$B(1,p)$
    - 二项分布$B(n,p)$
    - 泊松分布$P(\lambda)$
    - 几何分布$G(p)$
    - 超几何分布$H(n,N,M)$
- 一维连续型随机变量
  - 概率密度
  - 性质
  - 应用——求概率
  - 三大分布
    - 均匀分布
    - 指数分布
    - 正态分布
- 一维随机变量函数的分布
  - 离散型→离散型
  - 连续型→连续型（或混合型）

基础内容精讲

一、随机变量及其分布函数的概念、性质及应用

1. 随机变量的概念

随机变量就是"其值会随机而定"的变量. 设随机试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，如果对每一个 $\omega\in\Omega$，都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应，并且对任意实数 x，$\{\omega|X(\omega)\leqslant x,\omega\in\Omega\}$ 是随机事件，则称定义在 Ω 上的实值单值函数 $X(\omega)$ 为随机变量，简记为随机变量 X. 一般用大写字母 $X,Y,Z,\cdots$ 或希腊字母 $\xi,\eta,\zeta,\cdots$ 来表示随机变量.

【注】(1)随机事件是从静态的观点来研究随机现象，而随机变量则是一种动态的观点，如高等数学中常量与变量的区别.

(2)随机变量的实质是"实值单值函数"，这个定义不同于高等数学中函数的定义(其"定义域"一定是实数集)，它的"定义域"不一定是实数集，这点需要读者注意.

2. 分布函数的概念及性质

(1)概念.

设 X 是随机变量，x 是任意实数，称函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}(x\in\mathbf{R})$ 为随机变量 X 的分布函数，或称 X 服从 $F(x)$ 分布，记为 $X\sim F(x)$.

【注】分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性.

(2)性质(也是充要条件).

①$F(x)$ 是 x 的单调不减函数，即对任意实数 $x_1<x_2$，有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

②$F(x)$ 是 x 的右连续函数，即对任意 $x_0\in\mathbf{R}$，有 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0+0)=F(x_0)$；

③$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

【注】(1)务必记住分布函数是事件的概率，由此知 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，即 $F(x)$ 是有界函数.

(2)满足以上三条性质的函数 $F(x)$ 必是某个随机变量 X 的分布函数，所以，这三条性质也是判断函数 $F(x)$ 是否为某一随机变量 X 的分布函数的充要条件.

3. 分布函数的应用——求概率

$P\{X\leqslant a\}=F(a)$；

$P\{X<a\}=F(a-0)$；

$P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$.

二、常见的两类随机变量——离散型随机变量和连续型随机变量

1. 离散型随机变量及其概率分布

如果随机变量 X 只可能取有限个或可列个值 $x_1,x_2,\cdots$，则称 X 为离散型随机变量，称

$$P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\cdots$$

为 X 的**分布列**、**分布律**或**概率分布**，记为 $X\sim p_i$，概率分布常常用表格形式或矩阵形式表示，即

X	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

或 $X\sim\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$.

数列 $\{p_i\}$ 是离散型随机变量的概率分布的充要条件：$p_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_i p_i=1$.

设离散型随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=x_i\}=p_i$，则 X 的分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{x_i\leqslant x}P\{X=x_i\},$$

$$P\{X=x_i\}=P\{X\leqslant x_i\}-P\{X<x_i\}=F(x_i)-F(x_i-0),$$

并且对实数轴上的任一集合 B 有

$$P\{X\in B\}=\sum_{x_i\in B}P\{X=x_i\},$$

特别地，$$P\{a<X\leqslant b\}=P\{X\leqslant b\}-P\{X\leqslant a\}=F(b)-F(a).$$

2. 连续型随机变量及其概率密度

如果随机变量 X 的分布函数可以表示为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t\ (x\in\mathbf{R}),$$

其中 $f(x)$ 是非负可积函数，则称 X 为**连续型随机变量**，称 $f(x)$ 为 X 的**概率密度函数**，简称**概率密度**，记为 $X\sim f(x)$.

$f(x)$ 为某一随机变量 X 的概率密度的充分必要条件：$f(x)\geqslant 0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$（由此可知，改变 $f(x)$ 有限个点的值，$f(x)$ 仍然是概率密度）.

设 X 为连续型随机变量，$X\sim f(x)$，则对任意实数 c，有 $P\{X=c\}=0$；对实数轴上任一集合 B，有

$$P\{X\in B\}=\int_B f(x)\mathrm{d}x,$$

特别地，

$$P\{a<X<b\}=P\{a\leqslant X<b\}=P\{a<X\leqslant b\}=P\{a\leqslant X\leqslant b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

【注】 (1)"概率密度"这个名词的由来可解释如下：取定一个点 x，则按分布函数的定义，事件 $\{x<X\leqslant x+h\}(h>0$，为常数)的概率应为 $F(x+h)-F(x)$. 所以，比值 $[F(x+h)-F(x)]/h$ 可以解释为在点 x 附近长为 h 的区间 $(x,x+h]$ 内，单位长所占的概率. 令 $h\to 0$，则这个比值的极限，即 $F'(x)=f(x)$，也就是在点 x 处(无穷小区间内)单位长的概率. 或者说，它反映了概率在点 x 处的"密集程度". 设想一条极细的无穷长的金属杆，总质量为 1，概率密度相当于杆上各点的质量密度.

(2) $P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 意味着 X 落入某一区间的概率等于该区间上概率密度曲线之下的曲边梯形的面积. 应用概率的这种几何意义，常常有助于问题的分析与求解.

(3)设 $X\sim f(x)$，则 X 的分布函数 $F(x)$ 是 x 的连续函数. 在 $f(x)$ 的连续点 x_0 处有 $F'(x_0)=f(x_0)$. 如果 $F(x)$ 是连续函数，除有限个点外，$F'(x)$ 存在且连续，则 X 为连续型随机变量，且 $f(x)=F'(x)$（在 $F'(x)$ 不存在的地方可以令 $f(x)=0$ 或取其他值）.

三、常见的随机变量分布类型

1. 离散型

(1)0−1 分布 $B(1,p)$.

如果 X 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1-p\end{pmatrix}$，即 $P\{X=1\}=p,P\{X=0\}=1-p$，则称 X 服从参数为 p 的 **0−1 分布**，记为 $X\sim B(1,p)(0<p<1)$.

(2)二项分布 $B(n,p)$.

如果 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,\cdots,n;0<p<1)$，则称 X 服从参数为(n,p)的**二项分布**，记为 $X\sim B(n,p)$.

【注】 如果 X 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，则 $X\sim B(n,p)$，其中 $p=P(A)$. 这个结论在解题中会经常用到.

(3)泊松分布 $P(\lambda)$.

如果 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,\cdots;\lambda>0),$$

则称 X 服从参数为 λ 的**泊松分布**，记为$X\sim P(\lambda)$.

(4)几何分布 $G(p)$.

如果 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p\ (k=1,2,\cdots;0<p<1),$$

则称 X 服从参数为 p 的**几何分布**，记为 $X\sim G(p)$.

【注】 设 X 表示伯努利试验中事件 A 首次发生所需做的试验次数，则 $X\sim G(p)$，其中 $p=P(A)$.

(5)超几何分布 $H(n,N,M)$.

如果 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ $(\max\{0,n-N+M\}\leqslant k\leqslant\min\{M,n\};M,N,n$ 为正整数且 $M\leqslant N,n\leqslant N,k$ 为整数)，则称 X 服从参数为(n,N,M)的**超几何分布**，记为 $X\sim H(n,N,M)$.

2. 连续型

(1)均匀分布 $U(a,b)$.

如果随机变量 X 的概率密度和分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其他,\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b,\end{cases}$$

则称 X 在区间(a,b)上服从**均匀分布**，记为 $X\sim U(a,b)$.(见图 2-1,图 2-2)

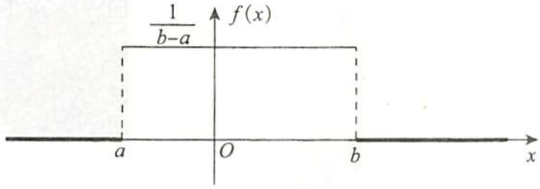


图 2-1

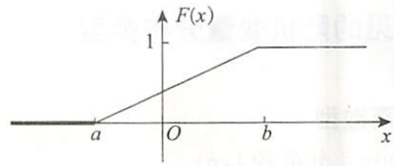


图 2-2

【注】 区间 (a,b) 可以是闭区间 $[a,b]$；几何概型是均匀分布的实际背景，用几何方法计算事件概率时，已假设点在区域内服从均匀分布；几何概率可以用均匀分布函数计算.

(2)指数分布 $E(\lambda)$.

如果 X 的概率密度和分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}\quad(\lambda>0),$$

则称 X 服从参数为 λ 的**指数分布**，记为 $X\sim E(\lambda)$.(见图 2-3，图 2-4)

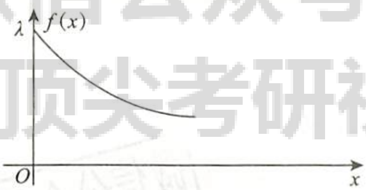


图 2-3

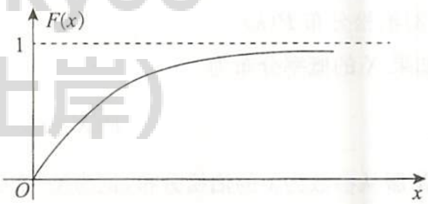


图 2-4

(3)正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

如果 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

其中 $-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma>0$，则称 X 服从参数为 (μ,σ^2) 的**正态分布**或称 X 为**正态变量**，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 此时 $f(x)$ 的图形关于直线 $x=\mu$ 对称，即 $f(\mu-x)=f(\mu+x)$，并在 $x=\mu$ 处有唯一最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. 如图 2-5 所示.

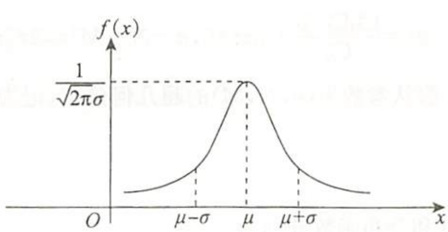


图 2-5

称 $\mu=0,\sigma=1$ 时的正态分布 $N(0,1)$ 为**标准正态分布**，通常记标准正态分布的概率密度为 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$，分布函数为 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. 显然 $\varphi(x)$ 为偶函数，则

$$\Phi(0)=\frac{1}{2},\quad \Phi(-x)=1-\Phi(x).$$

如图 2-6 所示.

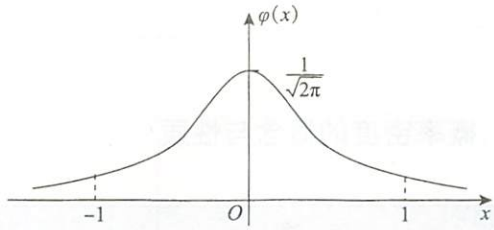


图 2-6

若 $X\sim N(0,1)$，$P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha$，则称 μ_α 为标准正态分布的上侧 α 分位数(上 α 分位点).

如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$F(\mu-x)+F(\mu+x)=1,$$

$$P\{a<X<b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),$$

$$aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)(a\neq 0).$$

四、一维随机变量函数的分布

1. 概念

设 X 为随机变量，函数 $y=g(x)$，则以随机变量 X 作为自变量的函数 $Y=g(X)$ 也是随机变量，称为随机变量 X 的函数. 例如：$Y=aX^2+bX+c$，$Y=|X-a|$，$Y=\begin{cases}X, & X\leqslant 1,\\ 1, & X>1,\end{cases}$ 等等.

2. 随机变量函数的分布

(1)离散型→离散型.

设 X 为离散型随机变量，其概率分布为 $p_i=P\{X=x_i\}(i=1,2,\cdots)$，则 X 的函数 $Y=g(X)$ 也是离散型随机变量，其概率分布为 $P\{Y=g(x_i)\}=p_i(i=1,2,\cdots)$，即

$$Y\sim\begin{pmatrix}g(x_1) & g(x_2) & \cdots\\ p_1 & p_2 & \cdots\end{pmatrix}.$$

如果有若干个 $g(x_i)$ 值相同，则合并诸项为一项 $g(x_k)$，并将相应概率相加作为 Y 取 $g(x_k)$ 值的概率.

(2)连续型→连续型(混合型).

设 X 为连续型随机变量，其分布函数、概率密度分别为 $F_X(x)$ 与 $f_X(x)$，随机变量 $Y=g(X)$ 是 X 的函数，则 Y 的分布函数和概率密度可用分布函数法求得.

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=\int_{g(x)\leqslant y}f_X(x)\mathrm{d}x.$$

如果 $F_Y(y)$ 连续，且除有限个点外，$F'_Y(y)$ 存在且连续，则 Y 的概率密度 $f_Y(y)=F'_Y(y)$.

基础例题精解

一、分布函数、概率分布、概率密度的概念与性质

(1) $F(x)$是分布函数$\Leftrightarrow F(x)$是x的单调不减、右连续函数，且$F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$.

【注】 若$F(x)$为分段函数，必须在分段点处考虑右连续.

(2) $\{p_i\}$是概率分布$\Leftrightarrow p_i \geqslant 0$，且$\sum\limits_i p_i = 1$.

(3) $f(x)$是概率密度$\Leftrightarrow f(x)\geqslant 0$，且$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$.

例 2.1 已知离散型随机变量X的正概率点为$-1,0,2$，它们各自的概率互不相等且成等差数列，则X的分布律为________，分布函数为________，$P\{|X|\leqslant 1 | X\geqslant 0\}=$________.

解 应填 $X\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3}+d & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-d \end{pmatrix}$，$-\frac{1}{3}<d<\frac{1}{3}, d\neq 0$；$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ \frac{1}{3}+d, & -1\leqslant x<0, \\ \frac{2}{3}+d, & 0\leqslant x<2, \\ 1, & x\geqslant 2; \end{cases}$

$\frac{1}{2-3d}$.

设$P\{X=-1\}=a+d, P\{X=0\}=a, P\{X=2\}=a-d$，其中$0<a+d<1, 0<a<1, 0<a-d<1$，由离散型随机变量$X$分布律的性质，有

$$a+d+a+a-d=3a=1,$$

解得$a=\frac{1}{3}$，且$-\frac{1}{3}\leqslant d<\frac{1}{3}$，$d\neq 0$，因此$X\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3}+d & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-d \end{pmatrix}$，其中$-\frac{1}{3}<d<\frac{1}{3}, d\neq 0$.

所以

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ \frac{1}{3}+d, & -1\leqslant x<0, \\ \frac{2}{3}+d, & 0\leqslant x<2, \\ 1, & x\geqslant 2. \end{cases}$$

$$P\{|X|\leqslant 1|X\geqslant 0\}=\frac{P\{0\leqslant X\leqslant 1\}}{P\{X\geqslant 0\}}=\frac{1}{2-3d}.$$

例 2.2 设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 是随机变量的分布函数，$f_1(x)$，$f_2(x)$ 是相应的概率密度，则（　　）.

(A) $F_1(x)+F_2(x)$ 是分布函数　　　(B) $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 是分布函数

(C) $f_1(x)+f_2(x)$ 是概率密度　　　(D) $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 是概率密度

解 应选(B).

根据连续型随机变量分布函数和概率密度的性质，有

$$F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=2,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x\neq\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=1,$$

应排除选项(A)，(C)，(D)，故选择(B). 事实上，由于 $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 是单调不减的右连续函数，且

$$F_1(-\infty)\cdot F_2(-\infty)=0,\quad F_1(+\infty)\cdot F_2(+\infty)=1,$$

可直接判断选项(B)正确.

二、分布函数、概率分布、概率密度之间的关系与转换

(1) 已知 $\{p_i\}$ 为概率分布，则分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum\limits_{x_i\leqslant x}P\{X=x_i\}=\sum\limits_{x_i\leqslant x}p_i$；已知概率密度为 $f(x)$，则分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$.

(2) 反之，已知 X 的分布函数为 $F(x)$，那么首先要判断 X 是什么类型的随机变量：如果 $F(x)$ 是阶梯函数，则 X 为离散型的，X 可能取得的值 x_i 必为 $F(x)$ 的间断点，且 $p_i=P\{X=x_i\}=F(x_i)-F(x_i-0)$；如果 $F(x)$ 是连续函数，且除有限个点外，$F'(x)$ 存在且连续，则 X 是连续型随机变量，其概率密度 $f(x)=F'(x)$.

(3) 除上述两种情况，X 常常是混合型随机变量. 见例 2.19.

例 2.3 已知随机变量 X 的概率分布为

X	1	2	3
$P\{X=k\}$	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

且 $P\{X\geqslant 2\}=\dfrac{3}{4}$，求未知参数 θ 及 X 的分布函数 $F(x)$.

解 由 $P\{X\geqslant 2\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=2\theta(1-\theta)+(1-\theta)^2=1-\theta^2=\dfrac{3}{4}$，解得 $\theta=\pm\dfrac{1}{2}$.

又 $P\{X=2\}=2\theta(1-\theta)\geqslant 0$，故取 $\theta=\dfrac{1}{2}$，从而得 X 的概率分布

X	1	2	3
$P\{X=k\}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$

X 的分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{i\leqslant x}P\{X=i\}=\begin{cases}0, & x<1,\\ \frac{1}{4}, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{3}{4}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

例 2.4 已知 X 的分布函数为 $F(x)$，概率密度为 $f(x)$. 当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 连续，且 $f(x)=F(x)$，若 $F(0)=1$，求 $F(x)$，$f(x)$.

解 由于 $F(x)$ 是单调不减的函数，故对任意的 $x>0$，有 $F(x)=1$. 又 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 连续，故 $f(x)=F'(x)$，已知 $f(x)=F(x)$，由微分方程 $F'(x)=F(x)$，及 $F(0)=1$，解得 $F(x)=\mathrm{e}^x(x\leqslant 0)$，从而得

$$F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

【注】 当分布函数是不连续的分段函数时，为保证其右连续性，自变量 x 的分段小区间除第一个区间之外，其余都应是左闭右开的.

例 2.5 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2\left(1-\frac{1}{x^2}\right), & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 X 的分布函数 $F(x)$.

解 当 $1\leqslant x<2$ 时，

$$F(x)=\int_1^x 2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\left(2t+\frac{2}{t}\right)\Big|_1^x$$
$$=2\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=2\left(x+\frac{1}{x}-2\right);$$

当 $x<1$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^x 0\mathrm{d}t=0;$$

当 $x\geqslant 2$ 时，

$$F(x)=\int_1^2 2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=2\left(t+\frac{1}{t}\right)\Big|_1^2=2\times\frac{1}{2}=1.$$

故

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 2\left(x+\frac{1}{x}-2\right), & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

三、利用分布计算概率及其逆问题

已知 X 的分布，则可以求出用 X 的取值范围表示的事件的概率.

如果已知 X 的分布函数 $F(x)$，则 $P\{X\leqslant a\}=F(a)$，$P\{X<a\}=F(a-0)$，由此应用概率性质可以求得 X 在任一区间内的概率，例如，

$$P\{X=a\}=P\{X\leqslant a\}-P\{X<a\}=F(a)-F(a-0),$$
$$P\{a<X<b\}=P\{X<b\}-P\{X\leqslant a\}=F(b-0)-F(a),$$

等等.

(1)如果已知 X 的概率分布 $\{p_i\}$，则对实数轴上任意集合 B 有

$$P\{X\in B\}=\sum_{x_i\in B}P\{X=x_i\}.$$

(2)如果已知 X 的概率密度 $f(x)$，则对实数轴上任意集合 B 有

$$P\{X\in B\}=\int_B f(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，

$$P\{X=c\}=0(\forall c\in \mathbf{R}),$$
$$P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(3)反问题：已知某个事件的概率值求与其有关的未知参数，则只要写出与此事件有关的相应公式及概率，反解等式或不等式，即可求得未知参数或其取值范围.

例 2.6 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=Ak(k=1,2,3,4,5)$，求常数 A 及概率 $P\left\{\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right\}$.

解 由于 $\sum\limits_{k=1}^{5}P\{X=k\}=1$，即 $A\sum\limits_{k=1}^{5}k=15A=1$，解得 $A=\frac{1}{15}$，且

$$P\left\{\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{1}{5}.$$

例 2.7 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}a+b\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

求常数 a,b 及概率 $P\{|X|<2\}$.

解 $F(x)$ 中含有2个未知参数，依据分布函数的两个性质建立两个方程解之.

由分布函数的性质，有

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(a+b\mathrm{e}^{-x})=1,$$

得 $a=1$. 又 $F(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，有

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}(a+b\mathrm{e}^{-x})=a+b=0,$$

得 $b=-1$. 所以

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

从而有

$$P\{|X|<2\}=P\{-2<X<2\}$$
$$=F(2-0)-F(-2)=1-\mathrm{e}^{-2}-0=1-\mathrm{e}^{-2}.$$

例 2.8 设 $X \sim N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，求 $P\{X<0\}$.

解 已知 $X \sim N(2,\sigma^2)$，故

$$P\{2<X<4\}=\Phi\left(\frac{4-2}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{2-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-0.5=0.3,\quad \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.8,$$

所以 $P\{X<0\}=\Phi\left(\frac{0-2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.2$.

【注】 结合图 2-7，本题应用面积求解更为直观、简便.

已知 $P\{2<X<4\}=0.3$，故

$$P\{X<0\}=0.5-0.3=0.2.$$

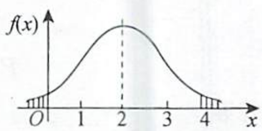


图 2-7

例 2.9 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ Y 表示对 X 的 3 次独立重复试验中事件 $\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数，求 $P\{Y=2\}$.

解 依题意 $Y\sim B(3,p)$，其中 $p=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$，故 $P\{Y=2\}=\mathrm{C}_3^2p^2(1-p)=\frac{9}{64}$.

四、八个常见随机变量分布类型及其应用

1. 离散型随机变量的分布

(1)0－1 分布.

0－1 分布就是 $n=1$ 情况下的二项分布，即只进行一次试验，该事件发生的概率为 p，不发生的概率为 $q=1-p$. 这是一个最简单的分布，随机现象的结果只有两种，比如抛硬币观察正、反面，新生儿是男还是女，检查产品是否合格等，都可用它来描述.

例 2.10 设 X 服从 0－1 分布，其分布律为 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$，$k=0,1$，$0<p<1$，求 X 的分布函数，并作出其图形.

解 当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}=1-p;$$

当 $x\geqslant 1$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=(1-p)+p=1.$$

所以

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-p, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

作图，如图 2-8 所示.

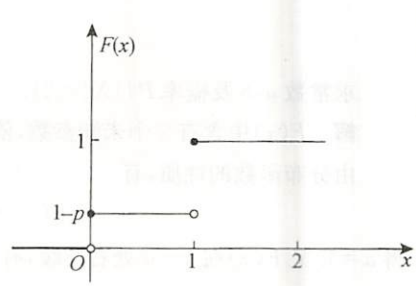


图 2-8

(2)二项分布 $B(n,p)$.

例 2.11 设 $X\sim B(2,p)$,$Y\sim B(4,p)$,且 $P\{X\geqslant 1\}=\frac{5}{9}$,则 $P\{Y\geqslant 1\}=$( ).

(A)$\frac{65}{81}$ (B)$\frac{16}{81}$ (C)1 (D)$\frac{4}{7}$

解 应选(A).

由题设 $P\{X\geqslant 1\}=\frac{5}{9}=1-P\{X=0\}=1-C_2^0p^0(1-p)^2$,即$(1-p)^2=\frac{4}{9}$,解得 $p=\frac{1}{3}$,从而有

$$P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-C_4^0p^0(1-p)^4=1-\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{65}{81},$$

故选择(A).

(3)几何分布及其推广.

例 2.12 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止,记 Y 为观测次数. 求 Y 的概率分布.

解 记 p 为"观测值大于 3"的概率,则 $p=P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}$.

依题意,Y 为离散型随机变量,而且取值为 2,3,…,则 Y 的概率分布为

$$P\{Y=k\}=C_{k-1}^1p(1-p)^{k-2}\cdot p=C_{k-1}^1p^2(1-p)^{k-2}=(k-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2},k=2,3,\cdots.$$

(4)超几何分布.

从一个有限总体中进行不放回抽样常会遇到超几何分布.

设由 N 个产品组成的总体,其中含有 M 个不合格品. 若从中随机不放回地抽取 n 个,则其中含有不合格品的个数 X 是一个离散型随机变量. 假如 $n\leqslant M$,则 X 可能取 $0,1,\cdots,n$;若 $n>M$,则 X 可能取 $0,1,\cdots,M$. 由古典概型概率公式容易算得

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \qquad (*)$$

其中 $\max\{0,n-N+M\}\leqslant k\leqslant\min\{M,n\}$;$M,N,n$ 为正整数且 $M\leqslant N,n\leqslant N,k$ 为整数.

这个分布称为**超几何分布**,它含有三个参数 N,M 和 n,记为 $H(n,N,M)$.

当 $n\ll N$(即抽取个数 n 远小于产品总数 N)时,每次抽取后,总体中的不合格品率 $p=\frac{M}{N}$ 改变甚微,这时不放回抽样可近似看作放回抽样,超几何分布可用二项分布近似.

例 2.13 20 个产品中有 5 个不合格品,若从中随机取出 8 个,求其中不合格品数 X 的概率分布.

解 按题意有 $N=20,M=5,n=8$. 由($*$)式可算得

$$P\{X=0\}=\frac{C_{15}^8}{C_{20}^8}=\frac{6\ 435}{125\ 970}=0.051\ 1,$$

$$P\{X=1\}=\frac{C_5^1C_{15}^7}{C_{20}^8}=\frac{32\ 175}{125\ 970}=0.255\ 4,$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_5^2C_{15}^6}{C_{20}^8}=\frac{50\ 050}{125\ 970}=0.397\ 3.$$

类似可得 $X=3,4,5$ 的概率，则 X 的概率分布为

X	0	1	2	3	4	5
P	0.051 1	0.255 4	0.397 3	0.238 4	0.054 2	0.003 6

【注】 由此分布可算得各种事件的概率. 譬如，不合格品不多于 3 个的概率为

$$\begin{aligned}P\{X\leqslant 3\}&=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}\\&=0.051\ 1+0.255\ 4+0.397\ 3+0.238\ 4=0.942\ 2.\end{aligned}$$

(5)泊松分布.

例 2.14 通过某交叉路口的汽车流可以看作服从泊松分布. 已知在 1 分钟内有汽车通过的概率为 0.7，则 1 分钟内最多有 1 辆汽车通过的概率为(　　).

(A)$0.7(1-\ln 0.7)$　　(B)$0.3(1-\ln 0.7)$

(C)$0.3(1-\ln 0.3)$　　(D)$0.7(1-\ln 0.3)$

解 应选(C).

1 分钟内通过路口的汽车数量 X 服从参数为 λ 的泊松分布. 由已知，

$$P\{X\geqslant 1\}=1-\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=0.7,$$

得 $\lambda=-\ln 0.3$，于是 $P\{X\leqslant 1\}=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=e^{\ln 0.3}(1-\ln 0.3)=0.3(1-\ln 0.3)$，故选择(C).

【注】 离散型随机变量的分布问题可归纳为两种基本形式.

其一，用"三步法"生成概率分布. "三步法"是求离散型随机变量分布的最基本也是最常见的一种方法. 具体步骤如下：①确定随机变量的正概率点，这是正确计算分布的前提. ②对每个取值点求概率，这是生成分布的最关键部分. 概率计算可能涉及古典概型(分配问题、连续抽取问题、超几何分布问题)、几何概型、全概率或贝叶斯概型、伯努利概型，并且可能用到概率的加法公式、乘法公式和条件概率公式等. ③将结果汇总，给出概率分布. 概率分布最常见的是列表形式(分布列或分布阵).

其二，离散型随机变量以概率分布形式表现. 主要涉及离散型随机变量的重要分布(重点是二项分布和泊松分布). 求解这类问题的要点是判断分布类型，确定分布参数.

2. 连续型随机变量的分布

(1)均匀分布 $U(a,b)$.

例 2.15 已知 $X\sim U(a,b)(a>0)$，且 $P\{0<X<3\}=\frac{1}{4}$，$P\{X>4\}=\frac{1}{2}$，求 X 的概率密度及 $P\{1<X<5\}$.

解 如图 2-9 所示，$X\sim U(a,b)$.

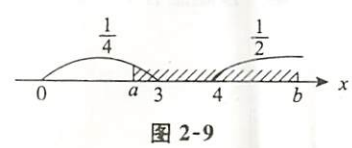


图 2-9

由 $P\{X>4\}=\frac{1}{2}$，且 $P\left\{X>\frac{a+b}{2}\right\}=\frac{1}{2}$，得 $\frac{a+b}{2}=4$，即 $a+b=8$.

由于 $P\{3<X<4\}=1-P\{X\geqslant 4\}-P\{X\leqslant 3\}=1-P\{X>4\}-P\{0<X<3\}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，又

$P\{3<X<4\}=\frac{4-3}{b-a}$，故 $\frac{4-3}{b-a}=\frac{1}{4}$，解得 $b-a=4$.

联立得 $\begin{cases}a+b=8,\\ b-a=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=6.\end{cases}$

所以 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 2<x<6,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是

$$P\{1<X<5\}=P\{2<X<5\}=\frac{5-2}{6-2}=\frac{3}{4}.$$

(2)指数分布.

参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布 $E(\lambda)$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 2.16　某元件的工作寿命 X(小时)服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布.

(1)求该元件正常工作 t 小时的概率；

(2)已知该元件已正常工作 10 小时，求在此基础上再工作 10 小时的概率($\lambda=0.01$).

解　依题设，X 服从参数为 λ 的指数分布，因此，其概率密度和分布函数都已知.

(1)$P\{X>t\}=1-P\{X\leqslant t\}=1-F(t)=1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})=\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

(2)

$$P\{X>20|X>10\}=\frac{P\{X>20,X>10\}}{P\{X>10\}}=\frac{P\{X>20\}}{P\{X>10\}}=\frac{\mathrm{e}^{-0.01\times 20}}{\mathrm{e}^{-0.01\times 10}}=\mathrm{e}^{-0.1}.$$

【注】　本题第(2)问的结果，$P\{X>20|X>10\}=P\{X>10\}$，即元件正常工作 10 小时的概率与在这之前的工作状态无关，说明指数分布具有无记忆性.

本题第(2)问还涉及由若干相互独立的电子元器件组合生成的系统可靠性问题，常见的基本结构形式有并联、串联两种. 在并联系统中，只要其中一个元器件正常工作，整个系统就能正常工作，正常工作时间为所有元器件中正常工作时间最长的. 在串联系统中，只有所有元器件都正常工作，整个系统才正常工作，正常工作时间为所有元器件中正常工作时间最短的. 考生应了解这类题型的特点和处理方法.

(3)正态分布.

有关正态分布的问题：

①所有有关正态分布不等式的判别都应先标准化；

②充分利用标准正态分布图形的对称性，有时对于解题可以起到事半功倍的效果；

③要注意利用正态分布的参数与其数字特征的关系求解问题.

例 2.17 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随 σ 的增大，$P\{|X-\mu|<1\}$（ ）.

(A)单调增加　　(B)单调减少　　(C)保持不变　　(D)先增后减

解 应选(B).

讨论 $P\{|X-\mu|<1\}$ 的单调性应在将其标准化之后进行. 由 $P\{|X-\mu|<1\}=P\left\{\left|\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right|<\dfrac{1}{\sigma}\right\}=2\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma}\right)-1$，及 $\Phi(u)$ 为单调增加函数，$u=\dfrac{1}{\sigma}$ 为单调减少函数，知随着 σ 的增大，$\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma}\right)$ 单调减少，从而知，随着 σ 的增大，$P\{|X-\mu|<1\}$ 单调减少，故选择(B).

例 2.18 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于（ ）.

(A)$u_{\frac{\alpha}{2}}$　　(B)$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　(C)$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　(D)$u_{1-\alpha}$

解 应选(C).

如图 2-10 所示，从几何直观看，条件中给出的 u_α 即为上侧 α 分位数. 类比可得 $P\{|X|<u_{\frac{1-\alpha}{2}}\}=\alpha$，故选择(C).

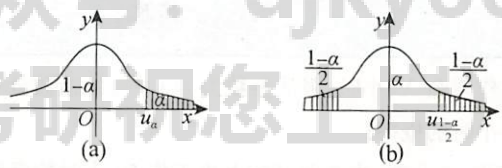


图 2-10

3. 一般类型随机变量的概率分布

同时兼有离散型与连续型随机变量特征的随机变量，或未明确分布类型的随机变量都可称为一般类型的随机变量，也叫混合型随机变量. 需要强调的是，该类型的分布问题只能以分布函数为工具.

例 2.19 假设随机变量 X 满足不等式 $1\leqslant X\leqslant 4$，且 $P\{X=1\}=\dfrac{1}{4}$，$P\{X=4\}=\dfrac{1}{3}$，在区间 $(1,4)$ 内服从均匀分布. 求 X 的分布函数.

解 本题随机变量同时在定点 $X=1$，$X=4$，和区间 $(1,4)$ 取正概率值，为混合型随机变量. 其分布函数根据 x 依次在 $(-\infty,1)$，$x=1$，$(1,4)$，$x=4$，$(4,+\infty)$ 取值，计算 $P\{X\leqslant x\}$ 得到.

由题设，X 在区间 $(1,4)$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}a, & 1<x<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}P\{1\leqslant X\leqslant 4\}&=P\{X=1\}+P\{1<X<4\}+P\{X=4\}\\&=\frac{1}{4}+\int_1^4 a\,\mathrm{d}x+\frac{1}{3}=1,\end{aligned}$$

即有 $\displaystyle\int_1^4 a\,\mathrm{d}x=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$，$a=\dfrac{5}{36}$.

当 $x<1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $x=1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\dfrac{1}{4}$；

当 $1<x<4$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant 1\}+P\{1<X\leqslant x\}=\frac{1}{4}+\int_1^x \frac{5}{36}\mathrm{d}x=\frac{1}{9}+\frac{5}{36}x;$$

当 $x\geqslant 4$ 时，$F(x)=1$.

从而得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \frac{1}{9}+\frac{5}{36}x, & 1\leqslant x<4,\\ 1, & x\geqslant 4.\end{cases}$$

五、一维随机变量函数的分布

例 2.20　设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=-1\}=\frac{1}{4},\quad P\{X=0\}=\frac{1}{2},\quad P\{X=1\}=\frac{1}{4},$$

求 $Y=X^2$ 的分布.

解　离散型随机变量的函数仍属于离散型随机变量范畴，求解其分布问题仍然按照计算离散型随机变量分布的三个步骤进行.

注意到 Y 的可能取值为 $0,1$，于是有

$$P\{Y=0\}=P\{X^2=0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X^2=1\}=P\{X=1\cup X=-1\}$$

$$=P\{X=1\}+P\{X=-1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

或
$$P\{Y=1\}=1-P\{Y=0\}=\frac{1}{2},$$

即有
$$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

例 2.21　假设随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，$F(x)$ 是其分布函数，证明：随机变量 $Y=F(X)$ 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布.

证明　指数分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 设 $G(y)=P\{Y\leqslant y\}$ 为 $Y=F(X)$ 的分布函数. 由于分布函数 $F(x)$ 的值域为 $[0,1)$，可见当 $y\leqslant 0$ 时，$G(y)=0$；当 $y\geqslant 1$ 时，$G(y)=1$；当 $0<y<1$ 时，

$$G(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\mathrm{e}^{-\lambda X}\leqslant y\}=P\left\{X\leqslant -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)\right\}$$

$$=F\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)\right]=y,$$

于是 $G(y)$ 是区间 $(0,1)$ 上的均匀分布函数，从而 $Y=F(X)$ 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布.

【注】　本题更一般的结论见习题 2.12.

例 2.22　设 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解 按照连续型随机变量函数 $Y=F(X)$ 分布的计算步骤进行.

由于 $-\infty<X<+\infty$，知 $0\leqslant Y<+\infty$. 记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，概率密度为 $f_Y(y)$.

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y\geqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}\}=2\Phi(\sqrt{y})-1$.

从而 $Y=X^2$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}2\Phi(\sqrt{y})-1, & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

于是其概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y}), & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

基础习题精练

习题

2.1 离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\leqslant x<2,\\ 0.8, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3,\end{cases}$$

则 X 的分布列为________，$P\{X\leqslant 3.2\}=$________；方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根的概率为________.

2.2 已知 $F(x)$ 是分布函数，下列函数：

①$aF(x)(a>0,a\neq 1)$；②$F(x)+F(-x)$；③$F(x)-F(-x)$；④$F(x)\cdot F(-x)$.

其中不能作为分布函数的个数是( ).

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

2.3 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 X 的分布函数 $F(x)$.

2.4 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{x^2}, & x>100,\\ 0, & x\leqslant 100,\end{cases}$$

则 $A=$________，$P\{100<X\leqslant 150\}=$________，$P\{X\geqslant 1\,000\}=$________，$P\{X=1\,000\}=$________，X 的分布函数 $F(x)=$________.

2.5 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-a,\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a\leqslant x<a,\\ 1, & x\geqslant a,\end{cases}$$

则 $A=$________,$B=$________,X 的概率密度 $f(x)=$________,$P\left\{-\dfrac{a}{2}<X<\dfrac{a}{2}\right\}=$________.

2.6 设随机变量 X 服从区间(2,5)上的均匀分布,求对 X 进行3次独立观测中,至少有2次的观测值大于3的概率.

2.7 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$,随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,$\sigma_1,\sigma_2>0$,且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$,则必有( ).

(A)$\sigma_1<\sigma_2$ (B)$\sigma_1>\sigma_2$ (C)$\mu_1<\mu_2$ (D)$\mu_1>\mu_2$

2.8 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $P\{0\leqslant X\leqslant 1\}=$________,$P\{0<X<1\}=$________.

2.9 设随机变量 X 和 Y 同分布,X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

已知事件 $A=\{X>a\}$ 和 $B=\{Y>a\}$ 独立,且 $P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$,求常数 a.

2.10 设连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 是一个偶函数,$F(x)$ 为 X 的分布函数,证明:对任意实数 $a>0$,有

(1)$F(-a)=1-F(a)=0.5-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;

(2)$P\{|X|<a\}=2F(a)-1$;

(3)$P\{|X|>a\}=2[1-F(a)]$.

2.11 已知 X 为随机变量,$Y=X^2+X+1$,已知 X 的概率分布为 $P\{X=-1\}=P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{3}$,求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

2.12 设随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$ 是严格增函数,其反函数 $F_X^{-1}(y)$ 存在,$Y=F_X(X)$.证明:Y 服从区间(0,1)上的均匀分布.

2.13 设随机变量 $X\sim U(-1,2)$,求 $Y=|X|$ 的概率密度.

2.14 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\dfrac{k}{1+x^2}\ (x\in\mathbf{R})$.求:

(1)常数 k;

(2)随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

2.15 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & X\geqslant 2.\end{cases}$

(1)求 Y 的分布函数;

(2)求概率 $P\{X\leqslant Y\}$.

解答

2.1 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\end{pmatrix}$;1;0.6 **解** 分布函数的分段点即为离散型随机变量的正概率点,正概率点的概率即为对应点跃度,即 $X=-1,2,3$,分布列为

$$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\end{pmatrix},$$

$$P\{X\leqslant 3.2\}=F(3.2)=1.$$

方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根,即 $X^2-4\geqslant 0$,从而有

$$P\{X^2-4\geqslant 0\}=P\{X\leqslant -2\}+P\{X\geqslant 2\}=F(-2)+1-F(2-0)=1-0.4=0.6.$$

2.2 (D) **解** 应用分布函数的充要条件求解.由于

① $$aF(+\infty)=a\neq 1,$$

② $$F(-\infty)+F(+\infty)=1\neq 0,$$

③ $$F(-\infty)-F(+\infty)=-1\neq 0,$$

④ $$F(+\infty)\cdot F(-\infty)=0\neq 1,$$

故①,②,③,④都不能作为分布函数,故答案选(D).

2.3 **解** 由题设知,当 $x<0$ 时,$F(x)=0$;

当 $0\leqslant x<1$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{x}t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t^2\Big|_0^x=\frac{x^2}{2};$$

当 $1\leqslant x<2$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{1}^{x}(2-t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}t\mathrm{d}t$$
$$=\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x+\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=2x-\frac{x^2}{2}-1;$$

当 $x\geqslant 2$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}t\mathrm{d}t+\int_{1}^{2}(2-t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1+\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^2=1.$$

所以

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

2.4 $100;\frac{1}{3};\frac{1}{10};0;\begin{cases}0, & x<100,\\ 1-\dfrac{100}{x}, & x\geqslant 100\end{cases}$ **解** 根据连续型随机变量概率密度的性质,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{100}^{+\infty}\frac{A}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{A}{x}\bigg|_{100}^{+\infty}=\frac{A}{100}=1,\quad A=100,$$

于是

$$P\{100<X\leqslant 150\}=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{100}{x}\bigg|_{100}^{150}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X\geqslant 1\,000\}=\int_{1\,000}^{+\infty}\frac{100}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{100}{x}\bigg|_{1\,000}^{+\infty}=\frac{1}{10},$$

$$P\{X=1\,000\}=0,$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<100,\\ \displaystyle\int_{100}^{x}\frac{100}{t^2}\mathrm{d}t, & x\geqslant 100\end{cases}=\begin{cases}0, & x<100,\\ 1-\dfrac{100}{x}, & x\geqslant 100.\end{cases}$$

2.5 $\frac{1}{2};\frac{1}{\pi};\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a<x<a,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\frac{1}{3}$ **解** 根据连续型随机变量分布函数的连续性,有

$$F(-a)=F(-a-0),\quad F(a)=F(a-0),$$

即有

$$\begin{cases}A+B\cdot\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\\ A+B\cdot\dfrac{\pi}{2}=1,\end{cases}$$

解得 $A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{\pi}$.

于是

$$f(x)=\begin{cases}F'(x), & -a<x<a,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a<x<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$P\left\{-\frac{a}{2}<X<\frac{a}{2}\right\}=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

或

$$P\left\{-\frac{a}{2}<X<\frac{a}{2}\right\}=F\left(\frac{a}{2}\right)-F\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\left[\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{3}.$$

2.6 **解** 在一次观测中,观测值大于3的概率为

$$p=P\{X>3\}=\int_{3}^{5}\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

记 $Y=\{3$ 次独立观测中 X 的观测值大于3的次数$\}$,由 $Y\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$ 得

$$P\{Y\geqslant 2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{20}{27}.$$

2.7 (A) **解** 所有有关正态分布不等式的判别都应先标准化,即由

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

有

$$P\left\{\frac{|X-\mu_1|}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\}>P\left\{\frac{|Y-\mu_2|}{\sigma_2}<\frac{1}{\sigma_2}\right\},$$

从而有 $$\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)>\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right).$$

又由函数 $\Phi(x)$ 的单调增加性,有 $\frac{1}{\sigma_1}>\frac{1}{\sigma_2}>0$,即 $\sigma_1<\sigma_2$,故选择(A).

2.8 $1-e^{-1}$;0 **解** $P\{0\leqslant X\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1\}-P\{X<0\}=F(1)-F(0-0)$

$$=1-e^{-1}-0=1-e^{-1};$$

$$P\{0<X<1\}=P\{X<1\}-P\{X\leqslant 0\}=F(1-0)-F(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

2.9 **解** 由 X 和 Y 同分布可得 $P(A)=P(B)$,从而

$$\frac{3}{4}=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2P(A)-[P(A)]^2,$$

由此解得 $P(A)=\frac{1}{2}$,则 $0<a<2$.又

$$\frac{1}{2}=P(A)=P\{X>a\}=\int_a^2\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}x^3\Big|_a^2=1-\frac{1}{8}a^3,$$

解得 $a=\sqrt[3]{4}$.

【注】 随机变量 X 与 Y 同分布,并不意味着 $X=Y$,反之成立,即若 $X=Y$,则 X 与 Y 同分布.

2.10 **证明** 因为 $f(x)$ 是一个偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,且 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,可得

$$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0.5.$$

又 $F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(x)\mathrm{d}x$,令 $x=-t$,则 $F(-a)=\int_{+\infty}^{a}f(t)(-\mathrm{d}t)=\int_a^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1-F(a)$.

(1) $F(-a)=\int_a^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$

$$=0.5-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) $P\{|X|<a\}=P\{-a<X<a\}=F(a-0)-F(-a)$

$=F(a)-[1-F(a)]$

$=2F(a)-1.$

(3) $P\{|X|>a\}=P\{X<-a\}+P\{X>a\}=F(-a-0)+1-F(a)$

$=1-F(a)+1-F(a)$

$=2[1-F(a)].$

2.11 **解** 由题设知 Y 为离散型随机变量,当 $X=-1$ 时,Y 取 1;当 $X=0$ 时,Y 取 1;当 $X=1$ 时,Y

取 3. 则 Y 的概率分布为

$$P\{Y=1\}=P\{X=-1\}+P\{X=0\}=\frac{2}{3},\quad P\{Y=3\}=P\{X=1\}=\frac{1}{3}.$$

故 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{2}{3}, & 1\leqslant y<3,\\ 1, & y\geqslant 3.\end{cases}$$

2.12　证明　为了证明这个结论，首先要看到 $Y=F_X(X)$ 是在区间 $(0,1)$ 上取值的随机变量，所以：

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{F_X(X)\leqslant y\}=P\{X\leqslant F_X^{-1}(y)\}=F_X[F_X^{-1}(y)]=y.$$

综上所述，$Y=F_X(X)$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$$

这就是在区间 $(0,1)$ 上的均匀分布函数，所以 $Y\sim U(0,1)$.

2.13　解　X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & -1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

记 X 的分布函数为 $F_X(x)$，先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；

当 $y\geqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P\{|X|\leqslant y\}=P\{-y\leqslant X\leqslant y\}=F_X(y)-F_X(-y)$.

将 $F_Y(y)$ 关于 y 求导可得 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(y)+f_X(-y), & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $0\leqslant y<1$ 时，$-1<-y\leqslant 0$，因而 $f_X(y)=\frac{1}{3}$，$f_X(-y)=\frac{1}{3}$，此时

$$f_Y(y)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3};$$

当 $1\leqslant y<2$ 时，$-2<-y\leqslant -1$，因而 $f_X(y)=\frac{1}{3}$，$f_X(-y)=0$，此时

$$f_Y(y)=\frac{1}{3};$$

当 $y\geqslant 2$ 时，$-y\leqslant -2$，因而 $f_X(y)=0$，$f_X(-y)=0$，此时 $f_Y(y)=0$. 故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}, & 0\leqslant y<1,\\ \dfrac{1}{3}, & 1\leqslant y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

2.14 解 (1)由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{1+x^2}\mathrm{d}x = k\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = k\pi = 1,$$

因此 $k=\frac{1}{\pi}$.

(2)X 的概率密度为 $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $(x\in\mathbf{R})$. 随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\sqrt[3]{X}\leqslant y\}=P\{X\geqslant(1-y)^3\}\\&=\int_{(1-y)^3}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{(1-y)^3}^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(1-y)^3\right]\ (y\in\mathbf{R}),\end{aligned}$$

由此可得 $Y=1-\sqrt[3]{X}$的概率密度为 $f_Y(y)=F'_Y(y)=\frac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}$ $(y\in\mathbf{R})$.

2.15 解 (1)由题设知,$P\{1\leqslant Y\leqslant 2\}=1$. 记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$,则

当 $y<1$ 时,$F_Y(y)=0$;

当 $y\geqslant 2$ 时,$F_Y(y)=1$;

当 $1\leqslant y<2$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\leqslant y\}\\&=P\{X\geqslant 2\}+P\{1<X\leqslant y\}=\int_2^3\frac{x^2}{9}\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{x^2}{9}\mathrm{d}x=\frac{y^3+18}{27}.\end{aligned}$$

所以 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \frac{y^3+18}{27}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

(2)$P\{X\leqslant Y\}=P\{X<2\}=\int_0^2\frac{x^2}{9}\mathrm{d}x=\frac{8}{27}$.

第3讲 多维随机变量及其分布

基础知识结构

- 二维（n维）随机变量
  - 概念
  - 联合分布函数
    - 概念
    - 性质
  - 边缘分布函数
- 二维离散型随机变量
  - 联合分布律
  - 边缘分布律
  - 条件分布律
- 二维连续型随机变量
  - 联合概率密度
  - 边缘概率密度
  - 条件概率密度
  - 二维均匀分布
  - 二维正态分布
- 独立性
  - 概念
  - 相互独立的充要条件
    - $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$
    - $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$
    - $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
  - 性质
- 函数的分布
  - （离散型，离散型）→离散型
  - （连续型，连续型）→连续型
    - 分布函数法
    - 卷积公式
  - （离散型，连续型）→连续型
    - 全概率公式

基础内容精讲

一、二维(n 维)随机变量及其分布函数

1. 多维随机变量的概念

如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是定义在同一个样本空间Ω 上的 n 个随机变量,则称$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为**n 维随机变量**或 **n 维随机向量**,$X_i(i=1,2,\cdots,n)$称为第 i 个分量.

当 $n=2$ 时,记(X,Y)为**二维随机变量**或**二维随机向量**.

2. 多维随机变量的分布函数的概念和性质

(1)概念.

对任意的 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,称 n 元函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\}$$

为 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的**联合分布函数**.

当 $n=2$ 时,则对任意的实数 x,y,称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$$

为二维随机变量(X,Y)的**联合分布函数**,简称**分布函数**,记为$(X,Y)\sim F(x,y)$.

【注】 注意 $F(x,y)$是事件 $A=\{X\leqslant x\}$与 $B=\{Y\leqslant y\}$同时发生的概率,因此 $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$.更为重要的是,可以利用概率及其有关的性质、公式求分布函数及讨论分布函数的性质,等等.

(2)性质.

①**单调性** $F(x,y)$是 x,y 的单调不减函数:

对任意固定的 y,当 $x_1<x_2$ 时,$F(x_1,y)\leqslant F(x_2,y)$;

对任意固定的 x,当 $y_1<y_2$ 时,$F(x,y_1)\leqslant F(x,y_2)$.

②**右连续性** $F(x,y)$是 x,y 的右连续函数:

$$\lim_{x\to x_0^+}F(x,y)=F(x_0+0,y)=F(x_0,y);$$

$$\lim_{y\to y_0^+}F(x,y)=F(x,y_0+0)=F(x,y_0).$$

③**有界性** $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0,F(+\infty,+\infty)=1$.

④**非负性** 对任意 $x_1<x_2,y_1<y_2$,有

$$P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\geqslant 0.$$

3. 边缘分布函数

设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为 $F(x,y)$,随机变量 X 与 Y 的分布函数 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$ 分别称为(X,Y)关于 X 和关于 Y 的**边缘分布函数**.由概率性质得

$$\begin{aligned}F_X(x)&=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y<+\infty\}\\&=\lim_{y\to+\infty}P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}\\&=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=F(x,+\infty).\end{aligned}$$

同理，有 $F_Y(y)=F(+\infty,y)$.

二、常见的两类二维随机变量——离散型随机变量与连续型随机变量

（一）二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布

1. 概率分布

(1)如果二维随机变量(X,Y)只能取有限对值或可列对值$(x_1,y_1),(x_1,y_2),\cdots,(x_n,y_n),\cdots$，则称$(X,Y)$为**二维离散型随机变量**.

称
$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\},i,j=1,2,\cdots$$
为(X,Y)的**分布律**或随机变量 X 和 Y 的**联合分布律**，记为$(X,Y)\sim p_{ij}$. 联合分布律常用表格形式表示.

X \ Y	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X=x_i\}$
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P\{Y=y_j\}$	$p_{\cdot 1}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

(2)数列$\{p_{ij}\},i,j=1,2,\cdots$是某一二维离散型随机变量的概率分布的充分必要条件为
$$p_{ij}\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1.$$

2. 联合分布函数、边缘分布、条件分布

(1)联合分布函数.

设(X,Y)的概率分布为 $p_{ij},i,j=1,2,\cdots$，则(X,Y)的**联合分布函数**为
$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\sum_{x_i\leqslant x}\sum_{y_j\leqslant y}p_{ij}.$$

【注】 它是以(x,y)为顶点的左下角平面上(X,Y)取所有可能值的概率的和.

设 G 是平面上的某个区域，则
$$P\{(X,Y)\in G\}=\sum_{(x_i,y_j)\in G}p_{ij}.$$

【注】 (X,Y)落入 G 的概率等于(X,Y)在 G 内取所有可能值的概率的和. 这是计算概率、求随机变量分布函数的重要公式.

(2)边缘分布.

X,Y 的边缘分布分别为
$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}(i=1,2,\cdots);$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\,(j=1,2,\cdots).$$

(3)条件分布.

如果$(X,Y)\sim p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$,对固定的$j$,如果$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}>0$,则称

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\ (i=1,2,\cdots)$$

为X在"$Y=y_j$"条件下的**条件分布**.

同理,对固定的i,如果$p_{i\cdot}>0$,可定义Y在"$X=x_i$"条件下的条件分布

$$P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\ (j=1,2,\cdots).$$

(二)二维连续型随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件概率密度

1. 概率密度

(1)概念.

如果二维随机变量(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$可以表示为

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,(x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

其中$f(x,y)$是非负可积函数,则称(X,Y)为**二维连续型随机变量**,称$f(x,y)$为(X,Y)的**概率密度**,记为$(X,Y)\sim f(x,y)$.

(2)二元函数$f(x,y)$是概率密度的充分必要条件为

$$f(x,y)\geqslant 0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$$

【注】 改变$f(x,y)$的有限个点的值(仍取非负值),$f(x,y)$仍然是概率密度.

2. 联合分布函数与概率密度、边缘概率密度、条件概率密度

(1)联合分布函数与概率密度.

设(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$,概率密度为$f(x,y)$,则

①$F(x,y)$为(x,y)的二元连续函数,且

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v;$$

②设G为平面上某个区域,则

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

【注】 这是计算概率、求随机变量分布函数的依据.

③若$f(x,y)$在点(x,y)处连续,则$\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$;

④若$F(x,y)$连续且可导,则(X,Y)是连续型随机变量,且$\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$是它的概率密度.

(2)边缘概率密度.

设$(X,Y)\sim f(x,y)$,则X的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u,$$

所以 X 是连续型随机变量,其概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

称 $f_X(x)$为(X,Y)关于 X 的**边缘概率密度**.

同理,Y 也是连续型随机变量,其概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(3)条件概率密度.

设$(X,Y)\sim f(x,y)$,边缘概率密度 $f_X(x)>0$,则称

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

为 Y 在"$X=x$"条件下的**条件概率密度**.

同理可定义 X 在"$Y=y$"条件下的条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\ (f_Y(y)>0).$$

由以上讨论可知,若 $f_X(x)>0,f_Y(y)>0$,则有概率密度乘法公式

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)f_{X|Y}(x|y).$$

【注】 称 $$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\mathrm{d}y$$

为 Y 在"$X=x$"条件下的**条件分布函数**.

同理可定义 X 在"$Y=y$"条件下的条件分布函数

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x.$$

3. 常见的二维分布

(1)二维均匀分布.

称(X,Y)在平面有界区域 D 上服从**均匀分布**,如果(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 S_D 为区域 D 的面积.

(2)二维正态分布.

如果(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},$$

其中 $\mu_1\in\mathbf{R},\mu_2\in\mathbf{R},\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$,则称$(X,Y)$服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的**二维正态分布**,记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$. 此时有

①$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,$\rho$ 为 X 与 Y 的相关系数,即

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}.$$

②X,Y 的条件分布都是正态分布.

③$aX+bY(a\neq0$ 或 $b\neq0)$服从正态分布.

④X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 X 与 Y 不相关,即 $\rho=0$.

三、随机变量的相互独立性

1. 概念

(1)设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为 $F(x,y)$,边缘分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$,如果对任意的实数 x,y 都有

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)(\text{即事件}\{X\leqslant x\}\text{与}\{Y\leqslant y\}\text{相互独立}),$$

则称 X 与 Y **相互独立**,否则称 X 与 Y **不相互独立**.

(2)如果 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数等于边缘分布函数的乘积,即

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_1(x_1)\cdot F_2(x_2)\cdot\cdots\cdot F_n(x_n),$$

其中 $F_i(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$为 X_i 的边缘分布函数,x_i 为任意实数,则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ **相互独立**.

(3)随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立,如果对任意 $k(k\geqslant2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_k$ 相互独立.

(4)两个多维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$相互独立,如果对任意实数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$与$y_j(j=1,2,\cdots,m)$有

$$P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n;Y_1\leqslant y_1,Y_2\leqslant y_2,\cdots,Y_m\leqslant y_m\}$$
$$=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\}\cdot P\{Y_1\leqslant y_1,Y_2\leqslant y_2,\cdots,Y_m\leqslant y_m\},$$

即联合分布函数等于各自的分布函数相乘:

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot F_2(y_1,y_2,\cdots,y_m).$$

2. 相互独立的充要条件

(1) n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立

$\Leftrightarrow$对任意的 n 个实数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$,n 个事件$\{X_1\leqslant x_1\},\{X_2\leqslant x_2\},\cdots,\{X_n\leqslant x_n\}$相互独立.

(2)①设(X,Y)为二维离散型随机变量,则 X 与 Y 相互独立

$\Leftrightarrow$联合分布等于边缘分布相乘,即

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}(i,j=1,2,\cdots).$$

②n 个离散型随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立

$\Leftrightarrow$对任意的 $x_i\in D_i=\{X_i$ 的一切可能值$\}(i=1,2,\cdots,n)$,有

$$P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}.$$

(3)①设(X,Y)为二维连续型随机变量,则 X 与 Y 相互独立

$\Leftrightarrow$概率密度等于边缘概率密度相乘,即

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

②设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为 n 维连续型随机变量,则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立

$\Leftrightarrow$概率密度等于边缘概率密度相乘，即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\cdot\cdots\cdot f_n(x_n),$$

其中 $f_i(x_i)$ 为 X_i 的边缘概率密度.

3. 相互独立的性质

(1)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个随机变量也相互独立.

(2)①设(X,Y)为二维离散型随机变量，X 与 Y 独立，则条件分布等于边缘分布：

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=P\{X=x_i\}(P\{Y=y_j\}>0),$$
$$P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=P\{Y=y_j\}(P\{X=x_i\}>0).$$

②设(X,Y)为二维连续型随机变量，X 与 Y 独立，则条件概率密度等于边缘概率密度：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_X(x)(f_Y(y)>0),$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=f_Y(y)(f_X(x)>0).$$

(3)若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，$g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$ 为一元连续函数，则 $g_1(X_1),g_2(X_2),\cdots,g_n(X_n)$相互独立.

一般地，若 $X_{11},\cdots,X_{1t_1},X_{21},\cdots,X_{2t_2},\cdots,X_{n1},\cdots,X_{nt_n}$ 相互独立，g_i 是 $t_i(i=1,2,\cdots,n)$元连续函数，则 $g_1(X_{11},\cdots,X_{1t_1}),g_2(X_{21},\cdots,X_{2t_2}),\cdots,g_n(X_{n1},\cdots,X_{nt_n})$也相互独立.

四、多维随机变量函数的分布

1. 概念

设 X,Y 为随机变量，$g(x,y)$是二元函数，则以随机变量 X,Y 作为变量的函数 $U=g(X,Y)$也是随机变量，称之为**随机变量 X,Y 的函数**. 例如：$U=X+Y,U=\begin{cases}1, & X<Y,\\ 0, & X\geqslant Y\end{cases}$ 等等.

问题：已知(X,Y)的联合分布，求 $U=g(X,Y)$的分布；又 $V=h(X,Y)$，求(U,V)的联合分布.

2. 求法

已知(X,Y)的联合分布，求函数 $Z=g(X,Y)$的分布. 首先要确定 X,Y 的类型，而后采用相应的公式计算.

(1)如果(X,Y)是二维离散型随机变量，则 $Z=g(X,Y)$也是离散型的，先确定 Z 的值，而后求其相应的概率，用一般解题模式(矩阵法)即可求得 Z 的分布，具体见下面的注例及例 3.10.

(2)如果 X,Y 其中一个是离散型的，另一个是非离散型的，我们总是将事件对离散型的一切可能值进行全集分解，而后应用全概率公式求得 Z 的分布，具体见例 3.11.

(3)如果(X,Y)是二维连续型随机变量，即$(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $Z=g(X,Y)$的分布函数

$$F(z)=P\{g(X,Y)\leqslant z\}=\iint\limits_{g(x,y)\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

要求概率密度 $f(z)$，亦可直接用下面的“3. 相互独立随机变量函数的分布及卷积公式”中所讲公式，具体见例 3.12，例 3.13，例 3.14.

注例 已知(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{6}$

(1)求 $Z=X-Y$ 的概率分布;

(2)设 $U_1=XY, V_1=\frac{X}{Y}$,求(U_1,V_1)的概率分布;

(3)设 $U_2=\max\{X,Y\}, V_2=\min\{X,Y\}$,求$(U_2,V_2)$的概率分布,$U_2V_2$ 的概率分布.

解 由题设得

p_{ij}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
(X,Y)	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,-1)$	$(0,1)$	$(1,-1)$	$(1,1)$
$Z=X-Y$	0	-2	1	-1	2	0
$U_1=XY$	1	-1	0	0	-1	1
$V_1=X/Y$	1	-1	0	0	-1	1
$U_2=\max\{X,Y\}$	-1	1	0	1	1	1
$V_2=\min\{X,Y\}$	-1	-1	-1	0	-1	1
U_2V_2	1	-1	0	0	-1	1

(1)由上表可得 $Z=X-Y$ 的概率分布为

$Z=X-Y$	-2	-1	0	1
$P\{Z=k\}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(2)(U_1,V_1)的概率分布为

$U_1 \backslash V_1$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	0	0
0	0	$\frac{1}{2}$	0
1	0	0	$\frac{1}{3}$

(3) (U_2,V_2) 的概率分布为

U_2 \ V_2	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	0	0
0	$\frac{1}{3}$	0	0
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

U_2V_2 的概率分布为

U_2V_2	-1	0	1
$P\{U_2V_2=k\}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

3. 相互独立随机变量函数的分布及卷积公式

(1)和的分布.

设 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y.$$

【注1】 证明 按照定义，如图 3-1 所示，

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{D:x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)\mathrm{d}x,$$

于是 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\right\}_z'\overset{(*)}{=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)\mathrm{d}x\right]_z'\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y.$$

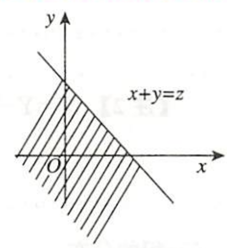


图 3-1

(*)处将先积分再求导的运算顺序交换，成了先求导再积分，可以证明(这里不证)，这是成立的.

同理，若 $$F_Z(z)=\iint\limits_{D:x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

于是 $$f_Z(z)=F_Z'(z)=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\right\}_z'=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)\mathrm{d}y\right]_z'\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x.$$

【注2】 当 X 与 Y 相互独立时，有卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

(2)差的分布.

设$(X,Y)\sim f(x,y)$,则 $Z=X-Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y+z,y)\mathrm{d}y\xlongequal{\text{独立}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(y+z)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

【注1】 **证明** 按照定义,如图3-2所示,

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X-Y\leqslant z\}=\iint\limits_{D:x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z+y}f(x,y)\mathrm{d}x,$$

于是

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z+y}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\right\}'_z$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z+y}f(x,y)\mathrm{d}x\right]'_z\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z+y,y)\mathrm{d}y.$$

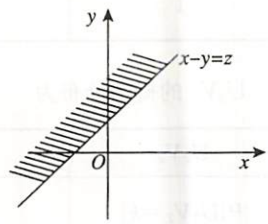


图 3-2

同理,若 $F_Z(z)=\iint\limits_{D:x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x-z}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$,

于是

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{x-z}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\right\}'_z$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{x-z}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right]'_z\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[-f(x,x-z)\cdot(-1)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)\mathrm{d}x.$$

【注2】 $Z=Y-X$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x+z)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{独立}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(x+z)\mathrm{d}x.$$

(3)积的分布.

设$(X,Y)\sim f(x,y)$,则 $Z=XY$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f\left(\frac{z}{y},y\right)\mathrm{d}y.$$

【注1】 **证明** 按照定义,如图3-3所示,

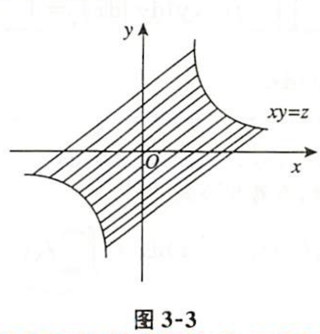


图 3-3

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\}=\iint\limits_{D:xy\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}x\int_{\frac{z}{x}}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f(x,y)\mathrm{d}y,$$

于是
$$\begin{aligned} f_Z(z)=F'_Z(z)&=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{\frac{z}{x}}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right]'_z\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f(x,y)\mathrm{d}y\right]'_z\mathrm{d}x \\ &=\int_{-\infty}^{0}\left[-f\left(x,\frac{z}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}\left[f\left(x,\frac{z}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x \\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

同理可证后一等号.

【注2】 当 X 与 Y 独立时,有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

(4)商的分布.

设$(X,Y)\sim f(x,y)$,则 $Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)\mathrm{d}y.$$

【注1】 **证明** 按照定义,如图 3-4 所示,

$$\begin{aligned} F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\left\{\frac{X}{Y}\leqslant z\right\}&=\iint\limits_{D:\frac{x}{y}\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \\ &=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{zy}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{zy} f(x,y)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

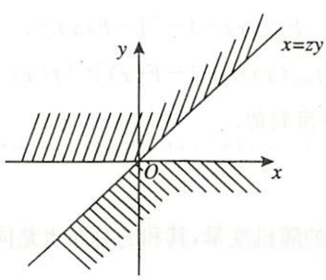


图 3-4

于是
$$\begin{aligned} f_Z(z)=F'_Z(z)&=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{zy}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right]'_z\mathrm{d}y+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{zy} f(x,y)\mathrm{d}x\right]'_z\mathrm{d}y \\ &=\int_{-\infty}^{0}[-f(zy,y)\cdot y]\mathrm{d}y+\int_{0}^{+\infty}[f(zy,y)\cdot y]\mathrm{d}y \\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

【注 2】 当 X 与 Y 独立时，有 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)\mathrm{d}y$.

(5) $\max\{X,Y\}$ 分布.

设 $(X,Y)\sim F(x,y)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z)=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=F(z,z).$$

当 X 与 Y 独立时，

$$F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z).$$

(6) $\min\{X,Y\}$ 分布.

设 $(X,Y)\sim F(x,y)$，则 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_{\min}(z)&=P\{\min\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{\{X\leqslant z\}\cup\{Y\leqslant z\}\}\\&=P\{X\leqslant z\}+P\{Y\leqslant z\}-P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}\\&=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z).\end{aligned}$$

当 X 与 Y 独立时，

$$\begin{aligned}F_{\min}(z)&=F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z)F_Y(z)\\&=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].\end{aligned}$$

【注】 上述结果容易推广到 n 个相互独立的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的情况，即

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)].$$

特别地，当 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立且有相同的分布函数 $F(x)$ 与概率密度 $f(x)$ 时，

$$F_{\max}(x)=[F(x)]^n,$$

$$f_{\max}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x).$$

$$F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^n,$$

$$f_{\min}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x).$$

这些结果在数理统计部分是要用到的.

(7) 常见分布的可加性.

有些相互独立且服从同类型分布的随机变量，其和的分布也是同类型的，它们是二项分布、泊松分布、正态分布与 χ^2 分布.

设随机变量 X 与 Y 相互独立，则：

若 $X\sim B(n,p),Y\sim B(m,p)$，则 $X+Y\sim B(n+m,p)$（注意 p 相同）；

若 $X\sim P(\lambda_1),Y\sim P(\lambda_2)$，则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$；

若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$；

若 $X\sim \chi^2(n),Y\sim \chi^2(m)$，则 $X+Y\sim \chi^2(n+m)$.

【注】 上述结果对 n 个相互独立的随机变量也成立.

基础例题精解

一、联合分布、边缘分布、条件分布和独立性的概念、性质及其相互转化

1. 联合分布、边缘分布、条件分布之间的相互转化

已知(X,Y)的联合分布(联合分布函数$F(x,y)$、联合分布p_{ij}、概率密度$f(x,y)$),可以确定边缘分布(边缘分布函数、边缘分布、边缘概率密度)与条件分布(条件分布、条件概率密度),其转换公式为

(1)已知$(X,Y)\sim F(x,y)$,则$F_X(x)=F(x,+\infty)$,$F_Y(y)=F(+\infty,y)$.

(2)已知$(X,Y)\sim p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$,则

$$F(x,y)=\sum_{x_i\leqslant x}\sum_{y_j\leqslant y}p_{ij},$$

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}.$$

条件分布:
$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}(p_{\cdot j}>0),$$

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}(p_{i\cdot}>0).$$

(3)已知$(X,Y)\sim f(x,y)$,则

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

若$f(x,y)$在点(x,y)处连续,则$\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

条件概率密度:
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}(f_Y(y)>0),$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}(f_X(x)>0).$$

反之,仅知边缘分布,不可确定联合分布.若再附加某些其他条件,如概率、独立性、某些数字特征等,则有可能确定联合分布.

2. X与Y相互独立的充要条件

(1)对任意实数x,y,

事件$A=\{X\leqslant x\}$,事件$B=\{Y\leqslant y\}$相互独立$\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$.

(2)若(X,Y)为二维离散型随机变量,则

X与Y独立$\Leftrightarrow P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$

$\Leftrightarrow$若 $P\{Y=y_j\}>0$,则 $P\{X=x_i|Y=y_j\}=P\{X=x_i\}$.

(3)若(X,Y)为二维连续型随机变量,则

$$X\text{ 与 }Y\text{ 独立}\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\Leftrightarrow f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_X(x)\,(f_Y(y)>0).$$

(4)若(X,Y)服从二维正态分布,则 X 与 Y 独立$\Leftrightarrow X$ 与 Y 不相关.

3. X 与 Y 不独立的判断与证明

X 与 Y 不独立$\Leftrightarrow$存在 x_0,y_0,使 $A=\{X\leqslant x_0\}$与 $B=\{Y\leqslant y_0\}$不独立,即

$$F(x_0,y_0)\neq F_X(x_0)F_Y(y_0).$$

因此证明不独立的常用方法:求 x_0,y_0,使 $0<P\{X\leqslant x_0\},P\{Y\leqslant y_0\}<1$,

$$\{X\leqslant x_0\}\subset\{Y\leqslant y_0\}\text{或}\{Y\leqslant y_0\}\subset\{X\leqslant x_0\}\text{或}\{X\leqslant x_0,Y\leqslant y_0\}\neq\varnothing.$$

(1)当(X,Y)为离散型时,

$$X\text{ 与 }Y\text{ 不独立}\Leftrightarrow\text{ 存在 }x_0,y_0\text{,使 }P\{X=x_0,Y=y_0\}\neq P\{X=x_0\}P\{Y=y_0\}.$$

【注】 二维离散型随机变量的独立性的讨论主要是在掌握两随机变量的联合分布和边缘分布的基础上进行的,主要验证其中只要有一项不成立,则独立性不成立,同时要注意两随机变量不相关未必独立,独立必不相关.

(2)二维连续型随机变量的独立性讨论主要看概率密度或分布函数是否满足

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\text{或}F(x,y)=F_X(x)F_Y(y).$$

【注】 作为特殊类型,若(X,Y)服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$,则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$. 但此结论不具一般性,即一般情况下,不相关未必独立.

例 3.1 设 X 与 Y 相互独立,下表是随机变量 X 与 Y 的联合分布律以及两个边缘分布律中的部分数值,试将其余数值填入表中空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$			1

解 由于 X 与 Y 相互独立,有

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}\,(i=1,2;j=1,2,3).$$

由边缘分布的性质,有

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{3}p_{ij},\quad p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{2}p_{ij},$$

于是

$$p_{11}=p_{\cdot 1}-p_{21}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24},$$

$$p_{1\cdot}=\frac{p_{11}}{p_{\cdot 1}}=\frac{1}{24}\div\frac{1}{6}=\frac{1}{4},\quad p_{2\cdot}=1-p_{1\cdot}=\frac{3}{4},$$

$$p_{\cdot 2}=\frac{p_{12}}{p_{1\cdot}}=\frac{1}{8}\div\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\quad p_{\cdot 3}=1-p_{\cdot 1}-p_{\cdot 2}=\frac{1}{3},$$

$$p_{22}=p_{\cdot 2}p_{2\cdot}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8},\quad p_{13}=p_{\cdot 3}p_{1\cdot}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12},$$

$$p_{23}=p_{\cdot 3}p_{2\cdot}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

因此所得数值填空如下表：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1	$\boldsymbol{\frac{1}{24}}$	$\frac{1}{8}$	$\boldsymbol{\frac{1}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{4}}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\boldsymbol{\frac{3}{8}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{3}{4}}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	1

例 3.2 二维随机变量(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则(   ).

(A)$a=0.2,b=0.3$　　(B)$a=0.1,b=0.4$

(C)$a=0.3,b=0.2$　　(D)$a=0.4,b=0.1$

解 应选(D).

由联合分布、边缘分布及条件分布的性质，有

$$P\{X=0\}=p_{11}+p_{12}=0.4+a,$$
$$P\{X+Y=1\}=p_{12}+p_{21}=a+b,$$
$$p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22}=a+b+0.5=1\Rightarrow a+b=0.5,$$
$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a.$$

又$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，有

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}\cdot P\{X+Y=1\}$$
$$=(0.4+a)(a+b)=0.5(0.4+a).$$

因此$0.5(0.4+a)=a$，解得$a=0.4,b=0.5-0.4=0.1$，故选择(D).

例 3.3 设二维随机变量(X_1,Y_1)和(X_2,Y_2)的概率密度分别为$f_1(x,y)$与$f_2(x,y)$，令

$$f(x,y)=af_1(x,y)+bf_2(x,y),$$

若 $f(x,y)$ 是某个二维连续型随机变量的概率密度，则 a,b 满足条件（　　）.

(A) $a+b=1$　　　　(B) $a>0$ 且 $b>0$

(C) $0\leqslant a\leqslant 1, 0\leqslant b\leqslant 1$　　　　(D) $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ 且 $a+b=1$

解　应选(D).

函数 $f(x,y)$ 为某个二维连续型随机变量的概率密度的充分必要条件是

$$f(x,y)\geqslant 0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=1,$$

即同时有

$$f(x,y)=af_1(x,y)+bf_2(x,y)\geqslant 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=a\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x,y)\mathrm{d}y+b\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x,y)\mathrm{d}y=a+b=1,$$

故选择(D).

例 3.4　设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,4)$，$Y\sim N(1,9)$，则二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为________，随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度为________.

解　应填 $\frac{1}{12\pi}e^{-\frac{x^2}{8}-\frac{(y-1)^2}{18}}$；$\frac{1}{\sqrt{26\pi}}e^{-\frac{(z-1)^2}{26}}$.

由题设，X,Y 的概率密度分别为

$$f_1(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}},\quad f_2(y)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2\cdot 3^2}},$$

则在 X,Y 相互独立的条件下，(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2\cdot 3^2}}=\frac{1}{12\pi}e^{-\frac{x^2}{8}-\frac{(y-1)^2}{18}}.$$

又 $\xi=X\pm Y\sim N(0\pm 1,4+9)$，因此 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{26\pi}}e^{-\frac{(z-1)^2}{26}}.$$

例 3.5　已知二维随机变量 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布，G 由直线 $x-y=0$，$x+y=2$ 与 $y=0$ 围成，求：

(1) 边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；

(2) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解　(X,Y) 的正概率密度区域如图 3-5 所示.

由题设，(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1, y\leqslant x\leqslant 2-y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

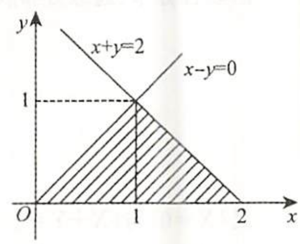


图 3-5

(1)　$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 1\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ \int_0^{2-x}1\mathrm{d}y, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ 2-x, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^{2-y}1\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2-2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 在 $0<y<1$ 的条件下，条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{2-2y},$$

所以
$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y}, & 0<y<1, y\leqslant x\leqslant 2-y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3.6 已知随机变量 X 在区间[0,1]上服从均匀分布，在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $[0,x]$ 上服从均匀分布，求：

(1)(X,Y)的概率密度；

(2)Y 的概率密度；

(3)概率 $P\{X+Y>1\}$.

解　(1)由题设，X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $[0,x]$ 上的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

因此，当 $0<y<x<1$ 时，$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{1}{x}$，故$(X,Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2)(X,Y)的概率密度的正概率密度区域如图 3-6 所示.

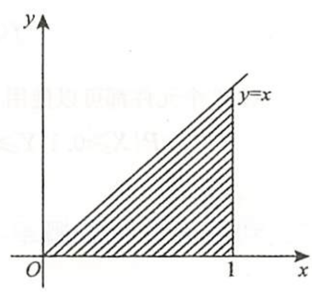


图 3-6

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_y^1\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=-\ln y$；

当 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 1$ 时，$f_Y(y)=0$.

从而有

$$f_Y(y)=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3)$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^x\dfrac{1}{x}\mathrm{d}y=1-\ln 2.$

【注】 第(1)问中，当 $f_X(x)>0$ 时，才有 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$，所以 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)$ 是在 $f_X(x)>0$ 时的表达式，故最终结果要加上 $f_X(x)=0$ 时的定义，一般说来，在分段表达式的“其他”中也就定义全面了.

例 3.7 设随机变量 X 与 Y 分别表示两个电子元件的寿命(千小时),已知 X,Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)判断 X 与 Y 的独立性;

(2)求二维随机变量 (X,Y) 的概率密度;

(3)求 2 个元件都可以使用 100 个小时的概率.

解 (1)**方法一** 先计算 X 与 Y 的边缘分布函数.

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$,所以 X 与 Y 相互独立.

方法二 先计算 X 与 Y 的联合概率密度和边缘概率密度.

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}0.25e^{-0.5(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}0.5e^{-0.5x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}0.5e^{-0.5y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,所以 X 与 Y 相互独立.

(2)由(1)方法二已求得二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}0.25e^{-0.5(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3)2 个元件都可以使用 100 个小时的概率为

$$P\{X\geqslant 0.1,Y\geqslant 0.1\}=P\{X\geqslant 0.1\}P\{Y\geqslant 0.1\}=[1-F_X(0.1)][1-F_Y(0.1)]=e^{-0.1}.$$

二、利用分布计算概率(求与二维随机变量相关事件的概率)

(1)计算公式.

设 D 为平面上的某个区域,则

$$P\{(X,Y)\in D\}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{(x_i,y_j)\in D}P\{X=x_i,Y=y_j\}, & (X,Y)\sim p_{ij},\\ \displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & (X,Y)\sim f(x,y).\end{cases}$$

特别地,

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\begin{cases}\sum\limits_{x_i\leqslant x,y_j\leqslant y}P\{X=x_i,Y=y_j\}, & (X,Y)\sim p_{ij},\\ \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & (X,Y)\sim f(x,y).\end{cases}$$

(2)计算步骤.

①确定随机变量的类型,写出 $p_{ij}>0$ 或画出 $f(x,y)\neq 0$ 的区域 G.

②画出求和或求积分的区域 D.

③在 $D\cap G$ 上计算二重和值或二重积分值.

【注】 对不同 x,y 要将二重积分(二重求和)化为累次积分(累次求和)进行计算.

例 3.8 设随机变量 X,Y 相互独立,且均服从标准正态分布 $N(0,1)$,则(　　).

(A) $P\{X+Y\geqslant 1\}=\frac{1}{2}$　　(B) $P\{X-Y\geqslant 1\}=\frac{1}{2}$

(C) $P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=\frac{1}{4}$　　(D) $P\{\min\{X,Y\}\geqslant 0\}=\frac{1}{4}$

解 应选(D).

因为 X,Y 相互独立,且均服从标准正态分布 $N(0,1)$,所以 $U=X+Y\sim N(0,2)$, $V=X-Y\sim N(0,2)$,排除(A),(B). 又

$$P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=1-P\{\max\{X,Y\}<0\}=1-P\{X<0,Y<0\}=\frac{3}{4},$$

$$P\{\min\{X,Y\}\geqslant 0\}=P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{1}{4},$$

故应选择(D).

例 3.9 已知随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求常数 A,并计算概率 $P\{X+Y\geqslant 1\}$, $P\left\{\frac{X}{Y}\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

解 由于

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x}^{+\infty}Ae^{-y}\mathrm{d}y=A\int_{0}^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=A,$$

因此 $A=1$.

$$\begin{aligned}P\{X+Y\geqslant 1\}&=1-P\{X+Y<1\}=1-\iint\limits_{x+y<1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=1-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x}^{1-x}e^{-y}\mathrm{d}y=1-\int_{0}^{\frac{1}{2}}(e^{-x}-e^{x-1})\mathrm{d}x\\&=1-(1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}})=2e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1},\end{aligned}$$

积分区域如图 3-7 中阴影部分所示.

$$P\left\{\frac{X}{Y}\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\iint\limits_{\frac{x}{y}\leqslant\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{2x}^{+\infty}e^{-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2},$$

积分区域如图 3-8 中阴影部分所示.

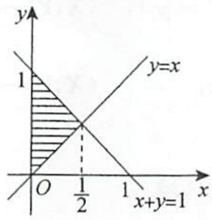


图 3-7

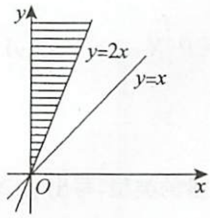


图 3-8

三、求函数的分布

例 3.10 将两封信投入 3 个信箱，设 X_1,X_2 分别表示第一个和第二个信箱投进的信的数量，求：

(1)(X_1,X_2)的联合分布、边缘分布，并判断 X_1 与 X_2 的独立性；

(2)在条件 $X_2=1$ 下，X_1 的条件分布；

(3)随机变量 $Y_1=X_1+X_2$ 和 $Y_2=X_1-X_2$ 的分布.

解 (1)X_1 与 X_2 可能取值为 0,1,2，样本点总数为 $3^2=9$，则

$$p_{00}=P\{X_1=0,X_2=0\}=\frac{1}{9},\quad p_{01}=P\{X_1=0,X_2=1\}=\frac{2}{9},$$

$$p_{02}=P\{X_1=0,X_2=2\}=\frac{1}{9},\quad p_{10}=P\{X_1=1,X_2=0\}=\frac{2}{9},$$

$$p_{11}=P\{X_1=1,X_2=1\}=\frac{2}{9},\quad p_{12}=P\{X_1=1,X_2=2\}=0,$$

$$p_{20}=P\{X_1=2,X_2=0\}=\frac{1}{9},\quad p_{21}=p_{22}=0,$$

于是(X_1,X_2)的联合分布为

X_1 \ X_2	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

因为 $p_{00}\neq p_{\cdot 0}\cdot p_{0\cdot}$，所以 X_1 与 X_2 不相互独立.

(2) $$P\{X_1=0|X_2=1\}=\frac{p_{01}}{p_{\cdot 1}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{2},\quad P\{X_1=1|X_2=1\}=\frac{p_{11}}{p_{\cdot 1}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X_1=2|X_2=1\}=0,$$

所以在条件 $X_2=1$ 下，X_1 的条件分布为$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

(3) $Y_1=X_1+X_2$ 的可能取值为 0,1,2,于是

$$P\{Y_1=0\}=p_{00}=\frac{1}{9},\quad P\{Y_1=1\}=p_{01}+p_{10}=\frac{4}{9},\quad P\{Y_1=2\}=p_{02}+p_{11}+p_{20}=\frac{4}{9},$$

从而有
$$Y_1\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

又 $Y_2=X_1-X_2$ 的可能取值为 $-2,-1,0,1,2$,于是

$$P\{Y_2=-2\}=p_{02}=\frac{1}{9},\quad P\{Y_2=-1\}=p_{01}=\frac{2}{9},\quad P\{Y_2=0\}=p_{00}+p_{11}=\frac{1}{3},$$

$$P\{Y_2=1\}=p_{10}=\frac{2}{9},\quad P\{Y_2=2\}=p_{20}=\frac{1}{9},$$

从而有
$$Y_2\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}.$$

【注】 随机变量 $Y_1=X_1+X_2$ 的概率取值恰好为 (X_1,X_2) 的联合分布中平行于副对角线连线上的元素之和(见分布表),随机变量 $Y_2=X_1-X_2$ 的概率取值恰好为 (X_1,X_2) 的联合分布中平行于主对角线连线上的元素之和(见分布表),很有规律.

例 3.11 设随机变量 X 与 Y 相互独立,其中 X 的概率分布为 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$,而 Y 的概率密度为 $f(y)$,求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$.

解 本题 X 是离散型随机变量,Y 是连续型随机变量,在独立条件下,$U=X+Y$ 仍然是连续型随机变量,求其概率密度,应先从求分布函数入手. 由全概率公式有

$$\begin{aligned}G(u)&=P\{U\leqslant u\}=P\{X+Y\leqslant u\}\\&=P\{X=1\}P\{X+Y\leqslant u\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{X+Y\leqslant u\mid X=2\}\\&=0.3P\{Y\leqslant u-1\}+0.7P\{Y\leqslant u-2\}=0.3F(u-1)+0.7F(u-2).\end{aligned}$$

故 U 的概率密度为 $\quad g(u)=G'(u)=0.3f(u-1)+0.7f(u-2).$

【注】 本题给出应用全概率公式讨论一个离散型随机变量与一个连续型随机变量之和的分布问题的方法,不论是计算概率还是求随机变量的分布,我们常常都是这样处理的,它具有一般性,请读者务必注意.

例 3.12 设随机变量 X,Y 相互独立,它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)求 (X,Y) 的概率密度;

(2)求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 (1)由于 X,Y 相互独立,(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2ye^{-x}, & x>0,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2)**方法一** 分布函数法. (X,Y) 的正概率区域 D 与所求概率 $F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}$ 的积分区域的公共部分有三种不同的组合形式(见图 3-9),于是:

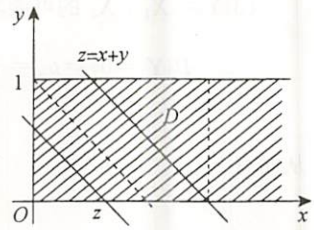


图 3-9

当 $z<0$ 时,$F_Z(z)=0$;

当 $0\leqslant z<1$ 时,$F_Z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x}2y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y=z^2-2z-2\mathrm{e}^{-z}+2$;

当 $z\geqslant 1$ 时,$F_Z(z)=1-\int_0^1\mathrm{d}y\int_{z-y}^{+\infty}2y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-2\mathrm{e}^{-z}$.

因此 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}2z+2\mathrm{e}^{-z}-2, & 0<z<1,\\ 2\mathrm{e}^{-z}, & z>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

方法二 公式法. 在 X,Y 相互独立的条件下,用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$ 计算,有

$$f_X(x)f_Y(z-x)=\begin{cases}2(z-x)\mathrm{e}^{-x}, & x>0,0<z-x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $f_X(x)f_Y(z-x)$ 正值区域如图 3-10 所示,于是:

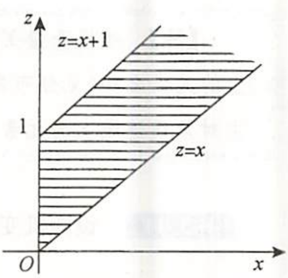


图 3-10

当 $z<0$ 时,$f_Z(z)=0$;

当 $0<z<1$ 时,$f_Z(z)=\int_0^z 2(z-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2z+2\mathrm{e}^{-z}-2$;

当 $z>1$ 时,$f_Z(z)=\int_{z-1}^z 2(z-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{-z}$.

因此 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}2z+2\mathrm{e}^{-z}-2, & 0<z<1,\\ 2\mathrm{e}^{-z}, & z>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3.13 设二维随机变量 (X,Y) 在矩形区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布,求边长为 X 和 Y 的矩形面积 Z 的概率密度.

解 由题设知 $Z=XY(Z>0)$,(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

方法一 分布函数法. 正概率区域 D 与所求概率 $F_Z(z)=P\{XY\leqslant z\}$ 的积分区域的公共部分有三种不同的组合形式(见图 3-11),于是:

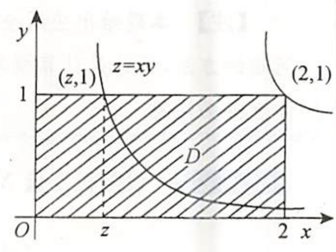


图 3-11

当 $z<0$ 时,$F_Z(z)=0$;

当 $0\leqslant z<2$ 时,$F_Z(z)=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{2}\mathrm{d}y+\int_z^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{z}{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y$
$=\frac{1}{2}z(1-\ln z+\ln 2)$;

当 $z\geqslant 2$ 时,$F_Z(z)=1$.

因此 $Z=XY$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln z), & 0<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

方法二 公式法. 用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$，$0<z<x\leqslant 2$.

当 $z\leqslant 0$ 或 $z\geqslant 2$ 时，$f_Z(z)=0$；

当 $0<z<2$ 时，$f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_z^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln z)$.

因此 $Z=XY$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln z), & 0<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

例 3.14 设随机变量 X,Y 相互独立，它们都服从指数分布，概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & 其他,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y\geqslant 0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度.

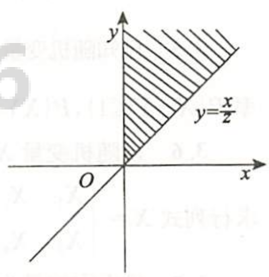


图 3-12

解 由于 X,Y 相互独立，(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

如图 3-12 所示：当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z>0$ 时，

$$F_Z(z)=P\left\{\frac{X}{Y}\leqslant z\right\}=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{z}}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{z}{z+1}.$$

因此 $Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{(1+z)^2}, & z>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

基础习题精练

习题

3.1 如果二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 y}+e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max(x,y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12}>0$，求 X 和 Y 各自的边缘分布函数.

3.2 随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\frac{1+\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\ (-\infty<x,y<+\infty)$$

的两个边缘概率密度 $f_1(x),f_2(y)$ 分别为________.

3.3 求以下给出的 (X,Y) 的概率密度的边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$：

(1) $f_1(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & 其他; \end{cases}$

(2) $f_2(x,y)=\begin{cases} \frac{5}{4}(x^2+y), & 0<y<1-x^2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

3.4 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} k, & 0<x^2<y<x<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1)求常数 k；

(2)求 $P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}$ 和 $P\left\{Y<\frac{1}{2}\right\}$.

3.5 已知随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 λ 的指数分布，$P\{Y=-1\}=\frac{1}{4}$，$P\{Y=1\}=\frac{3}{4}$，求概率 $P\{X-Y\leqslant 1\}$，$P\{XY\leqslant 2\}$.

3.6 设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立且同分布，$P\{X_i=0\}=0.6$，$P\{X_i=1\}=0.4$，$i=1,2,3,4$，求行列式 $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

3.7 袋中有编号为1,1,2,3的四个球，现从中无放回地取两次，每次任取一个，设 X_1,X_2 分别为第一次、第二次取到的球的号码，求：

(1) (X_1,X_2) 的联合分布，并判断 X_1 与 X_2 的独立性；

(2)在 $X_2=2$ 的条件下，X_1 的条件分布；

(3)随机变量 $Y=X_1X_2$ 的分布.

3.8 设随机变量 X 和 Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为(　　).

(A) $F^2(z)$　　(B) $F(x)F(y)$　　(C) $1-[1-F(z)]^2$　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

3.9 假设一电路装有三个同种电气元件，其工作状态相互独立，且无故障工作时间都服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布. 当三个元件都无故障时，电路正常工作，否则整个电路不能正常工作. 求电路正常工作的时间 T 的概率分布.

3.10 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2-x-y, & 0<x<1,0<y<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1)求 $P\{X>2Y\}$；

(2)求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

3.11 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$. 在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$. 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 和概率密度 $f_Y(y)$.

解答

3.1　解　因为
$$\lim_{y\to+\infty}(1-e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 y}+e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}})=1-e^{-\lambda_1 x},$$
$$\lim_{x\to+\infty}(1-e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 y}+e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}})=1-e^{-\lambda_2 y},$$
所以 X 和 Y 各自的边缘分布函数为
$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$
$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

3.2　$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$；$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$　解　由边缘概率密度的公式，有
$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\frac{\sin x}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin y)e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$
即 $f_1(x)$ 是标准正态概率密度. 由对称性知 $f_2(y)$ 也是标准正态概率密度，所以 $f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$.

3.3　解　(1)当 $x>0$ 时，有 $f_X(x)=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}$，所以 X 的边缘概率密度为
$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$
这是指数分布 $E(1)$.

而当 $y>0$ 时，有 $f_Y(y)=\int_0^y e^{-y}dx=ye^{-y}$，所以 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2)因为 $f_2(x,y)$ 的非零区域如图 3-13 阴影部分所示，所以当 $-1<x<1$时，有
$$f_X(x)=\int_0^{1-x^2}\frac{5}{4}(x^2+y)dy=\frac{5}{4}x^2(1-x^2)+\frac{5}{8}(1-x^2)^2=\frac{5}{8}(1-x^4),$$

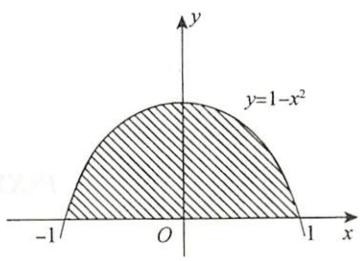


图 3-13

所以 X 的边缘概率密度为
$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{5}{8}(1-x^4), & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又因为当 $0<y<1$ 时，有
$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\frac{5}{4}(x^2+y)dx=\frac{5}{12}x^3\Big|_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}+\frac{5}{2}y\sqrt{1-y}$$
$$=\frac{5}{6}\sqrt{1-y}(1+2y),$$
所以 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{5}{6}\sqrt{1-y}(1+2y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

3.4　解　(1)$f(x,y)$ 的非零区域如图 3-14(a)阴影部分所示.

由 $k\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}dy=k\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{k}{6}=1$，解得 $k=6$.

(2)$f(x,y)$的非零区域与$x>\frac{1}{2}$的交集如图3-14(b)阴影部分所示，所以

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=6\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y=6\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-x^2)\mathrm{d}x=6\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{2}.$$

又因为$f(x,y)$的非零区域与$y<\frac{1}{2}$的交集如图3-14(c)阴影部分所示，所以

$$P\left\{Y<\frac{1}{2}\right\}=6\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x=6\int_0^{\frac{1}{2}}(\sqrt{y}-y)\mathrm{d}y=\sqrt{2}-\frac{3}{4}.$$

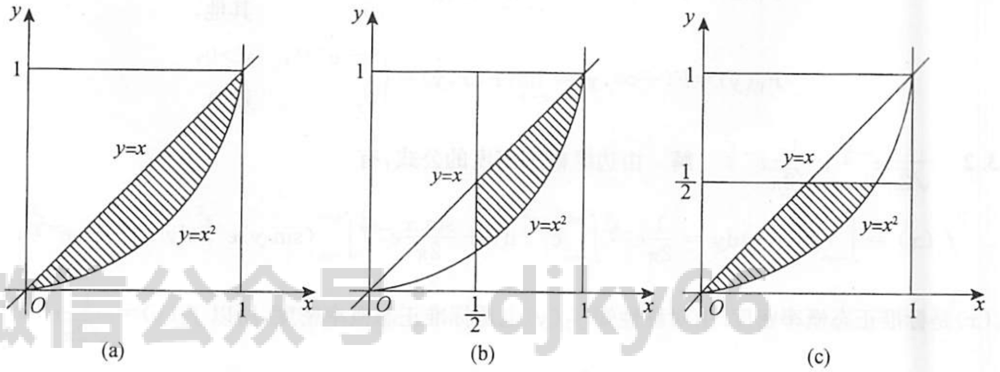


图 3-14

3.5 解 由于Y是离散型随机变量，X与Y相互独立，因此计算与X,Y有关的事件A的概率时，自然想到将A对Y的可能值作全集分解，应用全概率公式计算$P(A)$.

已知$X\sim f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $P\{Y=-1\}=\frac{1}{4}$，$P\{Y=1\}=\frac{3}{4}$，X与Y独立，所以由全概率公式得

$$\begin{aligned}P\{X-Y\leqslant 1\}&=P\{X-Y\leqslant 1,Y=1\}+P\{X-Y\leqslant 1,Y=-1\}\\&=P\{X-1\leqslant 1,Y=1\}+P\{X+1\leqslant 1,Y=-1\}\\&=P\{Y=1\}P\{X\leqslant 2\}+P\{Y=-1\}P\{X\leqslant 0\}\\&=\frac{3}{4}\int_0^2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}(1-\mathrm{e}^{-2\lambda}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{XY\leqslant 2\}&=P\{XY\leqslant 2,Y=1\}+P\{XY\leqslant 2,Y=-1\}\\&=P\{X\leqslant 2,Y=1\}+P\{-X\leqslant 2,Y=-1\}\\&=P\{Y=1\}P\{X\leqslant 2\}+P\{Y=-1\}P\{X\geqslant -2\}\\&=\frac{3}{4}\int_0^2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=1-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2\lambda}.\end{aligned}$$

3.6 解 因为$X=X_1X_4-X_2X_3$，所以X的可能取值为$-1,0,1$. 易知$Z_1=X_1X_4$与$Z_2=X_2X_3$独立同分布，且

$$P\{Z_1=1\}=P\{X_1=1,X_4=1\}=0.4^2=0.16,$$

$$P\{Z_1=0\}=1-P\{Z_1=1\}=0.84,$$

同理，得$P\{Z_2=1\}=0.16$，$P\{Z_2=0\}=0.84$. 由此得

$$P\{X=-1\}=P\{Z_1=0,Z_2=1\}=P\{Z_1=0\}P\{Z_2=1\}=0.84\times 0.16=0.134\ 4,$$

$$P\{X=0\}=P\{Z_1=0,Z_2=0\}+P\{Z_1=1,Z_2=1\}=0.84^2+0.16^2=0.731\ 2,$$

$$P\{X=1\}=P\{Z_1=1,Z_2=0\}=P\{Z_1=1\}P\{Z_2=0\}=0.16\times 0.84=0.134\ 4.$$

所以X的概率分布为

X	-1	0	1
P	0.134 4	0.731 2	0.134 4

3.7 解 (1)X_1 与 X_2 可能的取值为1,2,3,则

$$p_{11}=P\{X_1=1,X_2=1\}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\quad p_{12}=P\{X_1=1,X_2=2\}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$$

$$p_{13}=P\{X_1=1,X_2=3\}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\quad p_{21}=P\{X_1=2,X_2=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6},$$

$$p_{22}=0,\quad p_{23}=P\{X_1=2,X_2=3\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},\quad p_{31}=P\{X_1=3,X_2=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6},$$

$$p_{32}=P\{X_1=3,X_2=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},\quad p_{33}=0.$$

于是(X_1,X_2)的联合分布为

X_1 \ X_2	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

因为 $p_{11}\neq p_{\cdot 1}\cdot p_{1\cdot}$,所以 X_1 与 X_2 不相互独立.

(2)由于
$$P\{X_1=1|X_2=2\}=\frac{p_{12}}{p_{\cdot 2}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{3},$$

$$P\{X_1=2|X_2=2\}=0,\quad P\{X_1=3|X_2=2\}=\frac{p_{32}}{p_{\cdot 2}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3},$$

因此在 $X_2=2$ 的条件下,X_1 的条件分布为$\begin{pmatrix}1 & 3\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

(3)$Y=X_1X_2$ 可能的取值为1,2,3,6,于是

$$P\{Y=1\}=p_{11}=\frac{1}{6},\quad P\{Y=2\}=p_{12}+p_{21}=\frac{1}{3},$$

$$P\{Y=3\}=p_{13}+p_{31}=\frac{1}{3},\quad P\{Y=6\}=p_{23}+p_{32}=\frac{1}{6},$$

从而有
$$Y\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 6\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

3.8 (A) **解** 由于 X 和 Y 独立同分布,则 Y 的分布函数为 $F(y)$.

$$G(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=P\{X\leqslant z\}P\{Y\leqslant z\}=F^2(z),$$

故选择(A).

3.9 解 以 $X_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 个元件无故障工作的时间，则 X_1,X_2,X_3 相互独立且同分布，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

设 $G(t)$ 是 T 的分布函数，当 $t<0$ 时，$G(t)=0$；当 $t\geqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned}G(t)&=P\{T\leqslant t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{X_1>t,X_2>t,X_3>t\}\\&=1-P\{X_1>t\}P\{X_2>t\}P\{X_3>t\}=1-[1-F(t)]^3=1-e^{-3\lambda t}.\end{aligned}$$

所以
$$G(t)=\begin{cases}1-e^{-3\lambda t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

即 T 服从参数为 3λ 的指数分布.

3.10 解 (1) $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}(2-x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x-\frac{5}{8}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{24}.$

(2) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$，其中

$$f(x,z-x)=\begin{cases}2-x-(z-x), & 0<x<1,0<z-x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}2-z, & 0<x<1,0<z-x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $z\leqslant 0$ 或 $z\geqslant 2$ 时，$f_Z(z)=0$；当 $0<z<1$ 时，$f_Z(z)=\int_0^z(2-z)\mathrm{d}x=z(2-z)$；

当 $1<z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^1(2-z)\mathrm{d}x=(2-z)^2$.

所以 Z 的概率密度为
$$f_Z(z)=\begin{cases}z(2-z), & 0<z<1,\\ (2-z)^2, & 1<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

3.11 解
$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{X=1\}P\{Y\leqslant y|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant y|X=2\}\\&=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y|X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y|X=2\}.\end{aligned}$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $0\leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=\frac{3y}{4}$；当 $1\leqslant y<2$ 时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}+\frac{y}{4}$；

当 $y\geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=1$.

所以随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{3y}{4}, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{1}{2}+\frac{y}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$ 概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \frac{1}{4}, & 1<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

第4讲 随机变量的数字特征

基础知识结构

- 一维随机变量的数字特征
  - 数学期望
    - 概念
    - 性质
  - 方差、标准差
    - 概念
    - 性质
  - 切比雪夫不等式
- 二维随机变量的数字特征
  - 数学期望
  - 协方差与相关系数
    - 概念
    - 性质
- 独立性与相关性的判定
  - 用分布判定独立性
  - 用数字特征判定相关性

基础内容精讲

一、一维随机变量的数字特征

（一）随机变量的数学期望

1. 概念

设 X 是随机变量，Y 是 X 的函数，$Y=g(X)$（g 为连续函数）.

(1)如果 X 是离散型随机变量，其分布列为 $p_i=P\{X=x_i\}(i=1,2,\cdots)$. 若级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ 绝对收敛，则称随机变量 X 的数学期望存在，并将级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ 的和称为随机变量 X 的**数学期望**，记为$E(X)$或 EX，即

$$EX=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i,$$

否则称 X 的数学期望不存在.

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛,则称 $Y=g(X)$ 的数学期望 $E[g(X)]$ 存在,且 $E[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$,否则称 $g(X)$ 的数学期望不存在.

(2)如果 X 是连续型随机变量,其概率密度为 $f(x)$. 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则称 X 的数学期望存在,且 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$,否则称 X 的数学期望不存在.

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则称 $g(X)$ 的数学期望存在,且 $E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$,否则称 $g(X)$ 的数学期望不存在.

【注】 (1)数学期望又称为概率平均值,常常简称期望或均值. 数学期望是描述随机变量平均取值状况特征的指标,它刻画随机变量的一切可能值的集中位置.

(2)在数学期望的定义中要求级数(或积分)绝对收敛,否则称期望不存在. 这是因为 X 的期望存在要求与 X 的取值顺序无关,即要求任意改变 x_i 的次序不应改变 EX 的存在性,这在数学上就要求级数(或积分)绝对收敛,况且绝对收敛有很多性质也便于数学上的处理. 只不过在考题中,命题人基本上会避开对"绝对收敛"的考查,而仅要求考生会计算即可.

2. 性质

(1)对任意常数 a_i 和随机变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 有

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_iEX_i.$$

特别地,

$$Ec=c,\quad E(aX+c)=aEX+c,\quad E(X\pm Y)=EX\pm EY.$$

(2)设 X 与 Y 相互独立,则

$$E(XY)=EX\cdot EY,\quad E[g_1(X)\cdot g_2(Y)]=E[g_1(X)]\cdot E[g_2(Y)].$$

一般地,设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,则

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} EX_i,\quad E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right]=\prod_{i=1}^{n} E[g_i(X_i)].$$

(二)随机变量的方差、标准差、切比雪夫不等式

1. 概念

设 X 是随机变量,如果 $E[(X-EX)^2]$ 存在,则称 $E[(X-EX)^2]$ 为 X 的**方差**,记为 DX,即

$$DX=E[(X-EX)^2]=E(X^2)-(EX)^2.$$

称 $\sqrt{DX}$ 为 X 的**标准差**或**均方差**,记为 $\sigma(X)$,称随机变量 $X^*=\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$ 为 X 的**标准化随机变量**,此时 $EX^*=0,DX^*=1$.

2. 性质

(1)$DX\geqslant 0,E(X^2)=DX+(EX)^2\geqslant (EX)^2$.

(2)$Dc=0$.

(3)$D(aX+b)=a^2DX$.

(4)$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(5)如果 X 与 Y 相互独立,则

$$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY.$$

一般地,如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,$g_i(x)$ 为 x 的连续函数,则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2DX_i,$$

$$D\left[\sum_{i=1}^{n}g_i(X_i)\right]=\sum_{i=1}^{n}D[g_i(X_i)].$$

3. 切比雪夫不等式

如果随机变量 X 的期望 EX 和方差 DX 存在,则对任意 $\varepsilon>0$,有

$$P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}\text{或 }P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

【注】 由切比雪夫不等式知,当 DX 愈小时,概率 $P\{|X-EX|<\varepsilon\}$ 愈大,这表明方差是刻画随机变量与其期望值偏离程度的量,是描述随机变量 X"分散程度"特征的指标.

我们将常用分布的期望和方差列表如下.

分布	分布列 p_k 或概率密度 $f(x)$	期望	方差
0—1分布	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n,p)$	$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^kp^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},k=0,1,\cdots$	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,k=1,2,\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},-\infty<x<+\infty$	μ	σ^2
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\frac{1}{b-a},a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x},x>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

注意:表中仅列出各分布概率密度的非零区域.

二、二维随机变量的数字特征

(一)二维随机变量函数的数学期望

设 X,Y 为随机变量,$g(X,Y)$ 为 X,Y 的函数(g 是连续函数).

(1)如果(X,Y)为离散型随机变量,其联合分布为

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}(i,j=1,2,\cdots),$$

若级数 $\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则定义

$$E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}.$$

(2)如果(X,Y)为连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛，则定义

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(二)两个随机变量的协方差与相关系数

1. 概念

如果随机变量 X 与 Y 的方差存在且 $DX>0,DY>0$，则称 $E[(X-EX)(Y-EY)]$为随机变量 X 与 Y 的**协方差**，并记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]=E(XY)-EX\cdot EY,$$

其中

$$E(XY)=\begin{cases}\sum_i\sum_j x_iy_jP\{X=x_i,Y=y_j\}(\text{离散型}),\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(\text{连续型}).\end{cases}$$

称 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$为随机变量 X 与 Y 的**相关系数**. 如果 $\rho_{XY}=0$，则称 X 与 Y **不相关**；如果 $\rho_{XY}\neq0$，则称 X 与 Y **相关**.

【注】 协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$是描述随机变量 X 与 Y 之间偏差的关联程度的，比如研究父亲身高 X 与孩子身高 Y 之间的偏差程度，便可用 $\mathrm{Cov}(X,Y)$来刻画. 相关系数 ρ_{XY} 描述随机变量 X 与 Y 之间的线性相依性，$|\rho_{XY}|$是刻画 X 与 Y 之间线性相关程度的一种度量. $\rho_{XY}=0$ 表示 X 与 Y 之间不存在线性关系，故称 X 与 Y 不相关，但这并不意味着 X 与 Y 之间不存在相依关系，它们之间还可能存在某种非线性关系.

2. 性质

(1)**对称性** $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$， $\rho_{XY}=\rho_{YX}$，

$\mathrm{Cov}(X,X)=DX$， $\rho_{XX}=1$.

(2)**线性性** $\mathrm{Cov}(X,c)=0$， $\mathrm{Cov}(aX+b,Y)=a\mathrm{Cov}(X,Y)$，

$\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.

一般地，

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i,Y\right)=\sum_{i=1}^n a_i\mathrm{Cov}(X_i,Y).$$

(3)**相关系数有界性** $|\rho_{XY}|\leqslant1$.

(4)**线性关系下的相关系数**

如果 $Y=aX+b$，则 $\rho_{XY}=\begin{cases}1, & a>0,\\ -1, & a<0.\end{cases}$

基础例题精解

一、一维随机变量的数字特征

1. 离散型随机变量的数学期望与方差

例 4.1 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.2, & -1\leqslant x<0,\\ 0.8, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

则 $EX=$________,$E(2X+5)=$________,$E(X^2)=$________,$D(X^2)=$________.

解 应填0;5;0.4;0.24.

求 X 的期望与方差,先求 X 的分布列,即有

$$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.2 & 0.6 & 0.2\end{pmatrix}.$$

因此

$$EX=-1\times 0.2+0\times 0.6+1\times 0.2=0,$$
$$E(2X+5)=2EX+5=5,$$
$$E(X^2)=(-1)^2\times 0.2+0^2\times 0.6+1^2\times 0.2=0.4,$$
$$D(X^2)=E(X^4)-[E(X^2)]^2=(-1)^4\times 0.2+0^4\times 0.6+1^4\times 0.2-0.4^2=0.24.$$

例 4.2 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布,且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$,则 $\lambda=$________.

解 应填1.

由于随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布,因此 $EX=DX=\lambda$,从而有

$$E[(X-1)(X-2)]=E(X^2)-3EX+2=DX+(EX)^2-3EX+2=\lambda^2-2\lambda+2=1,$$

解方程 $\lambda^2-2\lambda+1=0$,得 $\lambda=1$.

例 4.3 设试验成功一次的概率为 p,进行100次独立重复试验,当 $p=$________时成功次数的标准差最大,且其最大值为________.

解 应填$\frac{1}{2}$;5.

设成功次数为 X,则 $X\sim B(100,p)$,X 的标准差为 $\sqrt{DX}=\sqrt{100p(1-p)}$.

由于 $p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}$,当且仅当 $p=\frac{1}{2}$ 时等号成立,故当 $p=\frac{1}{2}$ 时成功次数的标准差最大,且其最大值为$\sqrt{100\times\frac{1}{4}}=5$.

2. 离散型随机变量函数的数学期望与方差

主要用两种方法计算:一是直接利用离散型随机变量函数数学期望的计算公式;二是先计算离散型随机变量函数的概率分布,再用定义计算.

例 4.4 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\leqslant x<\pi,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

对 X 独立观察 4 次,用 Y 表示观察值大于$\frac{\pi}{3}$的次数,求 Y^2 的数学期望.

解 由题意知 $P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$,所以 $Y\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$,于是

$$EY=4\times\frac{1}{2}=2,\quad DY=4\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=1,$$

所以

$$E(Y^2)=DY+(EY)^2=1+4=5.$$

例 4.5 设一部机器一天内发生故障的概率为 0.2,机器发生故障时,停止工作一天.若一周 5 个工作日里机器无故障可获利润 10 万元,发生一次故障仍可获利 5 万元,发生两次故障所获利润为零,发生三次或三次以上故障亏损 2 万元,求一周内利润值的期望.

解 设一周内发生故障的次数为 X,则 $X\sim B(5,0.2)$,有

$$P\{X=0\}=\mathrm{C}_5^0\times0.2^0\times0.8^5=0.327\ 68,$$

$$P\{X=1\}=\mathrm{C}_5^1\times0.2\times0.8^4=0.409\ 6,$$

$$P\{X=2\}=\mathrm{C}_5^2\times0.2^2\times0.8^3=0.204\ 8,$$

$$P\{X\geqslant3\}=1-\sum_{k=0}^{2}P\{X=k\}=0.057\ 92.$$

设一周内可获利润为 Y 万元,依题设有

$$Y=\begin{cases}10, & X=0,\\ 5, & X=1,\\ 0, & X=2,\\ -2, & X\geqslant3,\end{cases}$$

所以

$$EY=10\times0.327\ 68+5\times0.409\ 6+0\times0.204\ 8+(-2)\times0.057\ 92=5.208\ 96(万元).$$

3. 连续型随机变量的数学期望与方差

例 4.6 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}(-\infty<x<+\infty),$$

则 $EX($ $)$.

(A)等于 0 (B)等于 1 (C)等于 π (D)不存在

解 应选(D).

由连续型随机变量数学期望的定义,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

由于该积分发散,因此 EX 不存在,故选择(D).

例 4.7 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}(-\infty<x<+\infty),$$

则 $EX=$________，$\sqrt{DX}=$________.

解 应填 $1;\frac{1}{\sqrt{2}}$.

在讨论涉及形如 e^{-x^2+2x-1} 的概率密度的数字特征时，应尽可能地利用正态分布概率密度的性质，于是由

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\},$$

知 $EX=1,\sqrt{DX}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

例 4.8 设连续型随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $E(X+e^{-2X})=$________，$D(e^{-2X})=$________.

解 应填 $\frac{4}{3};\frac{4}{45}$.

因为 $EX=\frac{1}{1}=1,E(e^{-2X})=\int_0^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx=\frac{1}{3}$，所以

$$E(X+e^{-2X})=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$$

又由

$$E[(e^{-2X})^2]=E(e^{-4X})=\int_0^{+\infty}e^{-4x}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-5x}dx=\frac{1}{5},$$

得 $D(e^{-2X})=E[(e^{-2X})^2]-[E(e^{-2X})]^2=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{45}$.

4. 连续型随机变量函数的数学期望与方差

例 4.9 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}(-\infty<x<+\infty),$$

求 $E(\min\{|X|,1\})$.

解 由对称性知，

$$\begin{aligned}E(\min\{|X|,1\})&=\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{|x|,1\}f(x)dx=2\int_0^{+\infty}\min\{x,1\}f(x)dx\\&=2\left[\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^{+\infty}f(x)dx\right]\\&=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\right)\\&=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^1+\frac{2}{\pi}\arctan x\Big|_1^{+\infty}\\&=\frac{1}{\pi}\ln 2+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

二、二维随机变量的数字特征

1. 二维离散型随机变量的数字特征的计算

(1)给出 X,Y 的联合分布,相当于给出了一个充分条件,在此基础上求数字特征,完全可以通过准确套用公式解决.由于较简单,考研在此命题频率不高.

(2)给出 X,Y 的边缘分布,相当于给出了一个必要条件.需再附加一些条件,如某些数字特征或事件概率,才能确定 X,Y 的联合分布.这种问题是考研常考的.

例 4.10 设随机变量

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix},\quad Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

且 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{8}$,求 X 与 Y 的联合分布.

解 依题设,$EX=\frac{3}{4}$,$EY=\frac{1}{2}$,于是

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=E(XY)-\frac{3}{8}=\frac{1}{8},$$

得 $E(XY)=\frac{1}{2}$,即有

$$E(XY)=\frac{1}{2}=P\{X=1,Y=1\},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{Y=1\}-P\{X=1,Y=1\}=0,$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-0=\frac{1}{4},$$

因此,X 与 Y 的联合分布为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

例 4.11 设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(1)求随机变量(X,Y)的概率分布;

(2)求 $Z=XY$ 的概率分布;

(3)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

解 (1)由 $P\{X^2=Y^2\}=1$,知 $P\{X^2\neq Y^2\}=0$,即

$$P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0,$$

从而有

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{3},$$

因此,(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(2)$Z=XY$ 的可能取值为$-1,0,1$.

$$P\{Z=-1\}=P\{X=1,Y=-1\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{Z=0\}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$

所以

$$Z\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

(3)由于

$$EX=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3},\quad E(X^2)=\frac{2}{3},\quad DX=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9},$$

$$EY=-1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0,\quad E(Y^2)=\frac{2}{3},\quad DY=\frac{2}{3},$$

$$E(XY)=-1\times1\times\frac{1}{3}+1\times1\times\frac{1}{3}=0,$$

因此

$$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0.$$

2. 二维连续型随机变量的数字特征的计算

除了上一部分所述，还要注意这里增加了概率密度 $f(x,y)$ 等，可能涉及积分计算.

例 4.12 已知随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0;1,1;0.5)$，$U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$，则 $E(U+V)=$ ________，$E(UV)=$ ________.

解 应填 0；0.5.

由于
$$U=\max\{X,Y\}=\frac{1}{2}[(X+Y)+|X-Y|],$$
$$V=\min\{X,Y\}=\frac{1}{2}[(X+Y)-|X-Y|],$$
则
$$U+V=X+Y,\quad U-V=|X-Y|,\quad UV=XY.$$
所以
$$E(U+V)=EX+EY=0.$$
$$E(UV)=E(XY)=\mathrm{Cov}(X,Y)+EXEY=0.5+0=0.5.$$

三、独立性与相关性的判定、切比雪夫不等式

1. 独立性与相关性的判定

(1)随机变量 X 与 Y 相互独立，意指对任意实数 x,y，事件 $\{X\leqslant x\}$ 与 $\{Y\leqslant y\}$ 相互独立，即 (X,Y) 的分布等于边缘分布相乘：$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$.

若 (X,Y) 是连续型的，则 X 与 Y 独立的充要条件是
$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y);$$
若 (X,Y) 是离散型的，则 X 与 Y 独立的充要条件是
$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}.$$
记住，我们是通过分布来判定独立性的.

(2)随机变量 X 与 Y 不相关，意指 X 与 Y 之间不存在线性相依性，即 $\rho_{XY}=0$，其充要条件是
$$\rho_{XY}=0\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0\Leftrightarrow E(XY)=EX\cdot EY\Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY.$$
记住，我们一般是通过数字特征来判定相关性的.

(3)几个重要结论：

① 如果 X 与 Y 独立，则 X,Y 不相关，反之不然；

② 如果 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X,Y 独立 $\Leftrightarrow X,Y$ 不相关；

③ 由①知，如果 X 与 Y 相关，则 X,Y 不独立.

综上所述，我们在讨论随机变量 X 与 Y 的相关性、独立性时，总是先计算 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，而后按下列程序进行判断或再计算：

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY\begin{cases}\neq 0\Leftrightarrow X\text{ 与 }Y\text{ 相关}\Rightarrow X\text{ 与 }Y\text{ 不独立},\\ =0\Leftrightarrow X\text{ 与 }Y\text{ 不相关，通过分布推断}\begin{cases}X,Y\text{ 独立},\\ X,Y\text{ 不独立}.\end{cases}\end{cases}$$

【注】 上述讨论均假设方差存在且不为零.

例 4.13 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $\xi=X+Y,\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件为（　　）.

(A)$EX=EY$　　　　(B)$E(X^2)-(EX)^2=E(Y^2)-(EY)^2$

(C)$E(X^2)=E(Y^2)$　　　　(D)$E(X^2)+(EX)^2=E(Y^2)+(EY)^2$

解 应选(B).

随机变量 ξ,η 不相关的充分必要条件是协方差 $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)$ 为零，由

$$E(\xi\eta)=E(X^2)-E(Y^2),\quad E\xi=EX+EY,\quad E\eta=EX-EY,$$

得

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\xi,\eta)&=E(\xi\eta)-E\xi E\eta=E(X^2)-E(Y^2)-(EX+EY)(EX-EY)\\&=E(X^2)-(EX)^2-[E(Y^2)-(EY)^2],\end{aligned}$$

因此，随机变量 ξ,η 不相关的充分必要条件为 $E(X^2)-(EX)^2-[E(Y^2)-(EY)^2]=0$，即 $E(X^2)-(EX)^2=E(Y^2)-(EY)^2$，故选择(B).

例 4.14 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},x\in(-\infty,+\infty),$$

证明：(1)X 与 $|X|$ 不相关；(2)X 与 $|X|$ 不独立.

证明 (1)由对称性，有

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0,\quad E(X|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)\mathrm{d}x=0,$$

因此，$\mathrm{Cov}(X,|X|)=E(X|X|)-EXE(|X|)=0$，知 X 与 $|X|$ 不相关.

(2)对任意常数 a，不妨设 $a>0$.

$$P\{X\leqslant a\}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a},$$

$$P\{|X|\leqslant a\}=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-a}.$$

又事件 $\{|X|\leqslant a\}\subset\{X\leqslant a\}$，即 $\{|X|\leqslant a\}\cap\{X\leqslant a\}=\{|X|\leqslant a\}$，故有

$$P\{X\leqslant a,|X|\leqslant a\}=P\{|X|\leqslant a\}=1-\mathrm{e}^{-a},$$

从而有

$$P\{X\leqslant a,|X|\leqslant a\}\neq P\{X\leqslant a\}\cdot P\{|X|\leqslant a\},$$

因此，X 与 $|X|$ 不独立.

2. 切比雪夫不等式

应用切比雪夫不等式：(1)可以估算随机变量在某范围取值的概率；(2)可以证明某些收敛性问题（见例 6.11）.

例 4.15 设 X,Y 为随机变量，数学期望都是 2，方差分别为 1 和 4，相关系数为 0.5，试用切比雪夫不等式估计概率 $P\{|X-Y|\geqslant 6\}$.

解 应用不等式 $P\{|\xi-E\xi|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ 估计.

已知 $EX=EY=2,DX=1,DY=4,\rho_{XY}=0.5=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{2}$. 记 $\xi=X-Y$，则

$$E\xi=0,\quad D\xi=D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{Cov}(X,Y)=1+4-2\times0.5\times2=3.$$

取 $\varepsilon=6$. 由切比雪夫不等式,得

$$P\{|X-Y|\geqslant 6\}\leqslant\frac{D(X-Y)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

基础习题精练

习题

4.1 已知连续型随机变量 X 与 Y 有相同的概率密度,且

$$X\sim f(x)=\begin{cases}2x\theta^2, & 0<x<\dfrac{1}{\theta},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad(\theta>0),\quad E[a(X+2Y)]=\frac{1}{\theta},$$

则 $a=$( ).

(A)$\frac{2}{3}$ (B)$\frac{1}{2}$ (C)$\frac{1}{3}$ (D)$\frac{1}{6}$

4.2 已知连续型随机变量 Y 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{a^2}e^{-\frac{y^2}{2a^2}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}\quad a>0,$$

求随机变量 $Z=\frac{1}{Y}$ 的数学期望 EZ.

4.3 甲、乙两人相约于某地在 12:00～13:00 会面,设 X,Y 分别是甲、乙到达超过 12:00 的时间(单位:小时),且假设 X 和 Y 相互独立,已知 X,Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求先到达者需要等待的时间的数学期望.

4.4 设 A,B 为两个随机事件,且 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$. 令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生},\end{cases}$$

求:(1)二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(2)X,Y 的相关系数 ρ_{XY};

(3)$Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

4.5 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,X 与 Y 的期望值为 μ,方差为 σ^2,X,Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=0$,记 $Z_1=2X+Y,Z_2=2X-Y$,则 Z_1,Z_2 的相关系数为( ).

(A)0 (B)$\frac{3}{5}$ (C)$\frac{3}{\sqrt{15}}$ (D)$\frac{3}{\sqrt{10}}$

4.6 设 $X\sim N(0,\sigma^2)(\sigma>0),Y=X^3$.

(1)求 EY;

(2)判断 X 与 Y 是否相关？是否独立？说明理由.

4.7 设随机变量 X 在$[-1,1]$上服从均匀分布,$Y=X^3$,则 X 与 Y(　　).

(A)不相关且相互独立　　　　(B)不相关且相互不独立

(C)相关且相互独立　　　　(D)相关且相互不独立

4.8 设 X 为随机变量,$P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant 0.9$,$DX=0.009$,试用切比雪夫不等式估计 ε 的取值范围.

解答

4.1 (B) 解　由于 X 与 Y 有相同的概率密度,因此 $EX=EY$,于是

$$E[a(X+2Y)]=a(EX+2EY)=3aEX=3a\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=3a\int_0^{\frac{1}{\theta}}2x^2\theta^2\mathrm{d}x$$

$$=3a\cdot\frac{2}{3}x^3\theta^2\Big|_0^{\frac{1}{\theta}}=\frac{2a}{\theta}=\frac{1}{\theta},$$

解得 $a=\frac{1}{2}$,故选择(B).

4.2 解

$$EZ=E\left(\frac{1}{Y}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y}\cdot f(y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2a^2}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2a^2}}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2\pi}a}{2a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2a^2}}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}.$$

【注】　上面是凑正态分布来处理$\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2a^2}}\mathrm{d}y$的,也可利用泊松积分$\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$来完成.

4.3 解　由题意可得

$$f(x,y)=\begin{cases}6x^2y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

根据题意可知,所求即为$|X-Y|$的数学期望,如图 4-1 所示,有

$$E(|X-Y|)=\int_0^1\int_0^1|x-y|6x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}[-(x-y)6x^2y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(x-y)6x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}(\text{小时}).$$

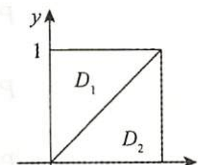


图 4-1

4.4 解　(1)(X,Y)的取值为$(0,0)$,$(0,1)$,$(1,0)$,$(1,1)$,并有

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A)-P(B)+P(AB),$$

其中 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$,$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$,因此

$$P\{X=0,Y=0\}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{2}{3},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},$$

从而(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(2)由 X 与 Y 的联合分布,得 X 与 Y 的边缘分布分别为

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix},\quad Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix},$$

从而

$$EX=\frac{1}{4},\quad E(X^2)=\frac{1}{4},\quad DX=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{16},$$

$$EY=\frac{1}{6},\quad E(Y^2)=\frac{1}{6},\quad DY=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{36},$$

$$E(XY)=\frac{2}{3}\times0\times0+\frac{1}{12}\times0\times1+\frac{1}{6}\times1\times0+\frac{1}{12}\times1\times1=\frac{1}{12},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{1}{24},$$

因此

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

(3)$Z=X^2+Y^2$ 可能取值为 0,1,2,因此

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3},$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12},$$

从而

$$Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12}\end{pmatrix}.$$

4.5 (B) 解 利用已有的关系计算,不必从(Z_1,Z_2)的分布去考虑.

由 $\rho_{XY}=0$,知 X 与 Y 不相关且相互独立.于是

$$DZ_1=4DX+DY=5\sigma^2,\quad DZ_2=4DX+DY=5\sigma^2,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)&=E[(2X+Y)(2X-Y)]-E(2X+Y)E(2X-Y)\\&=4E(X^2)-4(EX)^2-E(Y^2)+(EY)^2\\&=4DX-DY=3\sigma^2,\end{aligned}$$

因此，Z_1,Z_2 的相关系数 $\rho=\frac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}=\frac{3}{5}$，故选择(B).

4.6 解 (1)已知 X 的概率密度 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$，$f(x)$ 为 x 的偶函数，故

$$EY=E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f(x)\mathrm{d}x=0.$$

(2)$E(XY)=E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}x^4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x\neq 0$，

故 $EX\cdot EY\neq E(XY)$，故 X 与 Y 相关，从而可知 X 与 Y 不独立.

4.7 (D) **解** 显然，结论(C)对任意两个随机变量都不正确. 又 X 与 Y 之间存在函数关系，因而不可能独立，结论(A)不正确. 由题设，$EX=0$，$E(XY)=\int_{-1}^{1}x^4\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x\neq 0$，从而知 $\mathrm{Cov}(X,Y)\neq 0$，则 X 与 Y 必相关，也必相互不独立，故选择(D).

4.8 解 应用切比雪夫不等式 $P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$ 求解. 由题设得

$$P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{0.009}{\varepsilon^2}\geqslant 0.9,$$

$$\varepsilon^2\geqslant 0.09,$$

$$\varepsilon\geqslant 0.3.$$

第5讲　大数定律与中心极限定理

基础知识结构

- 依概率收敛
- 大数定律
  - 切比雪夫大数定律
  - 伯努利大数定律
  - 辛钦大数定律
- 中心极限定理
  - 列维-林德伯格定理
  - 棣莫弗-拉普拉斯定理

基础内容精讲

一、依概率收敛

设随机变量 X 与随机变量序列$\{X_n\}(n=1,2,3,\cdots)$，如果对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon\}=0 \text{ 或} \lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1,$$

则称随机变量序列$\{X_n\}$**依概率收敛于随机变量** X，记为

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X(P) \text{ 或 } X_n\xrightarrow{P}X\ (n\to\infty).$$

【注】 以上定义中将随机变量 X 写成常数 a 也成立.

二、大数定律

定理1（切比雪夫大数定律）　假设$\{X_n\}(n=1,2,\cdots)$是相互独立的随机变量序列，如果方差 DX_i $(i\geqslant1)$存在且一致有上界，即存在常数 C，使 $DX_i\leqslant C$ 对一切 $i\geqslant1$ 均成立，则$\{X_n\}$服从大数定律：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i.$$

定理 2(伯努利大数定律) 假设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数,在每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则 $\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p$,即对任意 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

定理 3(辛钦大数定律) 假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列,如果 $EX_i=\mu(i=1,2,\cdots)$ 存在,则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$,即对任意 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

三、中心极限定理

定理 4(列维-林德伯格定理) 假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列,如果

$$EX_i=\mu,\quad DX_i=\sigma^2>0(i=1,2,\cdots)$$

存在,则对任意的实数 x,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x).$$

【注】 (1)定理的三个条件"独立、同分布、期望和方差存在",缺一不可.

(2)只要 X_n 满足定理条件,那么当 n 很大时,独立同分布随机变量的和 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从正态分布 $N(n\mu,n\sigma^2)$,由此可知,当 n 很大时,有

$$P\left\{a<\sum_{i=1}^{n}X_i<b\right\}\approx\Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right),$$

这常常是解题的依据.只要题目涉及独立同分布随机变量的和 $\sum_{i=1}^{n}X_i$,我们就要考虑独立同分布中心极限定理.

定理 5(棣莫弗-拉普拉斯定理) 假设随机变量 $Y_n\sim B(n,p)(0<p<1,n\geqslant1)$,则对任意实数 x,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x).$$

【注】 如果记 $X_i\sim B(1,p)(0<p<1)$,即 $X_i\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1-p\end{pmatrix}$ 且相互独立,则

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p),$$

由定理 4 推出定理 5.

基础例题精解

一、大数定律

例 5.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是相互独立的随机变量序列，$X_n$ 服从参数为 $n(n\geqslant 1)$的指数分布，则下列随机变量序列中不服从切比雪夫大数定律的是(　　).

(A)$X_1,\frac{1}{2}X_2,\cdots,\frac{1}{n}X_n,\cdots$　　(B)$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$

(C)$X_1,2X_2,\cdots,nX_n,\cdots$　　(D)$X_1,2^2X_2,\cdots,n^2X_n,\cdots$

解 应选(D).

切比雪夫大数定律要求$\{X_n\}$相互独立，方差存在且一致有界，即 $DX_n\leqslant C$. 逐一验证各选项是否满足这一条件，从而确定正确选项.

由题设知$\{X_n\}$相互独立，且 $DX_n=\frac{1}{n^2}\leqslant 1$，所以选项(B)满足切比雪夫大数定律的条件.

又

$$D\left(\frac{1}{n}X_n\right)=\frac{1}{n^2}DX_n=\frac{1}{n^4}\leqslant 1,\quad D(nX_n)=n^2DX_n=1\leqslant 2,$$

由此可知，选项(A)，(B)，(C)均满足切比雪夫大数定律的条件，然而 $D(n^2X_n)=n^4DX_n=n^2$，选项(D)不满足切比雪夫大数定律的条件，故选择(D).

例 5.2 设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，根据辛钦大数定律，当 $n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于数学期望，只要$\{X_n\}$(　　).

(A)有相同的数学期望　　(B)服从同一离散型分布

(C)服从同一泊松分布　　(D)服从同一连续型分布

解 应选(C).

辛钦大数定律要求$\{X_n\}$独立同分布且数学期望存在. 选项(A)缺少“同分布”，选项(B)，(D)缺少“数学期望存在”这一条件，因而正确选项是(C).

二、中心极限定理

例 5.3 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$，则根据列维-林德伯格定理，当 n 充分大时，S_n近似服从正态分布，只要 $X_1,X_2,\cdots,X_n$(　　).

(A)有相同的期望和方差　　(B)服从同一离散型分布

(C)服从同一指数分布　　(D)服从同一连续型分布

解 应选(C).

列维-林德伯格定理的条件：随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立同分布，并且其数学期望和方差均存在. 由于有相同的数学期望和方差未必服从相同的分布，可见选项(A)不满足定理条件. 满足选项(B)和(D)的随机变量的数学期望或方差未必存在，故选项(B)和(D)也不满足定理条件. 于是，只有选项(C)成立(指数

分布的数学期望和方差都存在).

例 5.4 设 X_n 表示将一枚硬币随意投掷 n 次出现"正面"的次数,则(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{X_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{2X_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{X_n-2n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{2X_n-2n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

解 应选(B).

由题设知 $X_n\sim B\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$,根据棣莫弗-拉普拉斯定理,得

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-\frac{1}{2}n}{\sqrt{\frac{1}{4}n}}\leqslant x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{2X_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x),$$

故选择(B).

例 5.5 生产线生产的产品成箱包装,每箱质量是随机的.假设每箱平均重50千克,标准差为5千克,若用载重为5吨的汽车承运,试用中心极限定理说明每辆汽车最多可以装多少箱,才能保证不超载的概率大于0.977.($\Phi(2)=0.977$)

解 设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为"第 i 箱产品的质量(千克)",由题意,X_i 独立同分布,且 $EX_i=50$,$\sqrt{DX_i}=5$,n 箱总质量为 $T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,从而有

$$ET_n=50n,\quad \sqrt{DT_n}=5\sqrt{n}.$$

由列维-林德伯格定理,$T_n\overset{\text{近似}}{\sim}N(50n,25n)$,因此有

$$P\{T_n\leqslant 5\,000\}=P\left\{\frac{T_n-50n}{5\sqrt{n}}\leqslant\frac{5\,000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{1\,000-10n}{\sqrt{n}}\right)>0.977,$$

即 $\dfrac{1\,000-10n}{\sqrt{n}}>2$,$n<98.019\,9$,所以每辆汽车最多可以装98箱,才能保证不超载的概率大于0.977.

基础习题精练

习题

5.1 将一枚骰子重复掷 n 次,则当 $n\to\infty$ 时,n 次掷出点数的算术平均值 $\overline{X}_n$ 依概率收敛于__________.

5.2 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布随机变量序列,且均服从参数为 $\lambda(\lambda>1)$ 的指数分布,记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,则(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{\lambda n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

5.3 设某种电气元件不能承受超负荷试验的概率为 0.05. 现在对 100 个这样的元件进行超负荷试验,以 X 表示"不能承受试验而烧毁的元件数",则根据中心极限定理,$P\{5\leqslant X\leqslant 10\}\approx$________.

5.4 假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,已知 $E(X^k)=\alpha_k(k=1,2,3,4)$.

证明:当 n 充分大时,随机变量 $Z_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布,并指出其分布参数.

解答

5.1 $\dfrac{7}{2}$ **解** 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是各次掷出的点数,显然它们独立同分布,每次掷出点数的数学期望等于$\dfrac{7}{2}$. 因此,根据辛钦大数定律,$\overline{X}_n$ 依概率收敛于$\dfrac{7}{2}$.

5.2 (C) **解** 由于$E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{n}{\lambda}$,$D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{n}{\lambda^2}$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\dfrac{n}{\lambda}}{\dfrac{\sqrt{n}}{\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$,即$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$,故选择(C).

5.3 0.489 0 **解** 不能承受试验而烧毁的元件数 $X\sim B(n,p)$. 根据棣莫弗-拉普拉斯定理,X 近似服从正态分布$N(np,npq)$,其中 $n=100,p=0.05,q=0.95$. 因此

$$P\{5\leqslant X\leqslant 10\}=P\left\{\frac{5-np}{\sqrt{npq}}\leqslant\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\leqslant\frac{10-np}{\sqrt{npq}}\right\}=P\left\{0\leqslant\frac{X-5}{\sqrt{4.75}}\leqslant\frac{10-5}{\sqrt{4.75}}\right\}$$

$$=P\left\{0\leqslant\frac{X-5}{\sqrt{4.75}}\leqslant 2.29\right\}\approx\Phi(2.29)-\Phi(0)=0.489\ 0.$$

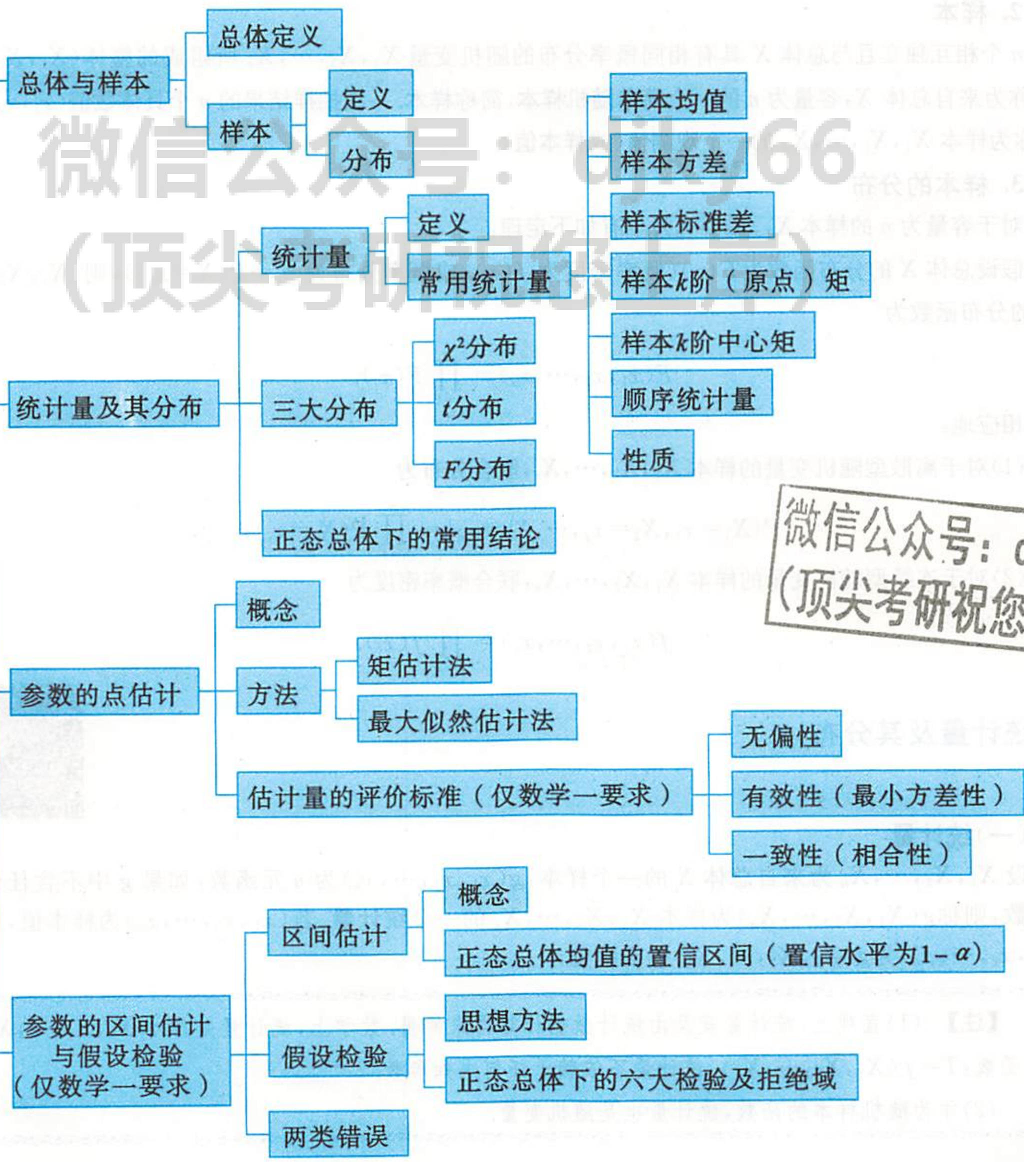
5.4 证明 依题意 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布,可知 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 也独立同分布且有

$$E(X_i^2)=\alpha_2,\quad D(X_i^2)=E(X_i^4)-[E(X_i^2)]^2=\alpha_4-\alpha_2^2.$$

由列维-林德伯格定理,$V_n=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\alpha_2}{\sqrt{n(\alpha_4-\alpha_2^2)}}=\dfrac{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\alpha_2}{\sqrt{(\alpha_4-\alpha_2^2)/n}}=\dfrac{Z_n-\alpha_2}{\sqrt{(\alpha_4-\alpha_2^2)/n}}$ 的极限分布是标准正态分布,所以当 n 充分大时,V_n 近似服从标准正态分布,从而 $Z_n=\sqrt{\dfrac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}}\cdot V_n+\alpha_2$ 近似服从参数为 $\mu=\alpha_2$,$\sigma^2=\dfrac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}$的正态分布.

第6讲 数理统计

基础知识结构



基础内容精讲

一、总体与样本

1. 总体

研究对象的全体称为**总体**,组成总体的每一个元素称为**个体**. 在对总体进行统计研究时,我们所关心的是表征总体状况的某个(或某几个)数量指标 X(可以是向量)和该指标在总体中的分布情况. 我们把总体与随机变量 X 等同起来,说"总体 X". 所谓总体的分布就是指随机变量 X 的分布.

2. 样本

n 个相互独立且与总体 X 具有相同概率分布的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 所组成的整体$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$称为来自总体 X,容量为 n 的一个**简单随机样本**,简称**样本**. 一次抽样结果的 n 个具体数值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一个**观测值**(或**样本值**).

3. 样本的分布

对于容量为 n 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,有如下定理:

假设总体 X 的分布函数为 $F(x)$(概率密度为 $f(x)$,或概率分布为 $p_i=P\{X=x_i\}$),则$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i).$$

相应地:

(1)对于离散型随机变量的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,联合分布为

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\};$$

(2)对于连续型随机变量的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,联合概率密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i).$$

二、统计量及其分布

(一)统计量

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本,$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 n 元函数,如果 g 中不含任何未知参数,则称$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一个**统计量**. 若$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为样本值,则称$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的**观测值**.

【注】 (1)直观上,统计量就是由统计数据计算得来的量. 数学上,统计量是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的函数:$T=f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$. 统计量不依赖于任何未知参数.

(2)作为随机样本的函数,统计量也是随机变量.

(二)常用统计量

样本数字特征和顺序统计量都是最常用的统计量. 统计量是统计分析和统计推断的重要工具.

1. 样本数字特征

数学期望(均值)、方差和标准差、矩等都是总体 X 最重要的数字特征. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的简单随机样本,则相应的样本数字特征定义:

(1)样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$;

(2)样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$;

样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$;

(3)样本 k 阶(原点)矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k(k=1,2,\cdots)$;

(4)样本 k 阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k(k=2,3,\cdots)$.

2. 顺序统计量

将样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$的 n 个观测量按其取值从小到大的顺序排列,得

$$X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}.$$

随机变量 $X_{(k)}(k=1,2,\cdots,n)$称作第 k 顺序统计量,其中 $X_{(1)}$是最小顺序统计量,而 $X_{(n)}$是最大顺序统计量:

$$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},\quad X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$

【注】 (1)$X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的分布函数为

$$F_{(n)}(x)=[F(x)]^n$$

(概率密度为 $f_{(n)}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)$).

(2)$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的分布函数为

$$F_{(1)}(x)=1-[1-F(x)]^n$$

(概率密度为 $f_{(1)}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x)$).

3. 常用统计量的性质

设总体 X 的期望$EX=\mu$,方差 $DX=\sigma^2$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X,容量为 n 的一个样本,$\overline{X}$,S^2 分别为样本的均值和方差,则

$$EX_i=\mu,\quad DX_i=\sigma^2(i=1,2,\cdots,n),\quad E\overline{X}=EX=\mu,\quad D\overline{X}=\frac{1}{n}DX=\frac{\sigma^2}{n},\quad E(S^2)=DX=\sigma^2.$$

(三)三大分布——χ^2 分布、t 分布和 F 分布

χ^2 分布、t 分布和F 分布是统计推断中最常用的抽样分布. 读者不必记忆 χ^2分布、t 分布和F 分布的概率密度,只需了解相应统计量的典型模式,以及它们的分布曲线的示意图和分位数,会查相应分位数的数值表.

1. χ^2 分布

(1)典型模式.

若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,且都服从标准正态分布,则随机变量 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从自由度为n

的 χ^2 分布，记为 $X\sim\chi^2(n)$. 其概率密度 $f(x)$ 的图形如图6-1所示. 特别地，$X_i^2\sim\chi^2(1)$.

对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足

$$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\alpha$$

的 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的**上 α 分位点**(见图 6-2). 对于不同的 $\alpha,n,\chi^2(n)$ 分布上 α 分位点可通过查表求得.

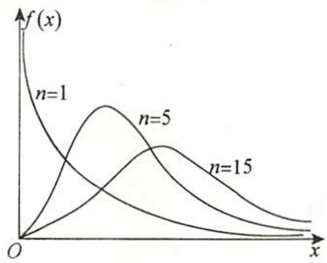


图 6-1

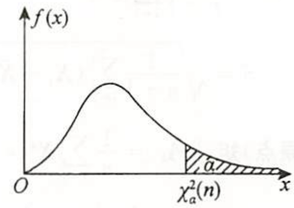


图 6-2

【注】 (1)自由度是指和式中独立变量的个数.

(2)某分布上 α 分位点(亦称上侧 α 分位数)为 μ_α 意指：点 μ_α 上侧(即右侧)，该概率密度曲线下方，x 轴上方图形面积为 α. 考研大纲中规定的便是上侧 α 分位数.

(2)χ^2 分布的性质.

①若 $X_1\sim\chi^2(n_1)$，$X_2\sim\chi^2(n_2)$，X_1 与 X_2 相互独立，则 $X_1+X_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$.

一般地，若 $X_i\sim\chi^2(n_i)(i=1,2,\cdots,m)$，$X_1,X_2,\cdots,X_m$ 相互独立，则 $\sum\limits_{i=1}^{m}X_i\sim\chi^2\left(\sum\limits_{i=1}^{m}n_i\right)$.

②若 $X\sim\chi^2(n)$，则 $EX=n,DX=2n$.

2. t 分布

(1)典型模式.

设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，X 与 Y 相互独立，则随机变量 $t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $t\sim t(n)$.

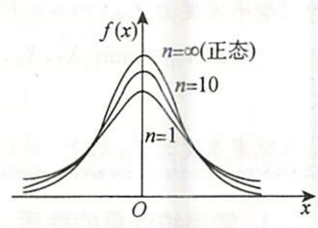


图 6-3

t 分布的概率密度 $f(x)$ 的图形关于 $x=0$ 对称(见图 6-3)，因此 $Et=0(n\geqslant2)$.

(2)t 分布的性质.

由 t 分布的概率密度 $f(x)$ 图形的对称性知

$$P\{t>-t_\alpha(n)\}=P\{t>t_{1-\alpha}(n)\},$$

故 $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$.

3. F 分布

(1)典型模式.

设随机变量 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$服从自由度为(n_1,n_2)的 F 分布，记为 $F\sim F(n_1,n_2)$，其中 n_1 称为第一自由度，n_2 称为第二自由度. F 分布的概率密度 $f(x)$ 的图形如图 6-4 所示.

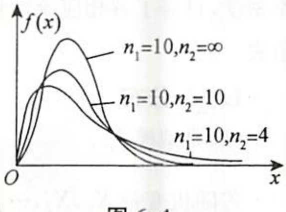


图 6-4

(2)F 分布的性质.

①若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$.

② $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$.

（四）正态总体条件下的常用结论

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{X},S^2$ 分别是样本的均值和方差，则

(1) $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，即 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$；

(2) $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$；

(3) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$（$\mu$ 未知时，在(2)中用 $\overline{X}$ 替代 μ）；

(4) $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$（$\sigma$ 未知时，在(1)中用 S 替代 σ）. 进一步有

$$\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}\sim F(1,n-1).$$

三、参数的点估计

1. 概念

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$（可以是多维的），其中 θ 是一个未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本. 由样本构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 作为参数 θ 的估计，则称统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的**估计量**，通常记为 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本的一个观察值，将其代入估计量 $\hat{\theta}$ 中得值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，并以此值作为未知参数 θ 的近似值，统计中称这个值为未知参数 θ 的**估计值**.

建立一个适当的统计量作为未知参数 θ 的估计量，并以相应的观察值作为未知参数估计值的问题，称为参数 θ 的**点估计问题**.

2. 方法

(1)矩估计法.

设总体 X 分布中有 k 个未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，如果 X 的原点矩 $E(X^l)(l=1,2,\cdots,k)$ 存在，即 $E(X^l)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^lf(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)\mathrm{d}x$ 或 $E(X^l)=\sum\limits_i x_i^lP\{X=x_i;\theta_1,\cdots,\theta_k\}$ 存在. 令样本矩 = 总体矩，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l=E(X^l)(l=1,2,\cdots,k),$$

这是包含 k 个未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的 k 个联立方程组（称为矩法方程），由此解得

$$\hat{\theta}_l=\hat{\theta}_l(X_1,X_2,\cdots,X_n)(l=1,2,\cdots,k),$$

则 $\hat{\theta}_l(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ_l 的**矩估计量**，$\hat{\theta}_l(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 θ_l 的**矩估计值**.

【注】 矩估计法不要求总体服从什么分布，只要总体矩 $E(X^l)$ 存在即可. 计算 $E(X^l)$ 及解矩法方程 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l=E(X^l)$ 是求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$ 的关键. 若这里 l 取多少没有明确规定的话，基于矩法方程求得的 θ 的估计量就可能不唯一了. 例如，总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，λ 未知. 令 $\overline{X}=EX=\lambda$，得 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1=\overline{X}$；如果令 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=DX=\lambda$，得 λ 的另一个矩估计量 $\hat{\lambda}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. 为了使矩估计量有一个选定的标准，就需要约定或补充其他准则. **约定：用矩法方程求总体未知参数的估计量时，从低阶开始.**

(2)最大似然估计法.

①基本思想(最大似然原理).

对未知参数 θ 进行估计时，在该参数可能的取值范围 I 内选取，用使"样本获此观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$"的概率最大的参数值 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计，这样选定的 $\hat{\theta}$ 最有利于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的出现.

(i)设总体 X 是离散型随机变量，其概率分布为 $P\{X=x\}=p(x;\theta),\theta\in I$，$\theta$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 X 的一个样本，则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的概率是

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta),$$

显然这个概率值是 θ 的函数，将其记为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta),$$

称 $L(\theta)$ 为样本的**似然函数**. 若存在 $\hat{\theta}\in I$，使

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta\in I}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta),$$

则称 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为参数 θ 的**最大似然估计值**，而相应的统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为参数 θ 的**最大似然估计量**.

(ii)同理，如果总体 X 是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x;\theta),\theta\in I$，则样本的似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta).$$

若存在 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in I$，使

$$L(\hat{\theta})=\max_{\theta\in I}\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta),$$

则称 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为参数 θ 的**最大似然估计值**，而相应的统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为参数 θ 的**最大似然估计量**.

②求最大似然估计量的步骤.

(i)写出样本的似然函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\text{ 或 }\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k).$$

(ii)如果 $p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 或 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 关于 $\theta_i(i=1,2,\cdots,k)$ 可微，则令

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}=0\text{ 或 }\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta_i}=0.$$

由于 $L(\theta)$ 是乘积形式，又 $\ln x$ 是 x 的单调增函数，因此 $L(\theta)$ 与 $\ln L(\theta)$ 在同一 θ 处取极值，所以更多的是采用解对数似然方程组的方法：$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}=0$，求得 θ_i 的最大似然估计量

$$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)(i=1,2,\cdots,k).$$

(iii)如果 $p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 或 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 不可微，或似然方程组无解，则应由定义用其他方法求得 $\hat{\theta}_i$，例如当 $L(\theta)$ 为 θ 的单调增（或减）函数时，$\hat{\theta}$ 为 θ 取值的上限（或下限）.

【注】 求总体分布中未知参数 θ 的最大似然估计量必须知道总体的概率分布或密度. 写出样本的似然函数（或对数似然函数），并求其最大值点是解题的关键.

③最大似然估计量的不变性原则.

设 $\hat{\theta}$ 是总体分布中未知参数 θ 的最大似然估计，函数 $u=u(\theta)$ 具有单值的反函数 $\theta=\theta(u)$，则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计.

【注】 对于多个未知参数，不变性原则仍然成立.

3. 估计量的评价标准（仅数学一要求）

(1)无偏性.

若参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 对一切 n 及 $\theta\in I$，有 $E\hat{\theta}=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**无偏估计量**.

(2)有效性（最小方差性）.

设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量，如果 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ **有效**.

(3)一致性（相合性）.

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为未知参数 θ 的估计量，如果对任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$，即 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$ $(n\to\infty)$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**一致估计量（或相合估计量）**.

【注】 无偏性、有效性、一致性（相合性）是评价点估计量的一些基本标准，它们都是在某种意义下用于衡量估计量 $\hat{\theta}$ 与未知参数 θ 的"接近"程度，是从某一特定方面来评价其优良性的.

四、参数的区间估计（仅数学一要求）

1. 基本概念

设 θ 是总体 X 的一个未知参数，对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，如果由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)(\hat{\theta}_1<\hat{\theta}_2)$，使

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的**置信区间**，$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的**置信下限**和**置信上限**，$1-\alpha$ 称为**置信度**或**置信水平**，α 称为显著性水平.

给定置信度求未知参数置信区间的问题，称为**参数的区间估计问题**.

【注】 置信区间的长度表示估计的精度，置信区间越短表示估计的精度越高.

2. 正态总体均值的置信区间(置信水平为 $1-\alpha$)

待估参数	其他参数	枢轴量的分布	置信区间
μ	σ^2 已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
μ	σ^2 未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

五、假设检验(仅数学一要求)

1. 思想方法

关于总体(分布中的未知参数，分布的类型、特征、相关性、独立性…)的每一种论断("看法")称为**统计假设**. 然后根据样本观察数据或试验结果所提供的信息去推断(检验)这个"看法"(即假设)是否成立，这类统计推断问题称为**统计假设检验问题**，简称为**假设检验**. 如果总体分布函数 $F(x;\theta)$ 形式已知，但其中的参数 θ 未知，只涉及参数 θ 的各种统计假设称为**参数假设**. 如果一个统计假设完全确定总体的分布，则称这种假设为**简单假设**. 常常把着重考查、没有充分理由不能轻易否定的假设取为**原假设(基本假设或零假设)**，记为 H_0，将其否定的陈述(假设)称为**对立假设或备择假设**，记为 H_1. 对原假设 H_0 作出否定或不否定的推断，通常称为对 H_0 作**显著性检验**.

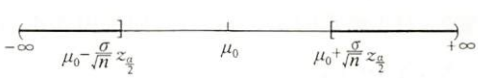
对这些假设进行检验的**基本思想是采用带有概率性质的反证法**，即"小概率原理"，也即"概率很接近于 0 的事件在一次试验或观察中认为它不会发生"，若发生了，则拒绝原假设 H_0. 小概率事件中"小概率"的值没有统一规定，通常是根据实际问题的要求，规定一个界限 $\alpha(0<\alpha<1)$，当一个事件的概率不大于 α 时，即认为它是小概率事件，在假设检验问题中，α 称为**显著性水平**，通常取 $\alpha=0.1,0.05,0.01$ 等.

在假设检验中，由拒绝原假设 H_0 的全体样本点所组成的集合 C 称为**否定域(或拒绝域)**，C 的补集 C^* 称为 H_0 的**接受域**.

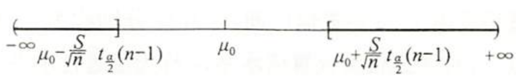
如果 H_0 的否定域形式为 $C=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid T>\lambda_2$ 或 $T<\lambda_1,\lambda_1<\lambda_2\}$，即否定域位于接受域的两侧，则称这种检验为**双边检验**. 如果 H_0 的否定域形式为 $C=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid T>\lambda\}$ 或者 $C=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid T<\lambda\}$，即否定域位于接受域的一侧，右侧或左侧，称这种检验为**右边检验或左边检验**，统称为**单边检验**.

2. 正态总体下的六大检验及拒绝域

(1) σ^2 已知，μ 未知. $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$.

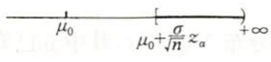


(2) σ^2 未知，μ 未知. $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$.



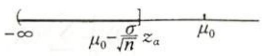
(3)σ^2 已知，μ 未知. $H_0:\mu\leqslant\mu_0$，$H_1:\mu>\mu_0$.

（或写 $\mu=\mu_0$）



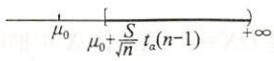
(4)σ^2 已知，μ 未知. $H_0:\mu\geqslant\mu_0$，$H_1:\mu<\mu_0$.

（或写 $\mu=\mu_0$）



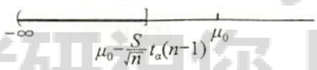
(5)σ^2 未知，μ 未知. $H_0:\mu\leqslant\mu_0$，$H_1:\mu>\mu_0$.

（或写 $\mu=\mu_0$）



(6)σ^2 未知，μ 未知. $H_0:\mu\geqslant\mu_0$，$H_1:\mu<\mu_0$.

（或写 $\mu=\mu_0$）



六、两类错误（仅数学一要求）

第一类错误（“弃真”）：若 H_0 为真，按检验法则否定 H_0，此时犯了“弃真”的错误，这种错误称为第一类错误，犯第一类错误的概率为 $\alpha=P\{$拒绝 $H_0|H_0$ 为真$\}$.

第二类错误（“取伪”）：若 H_0 不真，按检验法则接受 H_0，此时犯了“取伪”的错误，这种错误称为第二类错误，犯第二类错误的概率为 $\beta=P\{$接受 $H_0|H_0$ 为假$\}=P\{$接受 $H_0|H_1$ 为真$\}$.

【注】 犯两类错误的概率 α 与 β，并不满足 $\beta=1-\alpha$，在固定样本容量 n 的条件下，α 小，β 就大；β 小，α 就大. 在实际应用中，我们总是在控制 α 的条件下，尽量使 β 小，这是因为人们常常把拒绝 H_0 比错误地接受 H_0 看得更重要些.

基础例题精解

一、统计量的概念、性质及应用

例 6.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n>2)$ 为独立同分布的随机变量，且均服从正态分布 $N(0,1)$，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n$. 求 Y_i 的方差 DY_i，$i=1,2,\cdots,n$.

解 $DY_i=D(X_i-\overline{X})$

$$=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i-\frac{1}{n}\sum_{k\neq i}^{n}X_k\right]=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n-1}{n^2}$$

$$=\frac{n-1}{n},i=1,2,\cdots,n.$$

例 6.2 (1)设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 已知，σ^2 未知. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，则下列样本函数中不是统计量的是(　　).

(A)$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　　　　(B)$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$

(C)$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$　　　　(D)$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

解 应选(C).

由统计量的定义“不含任何未知参数的样本函数”，即知不是统计量的选项应该是(C)，因为(C)中含有未知参数 σ，故选择(C).

(2)已知总体 X 的期望 $EX=0$，方差 $DX=\sigma^2$，从总体 X 中抽取容量为 n 的简单随机样本，其均值、方差分别为 $\overline{X},S^2$. 记 $S_k^2=\frac{n}{k}\overline{X}^2+\frac{1}{k}S^2(k=1,2,3,4)$，则(　　).

(A)$E(S_1^2)=\sigma^2$　　　　(B)$E(S_2^2)=\sigma^2$

(C)$E(S_3^2)=\sigma^2$　　　　(D)$E(S_4^2)=\sigma^2$

解 应选(B).

这是一道计算性选择题，应用 $E\overline{X}=EX=0,D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n},E(S^2)=\sigma^2$，通过计算 $E(S_k^2)$来确定正确选项.

由于 $E(\overline{X}^2)=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n},E(S^2)=\sigma^2$，故

$$E(S_k^2)=\frac{n}{k}E(\overline{X}^2)+\frac{1}{k}E(S^2)=\frac{n}{k}\cdot\frac{\sigma^2}{n}+\frac{1}{k}\sigma^2=\frac{2}{k}\sigma^2.$$

当 $k=2$ 时，$E(S_2^2)=\sigma^2$，选择(B).

二、三大分布——χ^2分布、t 分布和 F 分布及其应用

1. χ^2分布

例 6.3 设 X_1,X_2,X_3,X_4是来自正态总体 $N(0,2^2)$的简单随机样本，记

$$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2,$$

则当 $a=$________，$b=$________时，统计量 X 服从 χ^2分布，其自由度为________. $(ab\neq0)$

解 应填$\frac{1}{20}$;$\frac{1}{100}$;2.

由条件知 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立且同服从正态分布 $N(0,2^2)$. 因此 X_1-2X_2 服从正态分布 $N(0,20)$，而 $3X_3-4X_4$服从正态分布 $N(0,100)$，并且相互独立. 由 χ^2分布的典型模式知

$$T=\frac{(X_1-2X_2)^2}{20}+\frac{(3X_3-4X_4)^2}{100}$$

服从自由度为 2 的 χ^2分布，从而 $a=\frac{1}{20},b=\frac{1}{100}$时统计量 X 服从自由度为 2 的 χ^2分布.

2. t 分布

例 6.4 设总体 $X\sim N(0,3^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_8$是来自总体 X 的简单随机样本，则统计量

$$Y=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{\sqrt{X_5^2+X_6^2+X_7^2+X_8^2}}$$

服从参数为________的________分布.

解 应填4;t.

由于相互独立且服从正态分布的随机变量的线性组合仍然服从正态分布,易见

$$U=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{\sqrt{D(X_1+X_2+X_3+X_4)}}=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{6}\sim N(0,1).$$

作为相互独立的服从标准正态分布的随机变量的平方和,

$$V=\frac{X_5^2}{9}+\frac{X_6^2}{9}+\frac{X_7^2}{9}+\frac{X_8^2}{9}$$

服从χ^2分布,自由度为4.随机变量U和V显然相互独立.则随机变量Y可以表示为

$$Y=\frac{(X_1+X_2+X_3+X_4)/6}{\sqrt{\frac{X_5^2+X_6^2+X_7^2+X_8^2}{9}\Big/4}}=\frac{U}{\sqrt{V/4}}.$$

由t分布的典型模式,可见随机变量Y服从自由度为4的t分布.

3. F分布

例6.5 设$X_1,X_2,\cdots,X_{15}$是来自正态总体$N(0,9)$的简单随机样本,则统计量

$$Y=\frac{1}{2}\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2}$$

服从参数为________的________分布.

解 应填(10,5);F.

由χ^2分布的典型模式,知

$$\chi_1^2=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{9}\text{和}\chi_2^2=\frac{X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2}{9}$$

服从自由度相应为10和5的χ^2分布,且相互独立.从而,由F分布的典型模式,知

$$Y=\frac{1}{2}\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2}=\frac{\frac{\chi_1^2}{10}}{\frac{\chi_2^2}{5}}$$

服从自由度为(10,5)的F分布.

三、参数的点估计

1. 矩估计法

例6.6 设来自总体X的简单随机样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$,总体X的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2\theta & \theta & 1-3\theta\end{pmatrix},$$

其中$0<\theta<\frac{1}{3}$.求未知参数θ的矩估计量.

解 总体X的数学期望为

$$EX=-2\theta+2(1-3\theta)=2-8\theta.$$

用样本均值 $\overline{X}$ 估计数学期望 EX，$\overline{X}=EX=2-8\theta$，得 θ 的矩估计量

$$\hat{\theta}=\frac{1}{8}(2-\overline{X}).$$

2. 最大似然估计法

例 6.7 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 是未知参数，从总体 X 中抽取容量为 8 的一组样本，其样本值为 3,1,3,0,3,1,2,3. 求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

解 由于总体分布仅含一个未知参数，因此矩法方程为 $EX=\overline{X}$，其中

$$\overline{X}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}X_i,$$

$$EX=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\theta^2+3(1-2\theta)=3-4\theta,$$

令 $3-4\theta=\overline{X}$，解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{3-\overline{X}}{4}$，由样本值算得

$$\overline{x}=\frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3)=2,$$

所以 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}$.

已知总体 X 的概率分布为 $p_i=P\{X=x_i\}=p(x_i;\theta)$，故样本值 $x_i(1\leqslant i\leqslant 8)$ 的似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_8;\theta)=\prod_{i=1}^{8}p(x_i;\theta)=\theta^2[2\theta(1-\theta)]^2\theta^2(1-2\theta)^4$$
$$=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4.$$

取对数，
$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

令
$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}=0,$$

即 $12\theta^2-14\theta+3=0$，解得 $\theta=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$，因为 $\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2}$ 不合题意，故 θ 最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

【注】 似然方程满足条件的解 $\hat{\theta}$ 一般就认为是最大似然估计而不加以验证. 原则上是需要证明的，然而有些问题证明是不容易的，甚至是不可能的. 如果能断言 $L(\theta)$ 有最大值点，而且似然方程只有唯一解 $\hat{\theta}$，则 $\hat{\theta}$ 为最大似然估计，此外有些问题可用微积分方法来验证，如本例. 事实上，由于

$$\frac{\mathrm{d}^2[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta^2}=\frac{-6}{\theta^2}-\frac{2}{(1-\theta)^2}-\frac{16}{(1-2\theta)^2}<0,$$

因此 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$ 使 $L(\theta)$ 达到最大，因而满足条件的解为 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

3. 估计量的评价标准(仅数学一要求)

(1)无偏性.

例 6.8 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本,为使

$$D=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$$

成为总体方差 σ^2的无偏估计量,则 $k=($ $)$.

(A)$\frac{1}{n-1}$ (B)$\frac{1}{n}$ (C)$\frac{1}{2(n-1)}$ (D)$\frac{1}{2n}$

解 应选(C).

由条件知:$E(X^2)=\sigma^2+\mu^2$. 假如统计量 D 是总体方差 σ^2的无偏估计量,则

$$\begin{aligned}ED&=k\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2=k\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}^2+X_i^2-2X_iX_{i+1})\\&=k\sum_{i=1}^{n-1}(2\sigma^2+2\mu^2-2\mu^2)\\&=2k(n-1)\sigma^2=\sigma^2,\end{aligned}$$

于是,$k=\frac{1}{2(n-1)}$,故选(C).

例 6.9 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的一个简单随机样本,记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2,$$

证明:T 是 μ^2 的无偏估计量.

证明 由于

$$\begin{aligned}ET&=E\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)=E(\overline{X}^2)-\frac{1}{n}E(S^2)\\&=D\overline{X}+(E\overline{X})^2-\frac{1}{n}E(S^2)=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}\\&=\mu^2,\end{aligned}$$

从而知,T 是 μ^2的无偏估计量.

(2)有效性(最小方差性).

例 6.10 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,X_1,X_2,X_3是来自 X 的简单随机样本,证明估计量

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3,$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3,$$

$$\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3$$

都是 μ 的无偏估计,并指出它们中哪一个最有效.

证明 因

$$E\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}EX_1+\frac{3}{10}EX_2+\frac{1}{2}EX_3=\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\right)\mu=\mu,$$

$$E\hat{\mu}_2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}\right)\mu=\mu,$$

$$E\hat{\mu}_3=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\mu=\mu,$$

故$\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3$都是$\mu$的无偏估计.

又

$$D\hat{\mu}_1=\frac{1}{25}DX_1+\frac{9}{100}DX_2+\frac{1}{4}DX_3=\frac{38}{100}\sigma^2=0.38\sigma^2,$$

$$D\hat{\mu}_2=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{25}{144}\right)\sigma^2=\frac{50}{144}\sigma^2=0.347\sigma^2,$$

$$D\hat{\mu}_3=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{4}\right)\sigma^2=\frac{14}{36}\sigma^2=0.389\sigma^2,$$

所以$\hat{\mu}_2$最有效.

(3)一致性(相合性).

例 6.11 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个简单随机样本,$EX=\mu,DX=\sigma^2$,证明统计量

$$Y=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iX_i$$

是μ的无偏相合估计量.

证明 由于

$$\begin{aligned}EY&=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}E(iX_i)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iEX_i\\&=\frac{2}{n(n+1)}(\mu+2\mu+\cdots+n\mu)\\&=\mu,\end{aligned}$$

从而知,Y是μ的无偏估计量.

又因

$$\begin{aligned}DY&=\left[\frac{2}{n(n+1)}\right]^2\sum_{i=1}^{n}i^2DX_i=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\&=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}\sigma^2,\end{aligned}$$

于是由切比雪夫不等式

$$1\geqslant P\{|Y-\mu|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{DY}{\varepsilon^2}=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{(2n+1)\sigma^2}{n(n+1)\varepsilon^2},$$

两边取极限,由$\lim\limits_{n\to\infty}1=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{2}{3}\cdot\frac{(2n+1)\sigma^2}{n(n+1)\varepsilon^2}\right]=1$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|Y-\mu|<\varepsilon\}=1,$$

所以Y是μ的无偏相合估计量.

四、参数的区间估计(仅数学一要求)

例 6.12 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$(σ^2已知),则在给定样本容量n及置信度$1-\alpha$的情况下,未知参数μ的置信区间长度随着样本均值$\overline{X}$的增加而(　　).

(A)增加　　(B)减少

(C)不变　　(D)不能确定增或减

解 应选(C).

在给定条件下,未知参数 μ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$,其中 $\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\frac{\alpha}{2}$,可见该区间长度 $2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$ 与 $\overline{X}$ 无关,故选择(C).

例 6.13 设总体 X 的方差为 1,根据来自 X 的容量为 100 的简单随机样本,测得样本的均值为 5,则 X 的数学期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为________.

解 应填(4.804,5.196).

尽管 X 未说明是否为正态总体,但是由于样本容量 $n=100$ 属大样本,因此由中心极限定理易得

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{1/\sqrt{100}}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1),$$

查表易知,

$$P\{-1.96<Z<1.96\}=0.95,$$

故 μ 的置信度近似为 0.95 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{1}{10}\times 1.96,\overline{X}+\frac{1}{10}\times 1.96\right),$$

将 $\overline{X}=5$ 代入上式得置信区间为(4.804,5.196).

五、假设检验的两类错误(仅数学一要求)

例 6.14 在假设检验时,对于 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$,称( )为犯第一类错误.

(A) H_1 真,接受 H_1
(B) H_1 不真,接受 H_1
(C) H_1 真,拒绝 H_1
(D) H_1 不真,拒绝 H_1

解 应选(B).

犯第一类错误,即弃真错误,即 H_0 真,但拒绝 H_0,也即 H_1 不真,接受 H_1,故选择(B).

例 6.15 在假设检验中,显著性水平 α 的意义是( ).

(A)原假设 H_0 成立,经检验被拒绝的概率
(B)原假设 H_0 成立,经检验被接受的概率
(C)原假设 H_0 不成立,经检验被拒绝的概率
(D)原假设 H_0 不成立,经检验被接受的概率

解 应选(A).

显著性水平 α 是确定小概率事件的一个界限,由检验准则知,$\alpha=P\{\text{拒绝 } H_0|H_0 \text{ 为真}\}$,所以正确选项是(A).选项(B)所说的概率是 $P\{\text{接受 } H_0|H_0 \text{ 为真}\}=1-\alpha$;(D)是 $P\{\text{接受 } H_0|H_0 \text{ 不成立}\}=P\{\text{犯第二类错误}\}=\beta$;(C)是 $P\{\text{拒绝 } H_0|H_0 \text{ 不成立}\}=1-\beta$.

例 6.16 假定 X 是连续型随机变量,U 是对 X 的(一次)观测值;关于其概率密度 $f(x)$ 有如下假设:

$$H_0:f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad H_1:f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

检验规则:当事件 $V=\left\{U>\frac{3}{2}\right\}$ 出现时,否定假设 H_0,接受 H_1.则犯第一类错误的概率 $\alpha=$

________;犯第二类错误的概率 $\beta=$________.

解 应填 $\frac{1}{4}$;$\frac{9}{16}$.

由 α 和 β 的意义,知

$$\alpha=P\left\{U>\frac{3}{2}\,\middle|\,H_0\right\}=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

$$\beta=P\left\{U\leqslant\frac{3}{2}\,\middle|\,H_1\right\}=\int_{0}^{\frac{3}{2}}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{9}{16}.$$

六、正态总体的假设检验(仅数学一要求)

例 6.17 已知某机器生产出的零件长度 X(单位:cm)服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ,σ^2 均未知,现从中随意抽取容量为 16 的一个样本,测得样本均值 $\overline{x}=10$,样本方差 $s^2=0.16$,$t_{0.025}(15)=2.132$.

(1)求总体均值 μ 置信水平为 0.95 的置信区间;

(2)在显著性水平为 0.05 下检验假设 $H_0:\mu=9.7$,$H_1:\mu\neq 9.7$.

解 (1)在总体方差未知条件下,总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right).$$

由样本均值 $\overline{x}=10$,$s^2=0.16=0.4^2$,求得

$$\left(10-\frac{2.132\times 0.4}{4},10+\frac{2.132\times 0.4}{4}\right)=(9.786\,8,10.213\,2).$$

(2)在方差 σ^2 未知的条件下对总体均值进行检验.

①$H_0:\mu=9.7$,$H_1:\mu\neq 9.7$.

②拒绝域为 $\left(-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]\cup\left[\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty\right)$,代入数值,计算得 $(-\infty,9.486\,8]\cup[9.913\,2,+\infty)$,由 $\overline{x}=10$ 知,落入拒绝域,故否定 H_0,即认为 $\mu\neq 9.7$.

基础习题精练

习题

6.1 设总体 X 与 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,$\overline{X}$,$\overline{Y}$ 是分别来自总体 X,Y,容量都为 n 的样本的均值,则当 n 固定时,概率 $P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>\sigma\}$ 的值随 σ 的增大而( ).

(A)单调增大 (B)单调减小 (C)保持不变 (D)增减不定

6.2 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 的简单随机样本,则统计量 $Y=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$ 服从自由度为________的________分布.

6.3 设总体 $X\sim N(\mu_1,4)$,$Y\sim N(\mu_2,5)$,X 与 Y 相互独立,$X_1,\cdots,X_8$ 和 $Y_1,\cdots,Y_{10}$ 是分别来自总体

X 和 Y 的两个样本，S_X^2 与 S_Y^2 分别为两个样本的方差，则(　　).

(A)$\dfrac{2S_X^2}{5S_Y^2}\sim F(7,9)$　　(B)$\dfrac{5S_X^2}{2S_Y^2}\sim F(7,9)$　　(C)$\dfrac{4S_X^2}{5S_Y^2}\sim F(7,9)$　　(D)$\dfrac{5S_X^2}{4S_Y^2}\sim F(7,9)$

6.4 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其样本方差为 S^2，则 $E(S^2)=$______.

6.5 已知总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(1+\theta)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数，设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本容量为 n 的简单随机样本，求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

6.6 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\alpha^2}, & 0\leqslant x\leqslant\alpha,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $\alpha>1$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1)求 $p=P\{0<X<\sqrt{\alpha}\}$；

(2)求 p 的最大似然估计量 $\hat{p}$.

6.7 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$，计算 $\hat{\theta}$ 的方差 $D\hat{\theta}$，并讨论 $\hat{\theta}$ 的无偏性、一致性(无偏性、一致性仅对数学一).

6.8 已知总体 X 的分布函数为

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & \alpha\leqslant x,\\ 0, & \alpha>x,\end{cases}$$

其中参数 $\alpha\geqslant1,\beta>1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，求：

(1)当 $\alpha=1$ 时，参数 β 的矩估计量；

(2)当 $\alpha=1$ 时，参数 β 的最大似然估计量；

(3)当 $\beta=2$ 时，参数 α 的最大似然估计量.

6.9(仅数学一) 一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知. 现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值 $\overline{x}=20$ cm，样本标准差 $s=1$ cm，则 μ 的置信水平为 0.90 的置信区间为(　　).

(A)$\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\dfrac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$　　(B)$\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\dfrac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$

(C)$\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\dfrac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$　　(D)$\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\dfrac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$

解答

6.1 (C) 解 要计算概率需要知道 $\overline{X}-\overline{Y}$ 的分布. 依题意 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$, $\overline{Y}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ 且相互独立, 故 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(0,\frac{2\sigma^2}{n}\right)$, 由此可知当 n 固定时, $P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>\sigma\}=P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{n}}\right|>\sqrt{\frac{n}{2}}\right\}$ 与 σ 无关, 故所求概率值保持不变, 选择(C). 事实上,

$$P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>\sigma\}=1-P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{n}}\right|\leqslant\sqrt{\frac{n}{2}}\right\}=1-\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]$$
$$=2\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right].$$

6.2 2; t 解 取 $X=X_1-X_2$, 则 $EX=0, DX=DX_1+DX_2=1, X\sim N(0,1)$.

又 $E(\sqrt{2}X_i)=0, D(\sqrt{2}X_i)=2DX_i=1$, 知 $\sqrt{2}X_i\sim N(0,1)$, 从而

$$Y_1=(\sqrt{2}X_3)^2+(\sqrt{2}X_4)^2\sim\chi^2(2),$$

又 X 与 Y_1 相互独立, 因此 $Y=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y_1}{2}}}\sim t(2)$, 即 Y 服从自由度为 2 的 t 分布.

6.3 (D) 解 显然我们要用 $F(7,9)$ 典型模式来确定正确选项. 如果 $aQ\sim\chi^2(m)$, $bT\sim\chi^2(n)$, Q 与 T 独立, 则 $\frac{aQ/m}{bT/n}=\frac{naQ}{mbT}\sim F(m,n)$. 依题意

$$\frac{7S_X^2}{4}=\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{2}\right)^2\sim\chi^2(7),\quad \frac{9S_Y^2}{5}=\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{Y_i-\overline{Y}}{\sqrt{5}}\right)^2\sim\chi^2(9).$$

S_X^2 与 S_Y^2 相互独立, 因此服从 $F(7,9)$ 分布的统计量 $A\frac{S_X^2}{S_Y^2}$, 其系数应是 $A=\frac{\frac{7}{4}\Big/7}{\frac{9}{5}\Big/9}=\frac{5}{4}$, 选择(D).

【注】 通过 F 分布典型模式的系数与自由度的关系确定选项.

6.4 2 解 因为样本方差的数学期望等于总体的方差, 即 $E(S^2)=DX$, 而

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0,$$
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2,$$

故
$$E(S^2)=DX=E(X^2)-(EX)^2=2-0=2.$$

6.5 解 $\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(1+\theta)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\frac{1+\theta}{2+\theta}$, $\quad\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

令 $\mu_1=\overline{X}$, 即 $\frac{1+\theta}{2+\theta}=\overline{X}$, 解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值, 则似然函数为

$$L(\theta)=(1+\theta)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}(0<x_i<1, i=1,2,\cdots,n),$$

取对数得

$$\ln L(\theta)=n\ln(1+\theta)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令
$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{1+\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$
解得唯一解 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$，则 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$.

6.6 解 (1) $p=P\{0<X<\sqrt{\alpha}\}=\int_0^{\sqrt{\alpha}}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha}$.

(2) 当 $0\leqslant x_1\leqslant\alpha,0\leqslant x_2\leqslant\alpha,\cdots,0\leqslant x_n\leqslant\alpha$ 时，似然函数为
$$L(\alpha)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=\frac{2^n}{\alpha^{2n}}x_1x_2\cdots x_n,$$
显然 $L(\alpha)$ 关于 α 单调减少，且 $\alpha\geqslant\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则 α 的最大似然估计量为 $\hat{\alpha}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

又由(1)知 $p=\dfrac{1}{\alpha}$ 关于 α 是单调函数，根据最大似然估计的不变性，有 p 的最大似然估计量为
$$\hat{p}=\frac{1}{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}}.$$

6.7 解 由矩法方程 $EX=\overline{X}$，其中 $EX=\int_0^{\theta}\dfrac{6x^2(\theta-x)}{\theta^3}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta}{2}$，即由 $\dfrac{\theta}{2}=\overline{X}$，解得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}$，且 $D\hat{\theta}=4D\overline{X}=\dfrac{4DX}{n}$，其中 $DX=E(X^2)-(EX)^2$.
$$E(X^2)=\int_0^{\theta}\frac{6x^3(\theta-x)}{\theta^3}\mathrm{d}x=\frac{6}{\theta^3}\left(\theta\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^{\theta}=\frac{3}{10}\theta^2,$$
$$DX=\frac{3}{10}\theta^2-\frac{\theta^2}{4}=\frac{\theta^2}{20},$$
故 $D\hat{\theta}=\dfrac{4\theta^2}{20n}=\dfrac{\theta^2}{5n}$.

由于 $E\hat{\theta}=2E\overline{X}=2\cdot EX=2\cdot\dfrac{\theta}{2}=\theta$. 又由辛钦大数定律 $\overline{X}\xrightarrow{P}EX=\dfrac{\theta}{2}$，故 $\hat{\theta}=2\overline{X}\xrightarrow{P}2\cdot\dfrac{\theta}{2}=\theta$，所以 $\hat{\theta}=2\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计、一致估计.

【注】 由于 $E\hat{\theta}=\theta,D\hat{\theta}=\dfrac{\theta^2}{5n}$，因此由切比雪夫不等式知：对任意 $\varepsilon>0$，有
$$0\leqslant P\{|\hat{\theta}-\theta|\geqslant\varepsilon\}=P\{|\hat{\theta}-E\hat{\theta}|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D\hat{\theta}}{\varepsilon^2}=\frac{\theta^2}{5n\varepsilon^2}\to0\ (n\to\infty),$$
即 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0$，所以 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$，$\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计.

6.8 解 (1) 当 $\alpha=1$ 时，X 的分布函数为
$$F(x;\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & 1\leqslant x,\\ 0, & 1>x,\end{cases}$$
则 X 的概率密度为
$$f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & 1<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$
由
$$\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\beta x^{-\beta}\mathrm{d}x=\frac{\beta}{1-\beta}x^{1-\beta}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\beta}{\beta-1},$$

令 $\mu_1=\overline{X}$,由$\dfrac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$,解得 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}_1=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

(2)当 $\alpha=1$ 时,设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值,则似然函数为

$$L(\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, & 1<x_1,x_2,\cdots,x_n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

当 $x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$ 时,取对数得

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

解得 $\hat{\beta}_2=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$,则 β 的最大似然估计量为 $\hat{\beta}_2=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

(3)当 $\beta=2$ 时,X 的分布函数为 $F(x;\alpha)=\begin{cases}1-\dfrac{\alpha^2}{x^2}, & \alpha\leqslant x,\\ 0, & \alpha>x,\end{cases}$

则 X 的概率密度为 $f(x;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^2}{x^3}, & \alpha<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值,则似然函数为

$$L(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}, & \alpha<x_1,x_2,\cdots,x_n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

当 $x_i>\alpha(i=1,2,\cdots,n)$ 时,取对数得

$$\ln L(\alpha)=n\ln 2+2n\ln\alpha-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{2n}{\alpha}>0,$$

故不能通过求导求出其最大似然估计量,可以直接从最大似然原理出发确定,即当 α 越大,则 $L(\alpha)$ 越大,总有

$$L(\alpha)=\frac{2^n\alpha^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}\leqslant L(\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\})=\frac{2^n\min^{2n}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3},$$

因此 $\hat{\alpha}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 为 α 的最大似然估计量.

【注】 在求最大似然估计量时可能出现似然方程无解的情况,但不表示题目无解,而是要根据最大似然原理,寻求其他定值方法,如利用单调性,似然函数在参数取值区域的边界点取到最值.

6.9 (C) **解** σ^2 未知,均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right),$$

其中,在给定条件下,$\overline{x}=20,s=1,t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.05}(15)$,则所求参数 μ 的置信水平为 0.90 的置信区间为

$$\left(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right),$$

故选择(C).

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

张宇

博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部"国家精品课程建设骨干教师"，全国畅销书《张宇考研数学基础30讲》《张宇考研数学题源探析经典1000题》《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》《张宇考研数学真题大全解》《考研数学命题人终极预测8套卷》《张宇考研数学最后4套卷》《张宇经济类综合能力数学通关优题库》作者，高等教育出版社原《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》及《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》编者之一，北京、上海、广州、西安等全国著名考研数学辅导班首席主讲。

张宇考研数学系列丛书

教材类

张宇考研数学基础30讲·高等数学分册 书课包
张宇考研数学基础30讲·线性代数分册 书课包
张宇考研数学基础30讲·概率论与数理统计分册 书课包
张宇高等数学18讲 书课包
张宇线性代数9讲 书课包
张宇概率论与数理统计9讲 书课包

题集类

张宇考研数学题源探析经典1000题（分数学一、数学二、数学三） 书课包
张宇考研数学真题大全解（分数学一、数学二、数学三） 书课包
考研数学命题人终极预测8套卷（分数学一、数学二、数学三） 书课包
张宇考研数学最后4套卷（分数学一、数学二、数学三） 书课包

北京理工大学出版社网址：http://www.bitpress.com.cn

宇哥考研
新浪微博二维码

张宇考研数学
微信公众号

启航教育
微信公众号

ISBN 978-7-5763-1430-4

9 787576 314304 >

定价：69.90元