启航教育 云图 YUN TU

2024版

张宇考研数学系列丛书·三

书课包

张宇概率论与数理统计9讲

闭关修炼

主编 张宇

副主编 高昆轮

北京理工大学出版社

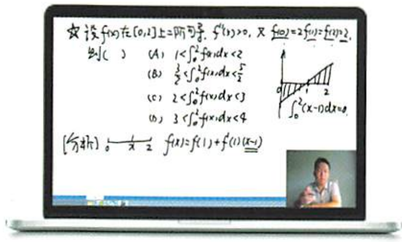
课程有效期至2023年12月31日
扫码领课

xy66
岸)

2024张宇考研数学

《题源探析经典1000题》书课包

一套覆盖基础 & 强化阶段的习题册



符合考研数学命题趋势，严格区分数学一、数学二、数学三

难度分级：题目按难易程度分为A、B、C三组

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

《1000题》书课包使用指南

基础阶段：现在—2023年5月

《基础30讲》书课包+《1000题》书课包A组题

扫码听讲解
学习更高效

A组题目类型：考查基本的概念、公式和定理；题型常规且计算量不大

强化阶段：2023年3月—8月

《强化36讲》闭关修炼书课包+《1000题》书课包B组&C组题

扫码听讲解
学习更高效

B组&C组题目类型：考查比较复杂的概念、公式和定理；题型常规但计算量较大；题型新颖且综合性强

启航教育 云图 YUN TU

张宇考研数学系列丛书·三

书课包

张宇概率论与数理统计9讲

闭关修炼

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

○主编 张宇

○副主编 高昆轮

张宇考研数学系列丛书编委（按姓氏拼音排序）

蔡茂勇 蔡燧林 曹泽祺 陈静静 方春贤 高昆轮 胡金德 华炜超 贾建厂

刘硕 吕盼静 吕倩 马丁 秦艳鱼 沈利英 石臻东 全雨晨 王国娟 王慧珍

王爽 王燕星 徐兵 严守权 亦一(笔名) 曾凡(笔名) 张翀 张乐 张雷 张青云

张勇利 张宇 赵海婧 郑利娜 朱杰

北京理工大学出版社

版权专有　侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

张宇概率论与数理统计 9 讲 / 张宇主编. — 北京：北京理工大学出版社，2022.1(2023.1 重印)

ISBN 978-7-5763-0853-2

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-自学参考资料　②数理统计-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 018222 号

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68944723(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 6
字　　数 / 150 千字
版　　次 / 2022 年 1 月第 1 版　2023 年 1 月第 4 次印刷
定　　价 / 99.90 元

责任编辑 / 多海鹏
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 刘亚男
责任印制 / 李志强

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前　言

《张宇高等数学 18 讲》《张宇线性代数 9 讲》《张宇概率论与数理统计 9 讲》是供参加全国硕士研究生招生考试的考生全程使用的考研数学教材，在考生全面复习《张宇考研数学基础 30 讲》，夯实基础的条件下，本书突出综合性、计算性与新颖性，全面、准确反映考研数学的水平与风格.

本书有如下三大特色.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

第一个特色：每一讲开篇列出的知识结构.这不同于一般的章节目录，而是科学、系统、全面地给出本讲知识的内在逻辑体系和考研数学试题命制思路，是我们多年教学和命题经验的结晶.希望读者认真学习、思考、反复研究并熟稔于心.

第二个特色：对知识结构系统性、针对性的讲述.这也是本书的主体——讲授内容与题目.讲授内容的特色在于在讲解知识的同时，指出考什么、怎么考（这在普通教材上几乎是没有的），并在讲授内容后给出精心命制、编写和收录的优秀题目，使得讲授内容和具体实例紧密结合，非常有利于读者快速且深刻掌握所学知识并达到考研要求.

第三个特色：本书所命制、编写和收录题目的较高价值性.这些题目皆为多年参加考研命题和教学的专家们潜心研究、反复酝酿、精心设计的好题、妙题.它们能够在与考研数学试题无缝衔接的同时，精准提高读者的解题水平和应试能力.同时，本书集中回答并切实解决读者在复习过程中的疑点和弱点.

感谢命题专家们给予的支持、帮助与指导，他们中有的老先生已年近九旬；感谢编辑老师们的辛勤工作与无私奉献，他们中有的已成长为可独当一面的专家；感谢一届又一届考生的努力与信任，他们中有的已硕士毕业、博士毕业并成为各自专业领域的佼佼者.

希望读者闭关修炼、潜心研读本书，在考研数学中取得好成绩.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

张宇

2023 年 1 月于北京

目录

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第1讲 随机事件和概率

知识结构

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

- 古典概型求概率
  - 随机分配问题
    - ①每盒容纳任意多个质点
    - ②每盒容纳至多一个质点
  - 简单随机抽样问题
    - ①先后有放回
    - ②先后无放回
    - ③任取
- 几何概型求概率 —— $P(A)=\dfrac{A\text{的度量(长度、面积)}}{\Omega\text{的度量(长度、面积)}}$
- 重要公式求概率
  - 用对立
    - ① $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$ （长杠变短杠，开口换方向）
    - ② $P(A)=1-P(\overline{A})$
  - 用互斥
    - ① $A\cup B=A\cup\overline{A}B=B\cup A\overline{B}=A\overline{B}\cup AB\cup\overline{A}B$
    - ②若 B_1,B_2,B_3 为完备事件组，则 $A=AB_1\cup AB_2\cup AB_3$
    - ③ $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$
    - ④ $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
    - ⑤ $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$
    - ⑥若 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 两两互斥，则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$
  - 用独立
    - ① $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$
    - ② $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod\limits_{i=1}^{n}[1-P(A_i)]$
  - 用条件
    - ① $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$
    - ② $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$
    - ③ $P(A_j\mid B)=\dfrac{P(A_jB)}{P(B)}=\dfrac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$
  - 用不等式或包含
    - ① $0\leqslant P(A)\leqslant 1$
    - ②若 $A\subseteq B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$
    - ③由于 $AB\subseteq A\subseteq A+B$，故 $P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A+B)$
  - 用最值
    - ① $\{\max\{X,Y\}\leqslant a\}=\{X\leqslant a\}\cap\{Y\leqslant a\}$
    - ② $\{\max\{X,Y\}>a\}=\{X>a\}\cup\{Y>a\}$
    - ③ $\{\min\{X,Y\}\leqslant a\}=\{X\leqslant a\}\cup\{Y\leqslant a\}$
    - ④ $\{\min\{X,Y\}>a\}=\{X>a\}\cap\{Y>a\}$
    - ⑤ $\{\max\{X,Y\}\leqslant a\}\subseteq\{\min\{X,Y\}\leqslant a\}$
    - ⑥ $\{\min\{X,Y\}>a\}\subseteq\{\max\{X,Y\}>a\}$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

事件独立性的判定

- 定义 — 若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则事件 A 与 B 相互独立
- 判定
  - ① A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow$ A 与 $\overline{B}$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立
  - ②对独立事件组不含相同事件作运算，得到的新事件组仍独立
  - ③若 $P(A)>0$，则 A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B)$
  - ④若 $0<P(A)<1$，则 A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B\mid \overline{A})=P(B\mid A)$ $\Leftrightarrow P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid \overline{A})=1$
  - ⑤若 $P(A)=0$ 或 $P(A)=1$，则 A 与任意事件 B 相互独立
  - ⑥若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，且 A 与 B 互斥或存在包含关系，则 A 与 B 一定不独立

一 古典概型求概率

微信公众号：djky66（顶尖考研祝您上岸）

称随机试验 E 的每一个可能结果为**样本点**，记为 ω．样本点的全体结果组成的集合称为**样本空间**，记为 Ω，即 $\Omega=\{\omega\}$．

若 Ω 中有有限个、等可能的样本点，称为**古典概型**，设 A 为 Ω 的一个子集，则

$$P(A)=\frac{A\text{中样本点个数}}{\Omega\text{中样本点个数}}.$$

1. 随机分配问题

随机分配也叫**随机占位**，突出一个"放"字，即将 n 个可辨质点随机地分配到 N 个盒子中，区分每盒可以容纳任意多个质点和最多可以容纳一个质点，不同分法的总数列表如表 1-1 所示．

表 1-1　将 n 个质点随机分配到 N 个盒子中

分配方式	不同分法的总数
每盒容纳任意多个质点	N^n ①
每盒容纳至多一个质点	$\mathrm{P}_N^n=N(N-1)\cdot\cdots\cdot(N-n+1)$ ②

①每个质点均可放到 N 个盒子中的任何一个，即有 N 种放法，于是 n 个可辨质点放到 N 个盒子中共有 N^n 种不同放法．

②质点可辨，且一个盒子至多容纳一个质点，故 n 个质点放到 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中的所有不同放法即从 N 个元素中选取 n 个元素的排列数 P_N^n．

例 1.1　将 n 个球随机放入 $N(n\leqslant N)$ 个盒子中，每个盒子可以放任意多个球．求下列事件的概率：A={某指定 n 个盒子各有一球}；B={恰有 n 个盒子各有一球}；C={指定 $k(k\leqslant n)$ 个盒子各有一球}．

【解】这是随机占位的问题，设 n 个球，N 个盒子是可分辨的（例如编号），由于每个盒子可以放任意多个球，因此每个球都有 N 种不同的放置方法．将 n 个球随机放入 N 个盒子的一种放法作为基本事件，则基本事件总数为 N^n．事件 A 所含的基本事件是 n 个不同球的一种排列，故

$$n_A=n!,\quad P(A)=\frac{1\cdot n!}{N^n}.$$

"某指定 n 个"，只有此一种情况

事件 B 中的基本事件可以设想为先从 N 个盒子中选出 n 个（共有 C_N^n 种不同方法），而后把 n 个球随机放入这 n 个盒子中，每盒一球（共有 $n!$ 种不同放法），因此 B 中基本事件数

$$n_B=\mathrm{C}_N^n\cdot n!,\quad P(B)=\frac{\mathrm{C}_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

"恰有 n 个"，有 C_N^n 种情形

事件 C 的基本事件可以设想为先从 n 个球中选出 k 个球（有 C_n^k 种不同选法），再将这 k 个球随机放入指定的 k 个盒子中，每盒一球（有 $k!$ 种不同放法），最后将余下的 $n-k$ 个球随机放入其余的 $N-k$ 个盒子中，每个球都有 $N-k$ 种放置方法，因此共有 $(N-k)^{n-k}$ 种不同放法，故

$$n_C = C_n^k \cdot k!(N-k)^{n-k}\ ,\ P(C)=\frac{C_n^k k!(N-k)^{n-k}}{N^n}=\frac{n!(N-k)^{n-k}}{(n-k)!N^n}\ .$$

【注】许多问题的结构形式与分球入盒问题相同，都属于随机占位问题．例如生日问题（n 个人生日，相当于 n 个球随机放入 365 个盒子中，每盒可以放多个球）；住房分配问题（n 个人被分配到 N 个房间中去，每个房间可住多个人）；乘客下车问题（n 个乘客在 N 个车站下车的各种可能情况）等等．对这些问题的求解都可以用“将 n 个球等可能地投放到 N 个盒子中”的思路来考虑．
比如 12 个人 ω_1，…，ω_{12} 回母校参加校庆，每个人在 365 天哪一天出生等可能．则

A_1 ={ 生日分别为每个月的第一天 }；

B_1 ={ 生日全不相同 }；$\overline{B}_1$ ={ 至少有两人生日相同 }；

C_1 ={ 有且仅有三个人的生日分别在劳动节、儿童节、中秋节 }.

A_1，B_1，C_1 就对应着题中的 A，B，C，只不过此时 $N=365$，$n=12$，$k=3$．

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

2. 简单随机抽样问题

设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\}$ 含 N 个元素，称 Ω 为**总体**．如果各元素被抽到的可能性相同，则总体 Ω 的抽样称作**简单随机抽样**，突出一个“取”字．

简单随机抽样分为先后有放回、先后无放回及任取这三种不同的方式．在每种抽样方式下各种不同抽取方法（基本事件）的总数列表如表 1-2 所示．

表 1-2　自含 N 个元素的总体 Ω 中 n 次简单随机抽样

抽样方式	抽取法总数
先后有放回取 n 次	N^n ①
先后无放回取 n 次	$P_N^n=N(N-1)\cdot\cdots\cdot(N-n+1)$ ②
任取 n 个	C_N^n ③

①既考虑抽到何元素，又考虑各元素出现的顺序，每次从 Ω 中随意抽取一个元素，并在抽取下一元素前将其放回 Ω，于是每次都有 N 个元素可被抽取，即有 N 种抽取方法，抽取 n 次，即 N^n．

②既考虑抽到何元素，又考虑各元素出现的顺序，凡是抽出的元素均不再放回 Ω，于是每次抽取时都比上一次少了一个元素，抽 $n(n\leqslant N)$ 次，即

$$P_N^n=N(N-1)\cdot\cdots\cdot(N-n+1)\ .$$

③任取 $n(n\leqslant N)$ 个是指一次性取 n 个元素，相当于将 n 个元素无序且无放回地取走，其抽取法总数为

$$C_N^n=\frac{P_N^n}{n!}\ .$$

例 1.2　袋中有 5 个球，3 个白球，2 个黑球．

（1）先后有放回取 2 个球；

（2）先后无放回取 2 个球；

（3）任取 2 个球．

求取的 2 个球中至少 1 个是白球的概率.

【解】用对立事件思想，计算“两球全黑”的种数，再用总数减去它.

（1）$5^2-2^2=21$(种).

（2）$5\cdot4-2\cdot1=18$(种).

（3）$C_5^2-C_2^2=9$(种).

下面计算概率.

（1）$\dfrac{5^2-2^2}{5^2}=\dfrac{21}{25}$.

（2）$\dfrac{5\cdot4-2\cdot1}{5\cdot4}=\dfrac{9}{10}$.

（3）$\dfrac{C_5^2-C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{9}{10}$.

【注】本题中的（2）与（3）概率相同，如何理解?

$\dfrac{2\cdot1}{5\cdot4}=\dfrac{C_2^2\cdot P_2^2}{C_5^2\cdot P_2^2}=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}$，左边上下有序，右边上下无序，相当于把顺序“消掉”了，故“先后无放回取 k 个球”与“任取 k 个球”的概率相同. 由于（3）较方便，因此计算（2）时，可按（3）来计算.

微信公众号：djky66（顶尖考研祝您上岸）

例 1.3 袋中有 100 个球，40 个白球，60 个黑球.

（1）先后有放回取 20 个球，求取出 15 个白球，5 个黑球的概率;

（2）先后无放回取 20 个球，求取出 15 个白球，5 个黑球的概率;

（3）先后有放回取 20 个球，求第 20 次取到白球的概率;

（4）先后无放回取 20 个球，求第 20 次取到白球的概率.

【解】（1）$p_1=\dfrac{40^{15}\cdot60^5\cdot C_{20}^{15}}{100^{20}}$.

（2）按照“任取 20 个球”来计算，即 $p_2=\dfrac{C_{40}^{15}C_{60}^5}{C_{100}^{20}}$.

（3）$p_3=\dfrac{40}{100}=\dfrac{2}{5}$（有放回取球，每次抽取的样本空间没有变化，故每次取到白球的概率始终为 $\dfrac{2}{5}$）.

（4）看作随机占位问题. 设有 100 个盒子，每个盒子中放 1 个球，则要求第 20 个盒子中放入白球即可. 故 $p_4=\dfrac{C_{40}^1\cdot99!}{100!}=\dfrac{40}{100}=\dfrac{2}{5}$.

【注】$p_4=p_3$. 例 1.3（4）是抓阄模型，即使无放回，每次取到白球的概率也不会变，可理解成依概率摸球. 类比的例子:

①设有 100 个灰球，白的成分 : 黑的成分 =40 : 60，每次取到球中白的成分是 40%;

②设有盐水，盐的成分 : 水的成分 =40 : 60，每次取一勺盐水取到盐的成分是 40%.

二 几何概型求概率

若 Ω 是一个可度量的几何区域，且样本点落入 Ω 中的某一可度量子区域 A 的可能性大小与 A 的几何度量成正比，而与 A 的位置与形状无关，称为**几何概型**.

$$P(A)=\frac{A\text{的度量(长度、面积)}}{\Omega\text{的度量(长度、面积)}}.$$

例 1.4 在区间 $[0,1]$ 内随机取两个数，其积大于 $\frac{1}{4}$，其和小于 $\frac{5}{4}$ 的概率为________.

【解】应填 $\frac{15}{32}-\frac{1}{2}\ln 2$.

从 $[0,1]$ 中随机地取两个数 x 与 y，$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 1\}$，$A=\left\{(x,y)\middle|x+y<\frac{5}{4},xy>\frac{1}{4}\right\}$ 对应图 1-1 中的阴影部分.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

所以

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(\frac{5}{4}-x-\frac{1}{4x}\right)\mathrm{d}x}{1}=\left(\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}\ln x\right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{15}{32}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

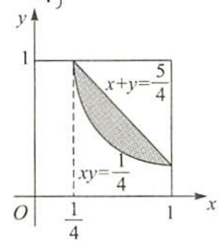


图 1-1

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

三 重要公式求概率

1. 用对立

① $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$.（长杠变短杠，开口换方向）

② $P(A)=1-P(\bar{A})$.

2. 用互斥

① $A\cup B=A\cup\bar{A}B=B\cup A\bar{B}=A\bar{B}\cup AB\cup\bar{A}B$.

②若 B_1,B_2,B_3 为完备事件组，则 $A=AB_1\cup AB_2\cup AB_3$.

③ $P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

④ a. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

b. $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$.

c. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

3. 用独立

①若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) .$$

②若 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n>3)$ 相互独立，则

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)&=1-P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}\right)\\&=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)\\&=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})\\&=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(A_i)] .\end{aligned}$$

4. 用条件

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

① $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}(P(B)>0)$.

② $P(AB)=P(B)P(A|B)(P(B)>0)$

$=P(A)P(B|A)(P(A)>0)$

$=P(A)+P(B)-P(A+B)$（由“2. ④”）

$=P(A)-P(A\overline{B})$（由“2. ③”）.

【注】当 $P(A_1A_2)>0$ 时，$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$.

③ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为完备事件组，$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i) .$$

【注】③称为**全概率公式**. 全概率公式用于计算某个结果 B 发生的可能性大小. 如果一个结果 B 的发生总是与某些前提条件（或原因、因素、前一阶段结果）A_i 相联系，那么计算 $P(B)$ 时，我们总是用 A_i 对 B 做分解：

$$B=\Omega B=\bigcup_{i=1}^{n}A_iB ,$$

故

$$\begin{aligned}P(B)&=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_iB\right)\\&=P(A_1B)+P(A_2B)+\cdots+P(A_nB)\\&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i) .\end{aligned}$$

④承接“③”，若已知 B 发生了，执果索因，有

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_jB)}{P(B)}=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)},j=1,2,\cdots,n\ .$$

【注】④称为**贝叶斯公式**.

5. 用不等式或包含

①$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

②若 $A\subseteq B$ ，则 $P(A)\leqslant P(B)$.

③由于 $AB\subseteq A\subseteq A+B$ ，故 $P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A+B)$.

6. 用最值

当遇到与 $\max\{X,Y\}$ ， $\min\{X,Y\}$ 有关的事件时，下面一些关系式是经常要用到的：

① $\{\max\{X,Y\}\leqslant a\}=\{X\leqslant a\}\cap\{Y\leqslant a\}$ ；

② $\{\max\{X,Y\}>a\}=\{X>a\}\cup\{Y>a\}$ ；

③ $\{\min\{X,Y\}\leqslant a\}=\{X\leqslant a\}\cup\{Y\leqslant a\}$ ；

④ $\{\min\{X,Y\}>a\}=\{X>a\}\cap\{Y>a\}$ ；

⑤ $\{\max\{X,Y\}\leqslant a\}\subseteq\{\min\{X,Y\}\leqslant a\}$ ；

⑥ $\{\min\{X,Y\}>a\}\subseteq\{\max\{X,Y\}>a\}$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 1.5 设 A，B 为两个随机事件，且 $P(A)=0.4$ ， $P(\overline{A}\cup B)=0.8$ ，则 $P(\overline{B}\mid A)$ =________.

【解】应填 0.5.

由“三的 1 及 4”，有 $P(\overline{A}\cup B)=1-P(\overline{\overline{A}\cup B})=1-P(A\overline{B})=0.8$ ，得 $P(A\overline{B})=0.2$ ，于是

$$P(\overline{B}\mid A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=0.5\ .$$

例 1.6 设 A，B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$. 下列命题中为假命题的是（　　）.

（A）若 $P(A\mid B)>P(A)$，则 $P(\overline{A}\mid\overline{B})>P(\overline{A})$

（B）若 $P(A\mid B)=P(A)$，则 $P(A\mid\overline{B})=P(A)$

（C）若 $P(A\mid B)>P(A\mid\overline{B})$，则 $P(A\mid B)>P(A)$

（D）若 $P(A\mid A\cup B)>P(\overline{A}\mid A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$

【解】应选（D）.

选项（A）， $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}>P(A)\Rightarrow P(AB)>P(A)P(B)$ ，所以

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\mid\overline{B})&=\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}\\&>\frac{1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)}{1-P(B)}\\&=\frac{1-P(B)-P(A)[1-P(B)]}{1-P(B)}=1-P(A)=P(\overline{A})\ ,\end{aligned}$$

故选项（A）正确.

选项（B），由条件知，A，B 相互独立，故选项（B）显然正确.

选项（C），由条件概率公式得 $P(AB)>P(A)P(B)$，因此 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}>P(A)$，故选项（C）正确.

选项（D），$P(A|A\cup B)=\dfrac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A)}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$，

$$P(\overline{A}|A\cup B)=\frac{P(\overline{A}(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)},$$

则有 $P(A)>P(B)-P(AB)$，不能说明 $P(A)>P(B)$ 一定成立，故选项（D）不正确. 故选（D）.

例 1.7 设 X，Y 为随机变量，且 $P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\dfrac{3}{7}$，$P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\dfrac{4}{7}$，求下列事件的概率：（1）$A=\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}$；（2）$B=\{\max\{X,Y\}\geqslant 0,\min\{X,Y\}<0\}$.

【解】（1）由于 $A=\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=\{X,Y$ 至少有一个大于等于 $0\}=\{X\geqslant 0\}\cup\{Y\geqslant 0\}$，故

$$P(A)=P\{X\geqslant 0\}+P\{Y\geqslant 0\}-P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（2）用全集分解，有

$$\begin{aligned}A&=\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}\\&=\{\max\{X,Y\}\geqslant 0,\Omega\}\\&=\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}\cap(\{\min\{X,Y\}<0\}\cup\{\min\{X,Y\}\geqslant 0\})\\&=\{\max\{X,Y\}\geqslant 0,\min\{X,Y\}<0\}\cup\{\max\{X,Y\}\geqslant 0,\min\{X,Y\}\geqslant 0\}\\&=B\cup\{\min\{X,Y\}\geqslant 0\}\\&=B\cup\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\},\end{aligned}$$

故

$$P(B)=P(A)-P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}.$$

例 1.8 设有 10 份报名表，其中有 3 份女生表，7 份男生表. 现从中每次任取 1 份，取后不放回. 求下列事件的概率.

（1）第 3 次取到女生表；

（2）第 3 次才取到女生表；

（3）已知前两次没取到女生表，第 3 次取到女生表.

【解】设 A_i ={ 第 i 次取到女生表 }，i=1，2，3.

（1）绝对概率——只关注第 3 次——抓阄模型.

$$P(A_3)=\frac{3}{10}.$$

（2）积事件概率（乘法公式）——关注第 1，2，3 次，第 1，2 次都没发生，都有概率问题.

第 1，2 次取到男生表，第 3 次取到女生表.

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{7}{40}.$$

（3）条件概率——关注第 1，2，3 次，第 1，2 次已发生.

$$P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{3}{8}.$$

【注】$\frac{3}{8}=\frac{15}{40}>\frac{7}{40}$，显然（3）的概率比（2）大.

例 1.9 从数 1，2，3，4 中任取一个数，记为 X，再从 1，…，X 中任取一个数，记为 Y，则 $P\{Y=2\}=$________.

【解】应填 $\frac{13}{48}$.

$$\begin{aligned}P\{Y=2\}&=P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y=2\mid X=2\}+\\&\quad P\{X=3\}P\{Y=2\mid X=3\}+P\{X=4\}P\{Y=2\mid X=4\}\\&=\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{48}.\end{aligned}$$

例 1.10 设有甲、乙两名射击运动员，甲命中目标的概率是 0.6，乙命中目标的概率是 0.5. 求下列事件的概率.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（1）从甲、乙中任选一人去射击，若目标命中，则是甲命中的概率；

（2）甲、乙两人各自独立射击，若目标命中，则是甲命中的概率.

【解】（1）该随机试验分为两个阶段：①选人，$A_{甲}=\{选甲\}$，$A_{乙}=\{选乙\}$；②射击，$B=\{目标被命中\}$.

则
$$P(A_{甲}\mid B)=\frac{P(A_{甲}B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_{甲})P(A_{甲})}{P(B\mid A_{甲})P(A_{甲})+P(B\mid A_{乙})P(A_{乙})}$$

事件来自不同阶段，用贝叶斯公式

$$=\frac{0.6\times 0.5}{0.6\times 0.5+0.5\times 0.5}=\frac{6}{11}.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（2）该随机试验不分阶段.

$A_{甲}=\{甲命中\}$，$A_{乙}=\{乙命中\}$，$B=\{目标被命中\}$.

则
$$P(A_{甲}\mid B)=\frac{P(A_{甲}B)}{P(B)}=\frac{P(A_{甲})}{P(A_{甲}+A_{乙})}=\frac{P(A_{甲})}{P(A_{甲})+P(A_{乙})-P(A_{甲})P(A_{乙})}$$

事件来自相同阶段，用条件概率公式

$$=\frac{0.6}{0.6+0.5-0.6\times 0.5}=\frac{3}{4}.$$

四 事件独立性的判定

1. 定义

设 A，B 为两个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B **相互独立**，简称 A 与 B **独立**.

【注】(1) 设 $A_1, A_2,\cdots, A_n$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 个事件，如果对其中任意有限个事件 $A_{i_1}, A_{i_2},\cdots,A_{i_k}\ (2\leqslant k\leqslant n)$，有
$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$
则称 n 个事件 $A_1, A_2,\cdots, A_n$ 相互独立.

（2）考研中常考的是 $n=3$ 时的情形. 细致说来，设 A_1，A_2，A_3 为三个事件，若同时满足

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2), \quad ①$$

$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3), \quad ②$$

$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)\,, \quad ③$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\,, \quad ④$$

则称事件 A_1, A_2, A_3 **相互独立**. 当去掉上述④式后，称只满足①,②,③式的事件 A_1, A_2, A_3 **两两独立**.

2. 判定

① A 与 B 相互独立 $\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}$ A 与 $\overline{B}$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

【注】（1）仅证 (*)，由 A, B 独立，有 $P(AB)=P(A)P(B)$，于是

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$
$$=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})\,,$$

故 A，$\overline{B}$ 独立，其余证明同理.

（2）将相互独立的事件组中的任何几个事件换成各自的对立事件，所得的新事件组仍相互独立.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

②对独立事件组不含相同事件作运算，得到的新事件组仍独立，如 A，B，C，D 相互独立，则 AB 与 CD 相互独立，A 与 $BC-D$ 相互独立.

【注】直接使用，无须证明.

③若 $P(A)>0$，则 A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B)$.

【注】证 ($\Rightarrow$) 由 A 与 B 相互独立，有 $P(AB)=P(A)P(B)$，于是 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$.

($\Leftarrow$) 由 $P(B\mid A)=P(B)$，知 $P(AB)=P(B\mid A)P(A)=P(A)P(B)$，则 A 与 B 相互独立.

④若 $0<P(A)<1$，则 A 与 B 相互独立 $\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} P(B\mid\overline{A})=P(B\mid A)$

$$\overset{(**)}{\Longleftrightarrow} P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid\overline{A})=1\,.$$

【注】证 由 $P(B\mid\overline{A})=P(B\mid A)$，有 $\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，即

$$P(A)P(B)-P(A)P(AB)=P(AB)-P(A)P(AB)\,,$$

也即 $P(A)P(B)=P(AB)$. 上述过程可逆，故 (*) 成立. 又 $P(B\mid\overline{A})=1-P(\overline{B}\mid\overline{A})$，故 (**) 成立.

⑤若 $P(A)=0$ 或 $P(A)=1$，则 A 与任意事件 B 相互独立. ⟶ 不可能事件或必然事件和任意事件独立.

【注】证 若 $P(A)=0$，由“三、5 的③”，有 $P(AB)\leqslant P(A)$，故 $0\leqslant P(AB)\leqslant P(A)=0$，则 $P(AB)=0$，于是 $P(A)P(B)=P(AB)$；

若 $P(A)=1$，则 $P(\overline{A})=1-P(A)=0$，又由“三、5 的③”，有 $0\leqslant P(B\overline{A})\leqslant P(\overline{A})=0$，知 $P(B\overline{A})=0$，又 $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$，故 $P(B)=P(AB)$，即 $P(A)P(B)=P(AB)$.

⑥若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，且 A 与 B 互斥或存在包含关系，则 A 与 B 一定不独立.

【注】证　若 $AB=\varnothing$，则 $P(AB)=0\neq P(A)P(B)$，故 A，B 不独立.
若 $A\subseteq B$，则 $AB=A$，从而 $P(AB)=P(A)\neq P(A)P(B)$，故 A，B 不独立.

例 1.11　设随机事件 A 与 B 相互独立，$0<P(A)<1$，$P(C)=1$，则下列事件中不相互独立的是（　　）.

（A）A，B，$A\cup C$　　（B）A，B，$A-C$　　（C）A，B，AC　　（D）A，B，$\overline{A}\overline{C}$

【解】应选（C）.

由 $P(C)=1$，有 $P(\overline{C})=1-P(C)=0$，且 $P(A\cup C)\geqslant P(C)=1$，故 $P(A\cup C)=1$.

$P(A-C)=P(A\overline{C})\leqslant P(\overline{C})=0$，故 $P(A-C)=0$.

$P(AC)=P(A)-P(A\overline{C})=P(A)$，由题设，$0<P(AC)<1$.

$P(\overline{A}\overline{C})\leqslant P(\overline{C})=0$，故 $P(\overline{A}\overline{C})=0$.

微信公众号：djky66
（陕尖考研视您上岸）

又根据“概率为 0 或 1 的事件与任何事件相互独立”，所以 (A)，(B)，(D) 中的事件相互独立，如 $P(AB(A\cup C))=P(AB)P(A\cup C)=P(A)P(B)P(A\cup C)$，而

$$P(AAC)=P(AC)=P(A)\neq P(A)P(AC),$$

所以（C）中的事件 A，B，AC 不相互独立，故选（C）.

例 1.12　对于下列命题：

①若事件 A，B 相互独立，且 B，C 相互独立，则 A，C 相互独立；

②若事件 A，B 相互独立，且 $C\subset A$，$D\subset B$，则 C，D 相互独立.

说法正确的是（　　）.

（A）①正确，②不正确　　（B）②正确，①不正确

（C）①②都正确　　（D）①②都不正确

【解】应选（D）.

①不正确. 例如，袋中有 2 个球，1 个白球，1 个黑球，先后有放回地取两次.

记 A={第一次取到白球}，B={两次取到不同颜色的球}，C={第一次取到黑球}，则样本空间为{白，白}，{白，黑}，{黑，白}，{黑，黑}. 故 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{2}$，

$$P(AB)=\frac{1}{4},\ P(AC)=0,\ P(BC)=\frac{1}{4},$$

$$P(A)P(B)=P(AB),\ P(B)P(C)=P(BC),$$

但 $P(A)P(C)\neq P(AC)$，故 A，C 不独立.

②不正确. 承接①，题设不变，A，B 不变，令 C={第一次取到白球，第二次取到黑球}，D={第一次取到黑球，第二次取到白球}，则 $C\subset A$，$D\subset B$，且 $P(C)=\frac{1}{4}$，$P(D)=\frac{1}{4}$，$P(CD)=0$，$P(C)P(D)\neq P(CD)$，故 C，D 不独立.

第2讲 一维随机变量及其分布

知识结构

- 判分布
  - 随机变量及其分布函数的定义
    - 随机变量
    - 分布函数
  - 判分布
    - 分布函数
      - ① $F(x)$ 单调不减
      - ② $F(x)$ 右连续
      - ③ $F(-\infty)=0$
      - ④ $F(+\infty)=1$
    - 概率分布 — $p_i \geqslant 0$，且 $\sum\limits_i p_i = 1$
    - 概率密度 — $f(x) \geqslant 0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$
    - 反问题
      - ① $F(-\infty)=0$
      - ② $F(+\infty)=1$
      - ③ $\sum\limits_i p_i = 1$
      - ④ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$
- 求分布
  - 离散型分布
    - 0—1分布 — $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$
    - 二项分布 — $P\{X=k\} = \mathrm{C}_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$
    - 几何分布 — $P\{X=k\} = p \cdot (1-p)^{k-1}, k=1,2,\cdots$
    - 超几何分布 — $P\{X=k\} = \dfrac{\mathrm{C}_M^k \mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}, \max\{0, n-N+M\} \leqslant k \leqslant \min\{n, M\}$
    - 泊松分布 — $P\{X=k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} (k=0,1,\cdots;\lambda>0)$
  - 连续型分布
    - 均匀分布 — $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$
    - 指数分布 — $f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} (\lambda > 0)$
    - 正态分布 — $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x, \mu < +\infty, \sigma > 0$
  - 混合型分布 — $F(x) = P\{X \leqslant x\}$
- 用分布
  - $X \sim F(x)$
    - ① $P\{X \leqslant a\} = F(a)$
    - ② $P\{X < a\} = F(a-0)$
    - ③ $P\{X = a\} = P\{X \leqslant a\} - P\{X < a\} = F(a) - F(a-0)$
    - ④ $P\{a < X < b\} = P\{X < b\} - P\{X \leqslant a\} = F(b-0) - F(a)$
    - ⑤ $P\{a \leqslant X \leqslant b\} = P\{X \leqslant b\} - P\{X < a\} = F(b) - F(a-0)$
  - $X \sim p_i$ — $P\{X \in I\} = \sum\limits_{x_i \in I} P\{X = x_i\}$
  - $X \sim f(x)$ — $P\{X \in I\} = \int_I f(x)\mathrm{d}x$
  - 反问题 — 已知概率反求参数

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

一 判分布

1. 随机变量及其分布函数的定义

（1）随机变量.

设随机试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，如果对每一个 $\omega\in\Omega$，都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应，并且对任意实数 x，$\{\omega\mid X(\omega)\leqslant x,\omega\in\Omega\}$ 是随机事件，则称定义在 Ω 上的实值单值函数 $X(\omega)$ 为**随机变量**，简记为随机变量 X.

（2）分布函数.

设 X 是随机变量，x 是任意实数，称函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}(x\in\mathbf{R})$ 为随机变量 X 的分布函数，或称 X 服从 $F(x)$ 分布，记为 $X\sim F(x)$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

【注】常见的两类随机变量.

（1）离散型随机变量及其概率分布.

如果随机变量 X 只可能取有限个或可列个值 x_1，x_2，…，则称 X 为离散型随机变量，称

$$p_i=P\{X=x_i\},\ i=1,\ 2,\ \cdots$$

为 X 的**分布列**、**分布律**或**概率分布**，记为 $X\sim p_i$，概率分布常常用表格形式或矩阵形式表示，即

X	x_1	x_2	…
P	p_1	p_2	…

或 $X\sim\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots\\ p_1 & p_2 & \cdots\end{pmatrix}$.

（2）连续型随机变量及其概率密度.

如果随机变量 X 的分布函数可以表示为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t\,(x\in\mathbf{R}),$$

其中 $f(x)$ 是非负可积函数，则称 X 为**连续型随机变量**，称 $f(x)$ 为 X 的**概率密度函数**，简称**概率密度**，记为 $X\sim f(x)$.

当然，存在既非离散也非连续的随机变量，称为混合型随机变量，后面也常见.

2. 判分布

（1）$F(x)$ 是分布函数 $\Leftrightarrow$ $F(x)$ 是 x 的单调不减、右连续函数，且 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$.

（2）$\{p_i\}$ 是概率分布 $\Leftrightarrow$ $p_i\geqslant 0$，且 $\sum\limits_i p_i=1$.

（3）$f(x)$ 是概率密度 $\Leftrightarrow$ $f(x)\geqslant 0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$.

（4）反问题.

用 $\begin{cases}F(-\infty)=0,\\ F(+\infty)=1,\\ \sum\limits_i p_i=1,\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1\end{cases}$ 建方程，求参数.

例 2.1　设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若

$$f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\leqslant 0, \\ bf_2(x), & x>0 \end{cases} (a>0,b>0)$$

为概率密度，则 a，b 应满足（　　）.

（A）$2a+3b=4$　　（B）$3a+2b=4$　　（C）$a+b=1$　　（D）$a+b=2$

【解】应选（A）.

根据连续型随机变量概率密度的性质，应有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} af_1(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} bf_2(x)\mathrm{d}x .$$

由于

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad f_2(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & -1\leqslant x\leqslant 3, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

于是有

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

$$\begin{aligned} 1&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} af_1(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} bf_2(x)\mathrm{d}x \\ &=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x+b\int_{0}^{3}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+\frac{3}{4}b, \end{aligned}$$

所以 $2a+3b=4$，故选择（A）.

例 2.2　设连续型随机变量 X_1，X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$，$f_2(x)$，其分布函数分别为 $F_1(x)$，$F_2(x)$，记 $g_1(x)=f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$，$g_2(x)=f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$，$g_3(x)=\frac{1}{2}[f_1(x)+f_2(x)]$，$g_4(x)=\sqrt{f_1(x)f_2(x)}$，则 $g_1(x)$，$g_2(x)$，$g_3(x)$，$g_4(x)$ 这 4 个函数中一定能作为概率密度的共有（　　）.

（A）1 个　　（B）2 个　　（C）3 个　　（D）4 个

【解】应选（C）.

显然，4 个函数均是非负的，故只需考虑其是否具有概率密度的性质.

由于

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)]\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{+\infty}[F_1'(x)F_2(x)+F_1(x)F_2'(x)]\mathrm{d}x \\ &=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1, \end{aligned}$$

因此 $g_1(x)=f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 可以作为概率密度.

由于

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)]\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)F_1(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)F_2(x)\mathrm{d}x \\ &=\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x)\mathrm{d}[F_1(x)]+\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x)\mathrm{d}[F_2(x)] \\ &=\frac{1}{2}[F_1^2(x)+F_2^2(x)]\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1, \end{aligned}$$

因此 $g_2(x)=f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$ 可以作为概率密度.

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，因此 $g_3(x)=\frac{1}{2}[f_1(x)+f_2(x)]$ 可以作为概率密度.

$g_4(x)=\sqrt{f_1(x)f_2(x)}$ 不一定可以作为概率密度. 如

$$f_1(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\quad f_2(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

都是概率密度，但 $\sqrt{f_1(x)f_2(x)}=\begin{cases}2\sqrt{2}x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$ 不是概率密度，因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{f_1(x)f_2(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1 2\sqrt{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{3}\neq 1 .$$

综上所述，$g_1(x)$，$g_2(x)$，$g_3(x)$，$g_4(x)$ 这 4 个函数中一定能作为概率密度的共有 3 个．

应选（C）．

二 求分布

1. 离散型分布

微信公众号：djky66

$X\sim p_i$，则 $F(x)=\sum\limits_{x_i\leqslant x}p_i$（阶梯形函数）．

（顶尖考研祝您上岸）

【注】（1）分布律与分布函数互相唯一确定．

（2）常见以下 5 种离散型分布．

① 0—1 分布．

$X\sim B(1,p)$，X（伯努利计数变量）$\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1-p\end{pmatrix}$．

②二项分布．

$$X\sim B(n,p)\begin{cases}\text{a. } n次试验相互独立;\\ \text{b. } P(A)=p;\\ \text{c. 只有}A,\overline{A}两种结果.\end{cases}$$

记 X 为 A 发生的次数，则

$$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k\cdot p^k(1-p)^{n-k}\ ,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

二项分布 $X\sim B(n,p)$ 还具有如下性质：

a. $Y=n-X$ 服从二项分布 $B(n,q)$，其中 $q=1-p$.

b. 对固定的 n 和 p，随着 k 的增大，$P\{X=k\}$ 先上升到最大值而后下降，如图 2-1 所示．

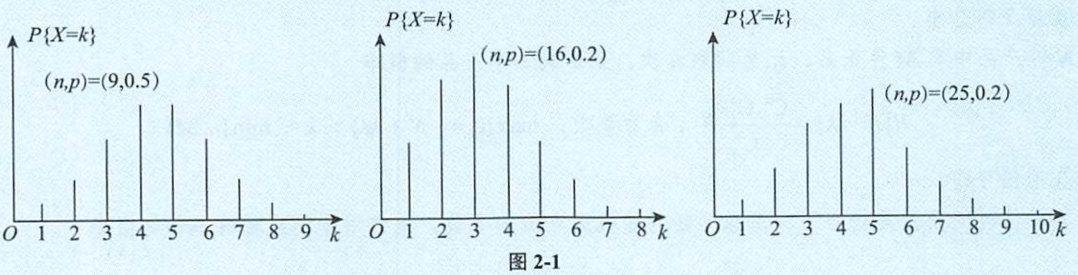


图 2-1

证 记二项分布的分布律为

$$U_k=P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ ,$$

则相邻项的比值 $\dfrac{U_k}{U_{k-1}}=\dfrac{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}$

证明过程仅供参考，不作要求

$$=\frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}}{\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}$$

$$=\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}=\frac{(n+1)p-kp}{k(1-p)}$$

$$=\frac{(n+1)p-k(1-q)}{kq}=\frac{kq+(n+1)p-k}{kq}(q=1-p)$$

$$=1+\frac{(n+1)p-k}{kq}.$$

若要求 $U_k\geqslant U_{k-1}$ 且 $U_k\geqslant U_{k+1}$，即 U_k 最大，则 $\dfrac{U_k}{U_{k-1}}\geqslant 1$ 且 $\dfrac{U_{k+1}}{U_k}\leqslant 1$，即

微信公众号：djky66

$$1+\frac{(n+1)p-k}{kq}\geqslant 1\text{ 且 }1+\frac{(n+1)p-(k+1)}{(k+1)q}\leqslant 1,$$

可得 $$(n+1)p-k\geqslant 0\text{ 且 }(n+1)p-(k+1)\leqslant 0,$$

（顶尖考研祝您上岸）

于是有 $$(n+1)p-1\leqslant k\leqslant (n+1)p. \qquad (*)$$

由于 k 为整数，故当 $(n+1)p$ 是整数时，事件 A 最可能发生的次数

$$k=(n+1)p,\ (n+1)p-1,$$

比如 $(n+1)p=5$，则根据（*）式有 $4\leqslant k\leqslant 5$，即 k 取 4 与 5；

记住结论即可

当 $(n+1)p$ 不是整数时，事件 A 最可能发生的次数

$$k=[(n+1)p]\ \text{（}(n+1)p\text{ 取整）},$$

比如 $(n+1)p=3.5$，则根据（*）式有 $2.5\leqslant k\leqslant 3.5$，即 k 只能取 3.

③几何分布.

$X\sim G(p)$ 首中即停止（等待型分布），记 X 为试验次数，则

$$P\{X=k\}=p\cdot(1-p)^{k-1},\ k=1,\ 2,\ \cdots.$$

几何分布具有无记忆性，当 m，n 均大于 0 时，有

$$P\{X=m+n\mid X>m\}=P\{X=n\};$$

$$P\{X>m+n\mid X>m\}=P\{X>n\}.$$

④超几何分布.

N 件产品中有 M 件正品，无放回取 n 次，则取到 k 个正品的概率

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k\text{ 为整数},\ \max\{0,n-N+M\}\leqslant k\leqslant \min\{n,M\}.$$

⑤泊松分布.

某单位时间段，某场合下，源源不断的随机质点流的个数，也常用于描述稀有事件的概率.

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,\ \cdots;\ \lambda>0),\ \lambda\text{ 表示强度 }(EX=\lambda).$$

泊松定理 若 $X\sim B(n,p)$，当 n 很大，p 很小，$\lambda=np$ 适中时，二项分布可用泊松分布近似表示，

即
$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$
一般地，当 $n \geqslant 20$，$p \leqslant 0.05$ 时，用泊松近似公式逼近二项分布效果比较好，特别当 $n \geqslant 100$，$np \leqslant 10$ 时，逼近效果更佳.

此处《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》的要求是"会用泊松分布近似表示二项分布"，考生应予以重视.

例 2.3 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1，A_2，A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$. 将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 $X+Y$ 服从（　　）.

（A）$B\left(2,\frac{1}{3}\right)$　　（B）$B\left(2,\frac{2}{3}\right)$　　（C）$B\left(4,\frac{1}{3}\right)$　　（D）$B\left(4,\frac{2}{3}\right)$

【解】应选（B）.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

设 Z 表示 2 次试验中结果 A_3 发生的次数，则 $Z \sim B\left(2,\frac{1}{3}\right)$.

又 $X+Y+Z=2$，于是 $X+Y=2-Z$. 根据二项分布的性质，知

$Y=n-X$ 服从二项分布 $B(n,q)$，其中 $q=1-p$.

$$X+Y=2-Z \sim B\left(2,\frac{2}{3}\right),$$

故选（B）.

例 2.4 如果某篮球运动员每次投篮投中的概率是 0.8，每次投篮的结果相互独立，则该运动员在 10 次投篮中，最有可能投中的次数为________.

【解】应填 8.

此题为客观题，则可按照"二的 1 的注中（2）的②"的结论，将 $n=10$，$p=0.8$ 代入，直接求出
$$(n+1)p = 11 \times 0.8 = 8.8,\quad k=[8.8]=8$$
即可.

例 2.5 一本 500 页的书，共有 100 个错字，每个错字等可能出现在每页，按照泊松定理，在给定的一页上至少有 2 个错字的概率为（　　）.

（A）$1-e^{-\frac{2}{5}}$　　（B）$1-e^{-\frac{1}{5}}$　　（C）$1-\frac{5}{6}e^{-\frac{1}{5}}$　　（D）$1-\frac{6}{5}e^{-\frac{1}{5}}$

【解】应选（D）.

本题的关键是如何建立其概型. 由题意，每个错字出现在某页上的概率均为 $\frac{1}{500}$，100 个错字就可看作 100 次伯努利试验，于是问题就迎刃而解了.

设 A 表示"给定的一页上至少有 2 个错字"，于是有
$$\begin{aligned} P(A) &= 1-P(\overline{A}) \\ &= 1-\sum_{i=0}^{1} C_{100}^{i}\left(\frac{1}{500}\right)^{i}\left(1-\frac{1}{500}\right)^{100-i} \\ &= 1-\left(1-\frac{1}{500}\right)^{100}-100\times\frac{1}{500}\times\left(1-\frac{1}{500}\right)^{99}, \end{aligned}$$

由泊松定理得 $P(A) \approx 1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}=1-\frac{6}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}$.

所以选（D）.

2. 连续型分布

$X \sim f(x)$，则 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

【注】（1）$f(x)$ 可唯一确定 $F(x)$；$F(x)$ 不可唯一确定 $f(x)$（改变 $f(x)$ 在有限个点的值，不影响 $F(x)$）.

（2）若 $f(x)$ 为分段函数.

① $f(x)=\begin{cases} g(x), & a \leqslant x<b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 则 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \int_{a}^{x} g(t)\mathrm{d}t, & a \leqslant x<b, \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases}$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

② $f(x)=\begin{cases} g_1(x), & a \leqslant x<c, \\ g_2(x), & c \leqslant x<b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 则 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \int_{a}^{x} g_1(t)\mathrm{d}t, & a \leqslant x<c, \\ \int_{a}^{c} g_1(t)\mathrm{d}t+\int_{c}^{x} g_2(t)\mathrm{d}t, & c \leqslant x<b, \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases}$

（3）常见以下 3 种连续型分布.

①均匀分布 $U(a,b)$.

如果随机变量 X 的概率密度或分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad F(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x<b, \\ 1, & x \geqslant b, \end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从**均匀分布**，记为 $X \sim U(a,b)$.（见图 2-2，2-3）

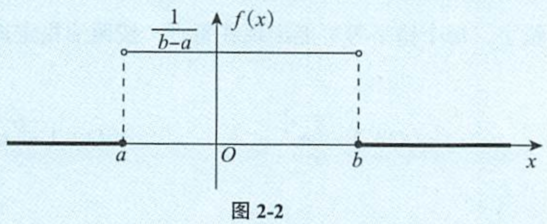


图 2-2

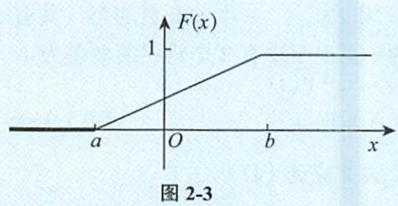


图 2-3

注意：1° 区间 (a,b) 可以是 $[a,b]$.

2° 几何概型是均匀分布的实际背景，于是有另一种表示形式“X 在 I 上的任一子区间取值的概率与该子区间长度成正比”，即 $X \sim U(I)$.

②指数分布 $E(\lambda)$.

如果 X 的概率密度或分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}(\lambda>0), F(x)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x<0 \end{cases}(\lambda>0) ,$$

则称 X 服从参数为 λ 的**指数分布**，记为 $X \sim E(\lambda)$．（见图 2-4，2-5）

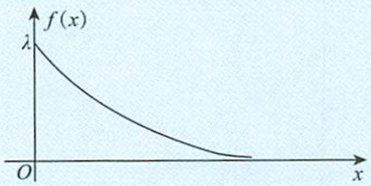


图 2-4

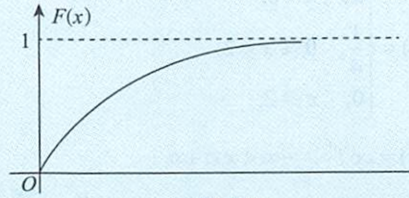


图 2-5

注意：1° 当 $t,s>0$ 时，$P\{X \geqslant t+s \mid X \geqslant t\} = P\{X \geqslant s\}$ 称为指数分布的无记忆性（Memoryless Property）．

2° $EX=\dfrac{1}{\lambda}$ 称为平均寿命，也称为平均等待时间，λ 称为失效频率，它是一个常数，失效频率不变，元件无损耗，才有无记忆性．

③正态分布．

若 $X \sim f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$，其中 $-\infty < \mu < +\infty$，$\sigma > 0$，

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

则称 X 服从参数为 (μ,σ^2) 的**正态分布**，记为 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$．

注意：1° $\mu=0$，$\sigma=1$ 时的正态分布 $N(0,1)$ 为标准正态分布，

$$X \sim \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,$$

则 $X \sim N(0,1)$．

2° $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的图形分别如图 2-6，图 2-7 所示．

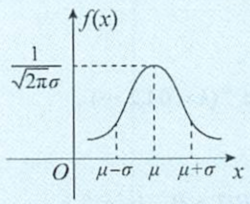


图 2-6

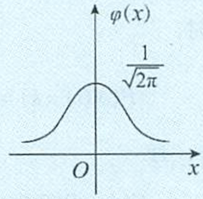


图 2-7

3° 若 $X \sim N(0,1)$，则

$$\Phi(-x) = 1-\Phi(x);\quad \Phi(0)=\frac{1}{2};$$

$$P\{|X| \leqslant a\} = 2\Phi(a)-1\ (a>0);$$

$$P\{|X| > a\} = 2[1-\Phi(a)]\ (a>0).$$

4° 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1);$$

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right);$$

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right);$$

$$P\{\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma\} = 2\Phi(1)-1;$$

$$P\{\mu-k\sigma \leqslant X \leqslant \mu+k\sigma\} = 2\Phi(k)-1\ (k>0).$$

例 2.6 确定下列各随机变量概率密度中未知参数 a 的值，并求出它们的分布函数：

（1）$f_1(x)=\begin{cases} ae^x, & x<0, \\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2, \\ 0, & x\geqslant 2; \end{cases}$

（2）$f_2(x)=ae^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$.

【解】（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}ae^x\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{1}{4}\mathrm{d}x=a+\frac{1}{2}=1$，得 $a=\frac{1}{2}$，则分布函数为

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}f_1(t)\mathrm{d}t=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^t\mathrm{d}t, & x<0, \\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^t\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{1}{4}\mathrm{d}t, & 0\leqslant x<2, \\ 1, & x\geqslant 2 \end{cases}=\begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x<0, \\ \frac{1}{2}+\frac{x}{4}, & 0\leqslant x<2, \\ 1, & x\geqslant 2. \end{cases}$$

（2）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}ae^x\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}ae^{-x}\mathrm{d}x=2a=1$，得 $a=\frac{1}{2}$，则分布函数为

微信公众号：djky66（顶尖考研祝您上岸）

$$F_2(x)=\int_{-\infty}^{x}f_2(t)\mathrm{d}t=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^t\mathrm{d}t, & x<0, \\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^t\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{1}{2}e^{-t}\mathrm{d}t, & x\geqslant 0 \end{cases}=\begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x<0, \\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0. \end{cases}$$

例 2.7 设某大型设备在任何长度为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布 .

（1）求相继出现两次故障之间的时间间隔 T 的概率分布；

（2）求设备已经无故障工作 8 h 的情况下，再无故障工作 16 h 以上的概率 .

【解】（1）T 的值域为区间，属连续型随机变量 . 求概率分布，即求分布函数 $F(t)$，即求概率 $P\{T\leqslant t\}$. 由题知，当 $t>0$ 时，

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}(k=0,1,2,\cdots),$$

事件 $\{T>t\}$ 与 $\{N(t)=0\}$ 等价，有

$$F(t)=P\{T\leqslant t\}=1-P\{T>t\}=1-e^{-\lambda t};$$

当 $t\leqslant 0$ 时，$F(t)=0$. 则

$$F(t)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & t\geqslant 0, \\ 0, & t<0, \end{cases}$$

T 服从参数为 λ 的指数分布 .

（2）由无记忆性知 $P\{T\geqslant 16+8\mid T\geqslant 8\}=P\{T\geqslant 16\}=1-(1-e^{-16\lambda})=e^{-16\lambda}$.

例 2.8 设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$m=1$ 时是指数分布

$$F(t)=\begin{cases} 1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ，m 为参数且大于零. 求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t\mid T>s\}$，其中 $s>0$，$t>0$.

【解】 由条件知

$$P\{T>t\}=1-P\{T\leqslant t\}=1-F(t)=e^{-\frac{t^m}{\theta^m}},$$

$$P\{T>s+t\,|\,T>s\}=\frac{P\{T>s+t,T>s\}}{P\{T>s\}}=\frac{P\{T>s+t\}}{P\{T>s\}}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(s+t)^m}{\theta^m}}}{\mathrm{e}^{-\frac{s^m}{\theta^m}}}=\mathrm{e}^{-\frac{(s+t)^m-s^m}{\theta^m}}.$$

【注】此分布为威布尔分布，是考虑元件损耗的寿命分布；若 $m=1$，则成为指数分布，是理想元件（无损耗）的寿命分布．

例 2.9 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$．在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$．求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 和概率密度 $f_Y(y)$．

【解】$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X=1\}P\{Y\leqslant y\,|\,X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant y\,|\,X=2\}$

$$=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\,|\,X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\,|\,X=2\}.$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=\dfrac{3y}{4}$；

当 $1\leqslant y<2$ 时，$F_Y(y)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{4}$；

当 $y\geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=1$．

微信公众号：djky66（顶尖考研祝您上岸）

所以 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{3y}{4}, & 0\leqslant y<1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{4}, & 1<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

【注】计算 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$ 时，若 $\{X\leqslant x\}$ 是复杂事件，应先将事件 $\{X\leqslant x\}$ 按题设分解为完备事件组的并，然后用全概率公式计算 $P\{X\leqslant x\}$.

例 2.10 设 X_1，X_2，X_3 是随机变量，且

$$X_1\sim N(0,1), X_2\sim N(0,2^2), X_3\sim N(5,3^2),$$

$$p_i=P\{-2\leqslant X_i\leqslant 2\}(i=1,2,3),$$

则（　　）．

（A）$p_1>p_2>p_3$　（B）$p_2>p_1>p_3$　（C）$p_3>p_1>p_2$　（D）$p_1>p_3>p_2$

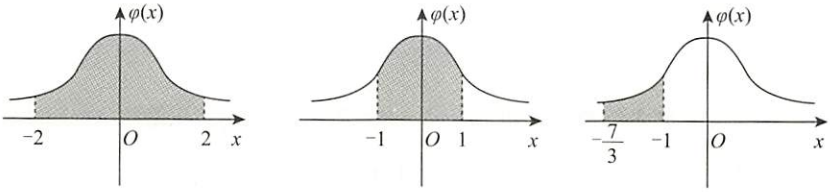
【解】应选（A）．

$$p_1=\Phi(2)-\Phi(-2)=\int_{-2}^{2}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

$$p_2=\Phi\left(\frac{2}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-2}{2}\right)=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

$$p_3=\Phi\left(\frac{2-5}{3}\right)-\Phi\left(\frac{-2-5}{3}\right)=\int_{-\frac{7}{3}}^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

由图 2-8（a）与（b）比较，知 $p_1>p_2$，由图 2-8（b）与（c）比较，知 $p_2>p_3$. 故 $p_1>p_2>p_3$，选（A）.



$p_1=\int_{-2}^{2}\varphi(x)\mathrm{d}x$ $\quad$ $p_2=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\mathrm{d}x$ $\quad$ $p_3=\int_{-\frac{7}{3}}^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x$

(a) (b) (c)

图 2-8

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

【注】设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，由 $\Phi(x)$ 的函数表还能得到（见图 2-9）：

$P\{\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=68.26\%$,

$P\{\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=95.44\%$,

$P\{\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\}=\Phi(3)-\Phi(-3)=99.74\%$.

我们看到，尽管正态变量的取值范围是 $(-\infty,+\infty)$，但它的值落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内几乎是肯定的事 . 这就是“3σ”法则 .

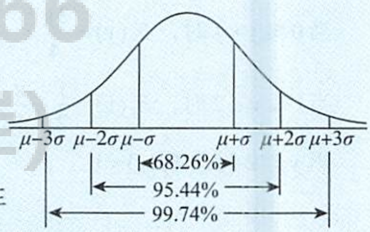


图 2-9

3. 混合型分布

X 是混合型，则 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$.

例 2.11 设随机变量 X 的绝对值不大于 1，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{4}$. 在事件 $\{-1<X<1\}$ 发生的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比，求 X 的分布函数 $F(x)$.

【解】由题设知 $P\{|X|\leqslant 1\}=1$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，记 $A=\{-1<X<1\}$，依题意，在 A 发生的条件下，X 在 $(-1,1)$ 上服从均匀分布，即在 A 发生的条件下，X 的条件概率密度为

$$f_X(x\mid A)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由题设得 $\quad P(A)=P\{-1<X<1\}=P\{-1\leqslant X\leqslant 1\}-P\{X=-1\}-P\{X=1\}$

$$=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$$

记所求 X 的分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$，则

当 $x<-1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $-1\leqslant x<1$ 时，$\quad F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X<-1\}+P\{X=-1\}+\underline{P\{-1<X\leqslant x\}}$

$=P\{-1<X\leqslant x,\Omega\}$

$=P\{-1<X\leqslant x,(A\cup\overline{A})\}$

$$=0+\frac{1}{8}+P\{-1<X\leqslant x,A\}+\underline{P\{-1<X\leqslant x,\overline{A}\}}$$

$=P\{-1<X\leqslant x,\overline{-1<X<1}\}$

$=P(\varnothing)=0$

$$=\frac{1}{8}+P(A)P\{-1<X\leqslant x\mid A\}=\frac{1}{8}+\frac{5}{8}\int_{-1}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{5x+7}{16};$$

当 $x\geqslant 1$ 时，由于 $P\{|X|\leqslant 1\}=1$，因此 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=1$.

综上可得

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{5x+7}{16}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

【注】（1）$P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,\Omega\}$，这是求随机变量分布、计算概率时常用的技巧，事实上是“全集分解法”.

（2）从本题可以看出，X 的分布函数 $F(x)$ 既不是连续函数（X 不是连续型随机变量），也不是阶梯形函数（X 不是离散型随机变量）.

三 用分布

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

利用分布求概率及反问题.

（1）$X\sim F(x)$，则

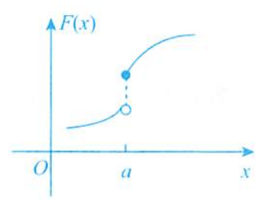
① $P\{X\leqslant a\}=F(a)$；

② $P\{X<a\}=F(a-0)$；

③ $P\{X=a\}=P\{X\leqslant a\}-P\{X<a\}=F(a)-F(a-0)$；

④ $P\{a<X<b\}=P\{X<b\}-P\{X\leqslant a\}=F(b-0)-F(a)$；

⑤ $P\{a\leqslant X\leqslant b\}=P\{X\leqslant b\}-P\{X<a\}=F(b)-F(a-0)$.



$F(a)=\lim\limits_{x\to a^{+}}F(x)$

（2）$X\sim p_i$，则 $$P\{X\in I\}=\sum_{x_i\in I}P\{X=x_i\}.$$

（3）$X\sim f(x)$，则 $$P\{X\in I\}=\int_I f(x)\mathrm{d}x.$$

（4）反问题：已知概率反求参数.

例 2.12 设随机变量 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

记 $p_1=P\{0\leqslant X\leqslant 1\}$，$p_2=P\{0<X<1\}$，则 p_1，p_2 分别为（　　）.

（A）$1-\mathrm{e}^{-1}$，0　　（B）$1-\mathrm{e}^{-2}$，$1-\mathrm{e}^{-1}$　　（C）$1-\mathrm{e}^{-3}$，$1-\mathrm{e}^{-2}$　　（D）$1-\mathrm{e}^{-4}$，$1-\mathrm{e}^{-3}$

【解】应选（A）.

$$p_1=P\{0\leqslant X\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1\}-P\{X<0\}=F(1)-F(0-0)=1-\mathrm{e}^{-1}-0=1-\mathrm{e}^{-1};$$

$$p_2=P\{0<X<1\}=P\{X<1\}-P\{X\leqslant 0\}=F(1-0)-F(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

例 2.13 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$，则 $P\{X<0\}=$

(　　).

(A) 0.2　　　　(B) 0.3　　　　(C) 0.4　　　　(D) 0.5

【解】应选(A).

由 $f(1+x)=f(1-x)$ 知，概率密度 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，则 $P\{X<1\}=0.5$.

由 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$ 知，$P\{0<X<2\}=0.6$，进而 $P\{0<X<1\}=0.3$.

于是 $P\{X<0\}=P\{X\leqslant 0\}=P\{X<1\}-P\{0<X<1\}=0.5-0.3=0.2$，选(A).

例 2.14 已知 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$，且 $aX+b\sim N(0,1)(a>0)$，则 $(a,b)=$ (　　).

(A) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　(B) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　(C) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

【解】应选(A).

根据正态分布的概率密度知 $X\sim N(-1,2)$，故 $\dfrac{X+1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，所以 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 2.15 设 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{9}, & 3\leqslant x\leqslant 6,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

常数 k 满足 $P\{X\geqslant k\}=\dfrac{2}{3}$，则 k 的取值范围为________.

【解】应填 $[1,3]$.

已知 $\dfrac{2}{3}=P\{X\geqslant k\}=\int_k^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，由等式右边积分的几何意义(见图 2-10)：在 $[k,+\infty)$ 上曲边为 $f(x)$ 的梯形的面积，即知 k 的取值范围为 $[1,3]$.

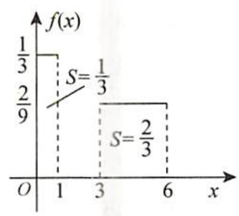


图 2-10

【注】应用概率密度的几何意义解题有时十分简捷方便.

第 3 讲 一维随机变量函数的分布

知识结构

- 离散型→离散型 — $p_i = P\{X = x_i\}, Y = g(X), Y \sim \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$
- 连续型→连续型（或混合型）
  - 分布函数法 — $F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{g(X) \leqslant y\} = \int_{g(x)\leqslant y} f_X(x)\mathrm{d}x$
  - 公式法 — $f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] \cdot |h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$
- 连续型→离散型 — $X \sim f_X(x), Y = g(X)$ 离散，确定 Y 的可能取值 a，计算 $P\{Y = a\}$，求 Y 的概率分布

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

一 离散型→离散型

设 X 为离散型随机变量，其概率分布为 $p_i = P\{X = x_i\}(i = 1, 2, \cdots)$，则 X 的函数 $Y = g(X)$ 也是离散型随机变量，其概率分布为 $P\{Y = g(x_i)\} = p_i$，即

$$Y \sim \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}.$$

如果有若干个 $g(x_k)$ 相同，则合并诸项为一项 $g(x_k)$，并将相应概率相加作为 Y 取 $g(x_k)$ 值的概率 .

例 3.1 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, 3, \cdots$. 若 Y 表示 X 被 3 除的余数，则 Y 的概率分布为________.

【解】应填 $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.

Y 的可能取值为 0，1，2.

$$P\{Y = 0\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = 3k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} = \frac{1}{7},$$

$$P\{Y = 1\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = 3k + 1\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k+1}} = \frac{4}{7},$$

$$P\{Y = 2\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = 3k + 2\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k+2}} = \frac{2}{7},$$

所以 Y 的概率分布为

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

二 连续型→连续型（或混合型）

设 X 为连续型随机变量，其分布函数、概率密度分别为 $F_X(x)$ 与 $f_X(x)$，随机变量 $Y=g(X)$ 是 X 的函数，则 Y 的分布函数或概率密度可用下面两种方法求得.

1. 分布函数法

此不等式的几何意义是：曲线 $Y=g(X)$ 在直线 $Y=y$ 下方，由此可通过作图得出 X 的取值范围. 在 $Y=g(X)$ 是非单调函数时，一般比解析法方便.

直接由定义求 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\underline{g(X)\leqslant y}\}=\int_{g(x)\leqslant y}f_X(x)\mathrm{d}x\ .$$

如果 $F_Y(y)$ 连续，且除有限个点外，$F_Y'(y)$ 存在且连续，则 Y 的概率密度 $f_Y(y)=F_Y'(y)$.

2. 公式法

根据上面的分布函数法，若 $y=g(x)$ 在 (a,b) 上是关于 x 的严格单调可导函数，则存在 $x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 在 (a,b) 上的可导反函数.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

若 $y=g(x)$ 严格单调增加，则 $x=h(y)$ 也严格单调增加，即 $h'(y)>0$，且

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=P\{X\leqslant h(y)\}=\int_{-\infty}^{h(y)}f_X(x)\mathrm{d}x\ ,$$

故 $f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X[h(y)]\cdot h'(y)$.

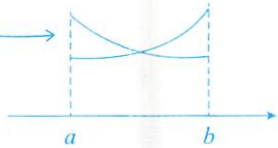
若 $y=g(x)$ 严格单调减少，则 $x=h(y)$ 也严格单调减少，即 $h'(y)<0$，且

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=P\{X\geqslant h(y)\}=\int_{h(y)}^{+\infty}f_X(x)\mathrm{d}x\ ,$$

故 $f_Y(y)=F_Y'(y)=-f_X[h(y)]\cdot h'(y)=f_X[h(y)]\cdot[-h'(y)]$.

综上，

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\cdot|h'(y)|, & \alpha<y<\beta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$



其中 $\alpha=\min\left\{\lim\limits_{x\to a^+}g(x),\lim\limits_{x\to b^-}g(x)\right\},\beta=\max\left\{\lim\limits_{x\to a^+}g(x),\lim\limits_{x\to b^-}g(x)\right\}$.

例 3.2 在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为 X，较长一段的长度记为 Y. 令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

（1）求 X 的概率密度；

（2）求 Z 的概率密度.

用已知来表示未知

【解】（1）设随机取的点的坐标记为 V，则 $V\sim U(0,2)$，$X=\min\{V,2-V\}$，X 的分布函数记为 $F_X(x)$. 由于 $P\{0\leqslant X\leqslant 1\}=1$，故

已知　　未知，且 $Y=2-X$

$\overbrace{0\quad}^{V}V\overbrace{\qquad\quad}^{2-V}2$

当 $x<0$ 时，$F_X(x)=0$；当 $x\geqslant 1$ 时，$F_X(x)=1$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，

$$\begin{aligned}F_X(x)&=P\{X\leqslant x\}\\&=P\{\min\{V,2-V\}\leqslant x\}\\&=1-P\{\min\{V,2-V\}>x\}\\&=1-P\{x<V<2-x\}\\&=1-\frac{(2-x)-x}{2}=x.\end{aligned}$$

$V>x$ 且 $2-V>x\Rightarrow x<V<2-x$

$0\quad x\quad 2-x\quad 2$

$\dfrac{2-2x}{2}=1-x$

所以 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

故 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 能一元，不要多元

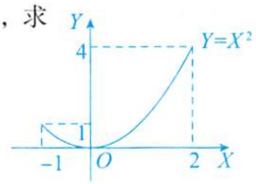
（2）由条件知，$Z=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{2-X}{X}$. 由于函数 $z=\dfrac{2-x}{x}$ 在 $(0,1)$ 内严格单调减少且可导，反函数为 $x=\dfrac{2}{1+z}$，且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{2}{(1+z)^2}$，故 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}f_X\left(\dfrac{2}{1+z}\right)\left|-\dfrac{2}{(1+z)^2}\right|, & z>1,\\ 0, & 其他\end{cases} \quad z(0)\to+\infty, z(1)=1$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{(1+z)^2}, & z>1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

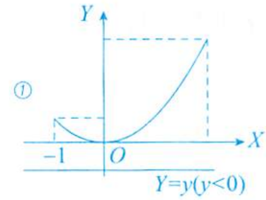
微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 3.3 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 令 $Y=X^2$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.



【解】Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}$.

①当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$，$f_Y(y)=0$ ；

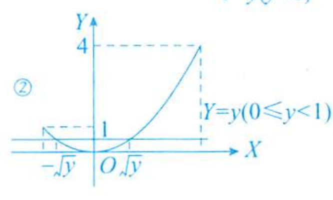


②当 $0\leqslant y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$$

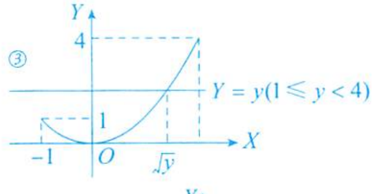
$$=\frac{1}{2}\sqrt{y}+\frac{1}{4}\sqrt{y}=\frac{3}{4}\sqrt{y},$$

$$f_Y(y)=\frac{3}{8\sqrt{y}};$$



③当 $1\leqslant y<4$ 时，

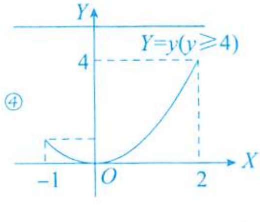
$$F_Y(y)=P\{-1\leqslant X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y},\quad f_Y(y)=\frac{1}{8\sqrt{y}};$$



④当 $y\geqslant 4$ 时，$F_Y(y)=1$，$f_Y(y)=0$.

故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1<y<4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$



例 3.4 设随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$ 是严格单调增加函数，其反函数 $F_X^{-1}(y)$ 存在，$Y=F_X(X)$．证明：Y 服从区间（0,1）上的均匀分布．

【证】$Y=F_X(X)$ 是在区间（0,1）上取值的随机变量，故

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{F_X(X)\leqslant y\}=P\{X\leqslant F_X^{-1}(y)\}=F_X[F_X^{-1}(y)]=y.$$

综上所述，$Y=F_X(X)$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$$

这就是在区间（0,1）上的均匀分布函数，所以 $Y\sim U(0,1)$．

【注】（1）题设条件中的“$F_X(x)$ 严格单调增加”是充分条件，事实上只需要 $F_X(x)$ 在 X 的正概率密度区间上严格单调增加即可，见例 3.5.

（2）本题是一个重要结论，即在满足 $F_X(x)$ 在 X 的正概率密度区间上严格单调增加时，若 $X\sim F_X(x)$，则 $Y=F_X(X)\sim U(0,1)$．这一结论考研中常用．

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 3.5 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数，EX 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X)>EX-1\}=$________.

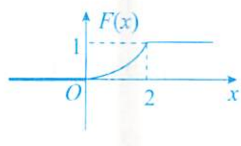
【解】应填 $\dfrac{2}{3}$．

法一 由题意知，

$$EX=\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，得

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$



从而，

$$P\{F(X)>EX-1\}=P\left\{\frac{X^2}{4}>\frac{1}{3}\right\}=P\left\{2>X>\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

法二 令 $Y=F(X)$，由例 3.4 可知，$Y\sim U(0,1)$，则

$$P\{F(X)>EX-1\}=P\left\{Y>\frac{1}{3}\right\}=\frac{2}{3}.$$

三 连续型→离散型

若 $X \sim f_X(x)$，且 $Y=g(X)$ 是离散型随机变量．首先确定 Y 的可能取值 a，然后通过计算概率 $P\{Y=a\}$ 求得 Y 的概率分布．

例 3.6 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，令 $Y=[X]+1$（$[X]$ 为不超过 X 的最大整数），则 $P\{Y>5 \mid Y>2\}$ =________.

【解】应填 $e^{-3\lambda}$．

$X \sim E(\lambda)$，即 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ X 的有效取值范围为 $[0,+\infty)$，故 $Y=[X]+1$ 的值域是 $\{1,2,3,\cdots\}$，Y 是离散型随机变量，则

$$\begin{aligned}P\{Y=k\} &= P\{[X]+1=k\}=P\{[X]=k-1\}=P\{k-1 \leqslant X<k\}\\ &= P\{X<k\}-P\{X<k-1\}=F_X(k)-F_X(k-1)=(1-e^{-\lambda k})-[1-e^{-\lambda(k-1)}]\\ &= e^{-\lambda(k-1)}-e^{-\lambda k}=(1-e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^{k-1}\\ &= (1-e^{-\lambda})[1-(1-e^{-\lambda})]^{k-1},\end{aligned}$$

这是参数为 $p=1-e^{-\lambda}$ 的几何分布

$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$

其中 $k=1,2,\cdots$. 所以 Y 服从参数为 $1-e^{-\lambda}$ 的几何分布．

根据几何分布的无记忆性，得

$$\begin{aligned}P\{Y>5 \mid Y>2\} &= P\{Y>3\}=1-P\{Y \leqslant 3\}\\ &= 1-\sum_{k=1}^{3}[1-(1-e^{-\lambda})]^{k-1} \cdot (1-e^{-\lambda})\\ &= 1-(1-e^{-\lambda}) \cdot \sum_{k=1}^{3} e^{-\lambda(k-1)}\\ &= e^{-3\lambda}.\end{aligned}$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

第4讲 多维随机变量及其分布

知识结构

微信公众号：djky66（顶尖考研祝您上岸）

- 判分布
  - $F(x,y)$ 是联合分布函数的充要条件
    - 单调性——单调不减函数
    - 右连续性
      - $\lim\limits_{x\to x_0^+} F(x,y)=F(x_0+0,y)=F(x_0,y)$
      - $\lim\limits_{y\to y_0^+} F(x,y)=F(x,y_0+0)=F(x,y_0)$
    - 有界性——值域为 $[0,1]$
    - 非负性——$P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}\geqslant 0$
  - $\{p_{ij}\}$ 是联合分布律的充要条件——$p_{ij}\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_j\sum\limits_i p_{ij}=1$
  - $f(x,y)$ 是联合概率密度的充要条件——$f(x,y)\geqslant 0$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$
  - 反问题
    - ① $F(-\infty,y)=0,F(x,-\infty)=0$
    - ② $F(-\infty,-\infty)=0,F(+\infty,+\infty)=1$
    - ③ $\sum\limits_j\sum\limits_i p_{ij}=1,\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$
- 求分布
  - 求联合分布
    - 求 $F(x,y)$
      - $(X,Y)\sim p_{ij}$——$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\sum\limits_{x_i\leqslant x,y_j\leqslant y} p_{ij}$
      - $(X,Y)\sim f(x,y)$——$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}v$
    - 求 p_{ij}（常与求 $P(A)$ 结合）
    - 求 $f(x,y)$
      - 二维均匀分布——$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ S_D 为区域 D 的面积
      - 二维正态分布
        - $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$,
        - $\mu_1\in\mathbf{R},\mu_2\in\mathbf{R},\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$

- 求分布
  - 求边缘分布
    - 求 $F_X(x), F_Y(y)$
      - $F_X(x)=F(x,+\infty)$
      - $F_Y(y)=F(+\infty,y)$
    - 求 $p_{i\cdot}, p_{\cdot j}$
      - $p_{i\cdot}=\sum\limits_{j}p_{ij}$
      - $p_{\cdot j}=\sum\limits_{i}p_{ij}$
    - 求 $f_X(x), f_Y(y)$
      - $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$
      - $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$
  - 求条件分布
    - 求 $P\{Y=y_j \mid X=x_i\}$，$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}$
      - $P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$
      - $P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$
    - 求 $f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$
      - $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$
      - $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
  - 判独立
    - ①对任意 x,y，$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$
    - ②对任意 i,j，$p_{ij}=p_{i\cdot}\ p_{\cdot j}$
    - ③联合分布律的每行元素对应成比例
    - ④对任意 x,y，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
    - ⑤若 $f(x,y)$ 的非零区域是矩形，且 $f(x,y)$ 能分解成仅含 x,y 的两个一元函数的乘积，则 X 与 Y 独立 .
    - ⑥若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则其任意 k 个随机变量也相互独立，且其函数 $g_1(X_1),g_2(X_2),\cdots,g_n(X_n)$ 也相互独立
- 用分布
  - ① $(X,Y)\sim p_{ij}$，则 $P\{(X,Y)\in D\}=\sum\limits_{(x_i,y_j)\in D}p_{ij}$
  - ② $(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
  - ③ (X,Y) 为混合型，则用全概率公式
  - ④反问题：已知概率反求参数

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

一 判分布

对任意的实数 x，y，称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$$

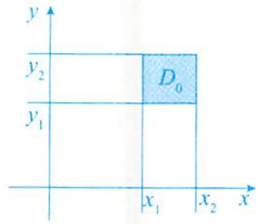
为二维随机变量 (X,Y) 的**分布函数**，记为 $(X,Y)\sim F(x,y)$. $F(x,y)$ 是事件 $A=\{X\leqslant x\}$ 与 $B=\{Y\leqslant y\}$ 同时发生的概率 .

（1）$F(x,y)$ 是联合分布函数的充要条件 .

类似“偏”导数处．固定一个字母，看另一个字母的变化

①单调性 $F(x,y)$ 是 x，y 的单调不减函数：

当 $x_1 < x_2$ 时，$F(x_1,y) \leqslant F(x_2,y)$；当 $y_1 < y_2$ 时，$F(x,y_1) \leqslant F(x,y_2)$.



②**右连续性**　$F(x,y)$ 是 x，y 的右连续函数：

$$\lim_{x\to x_0^+} F(x,y) = F(x_0+0,y) = F(x_0,y)\text{；}$$

$$\lim_{y\to y_0^+} F(x,y) = F(x,y_0+0) = F(x,y_0)\text{ .}$$

③**有界性**　$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$，$F(+\infty,+\infty) = 1$.

④**非负性**　对任意 $x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，有

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2\} = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \geqslant 0\text{ .}$$

（2）$\{p_{ij}\}$ **是联合分布律的充要条件** .　实质上是 $(x,y)\in D_0$ 的概率 $\geqslant 0$

如果二维随机变量 (X,Y) 只能取有限对值或可列无限对值 (x_1,y_1)，(x_1,y_2)，…，(x_n,y_n)，…，则称 (X,Y) 为**二维离散型随机变量** .

称

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}\text{，}i\text{，}j = 1\text{，}2\text{，}\cdots$$

为 (X,Y) 的**分布律**或称为随机变量 X 和 Y 的**联合分布律**，记为 $(X,Y) \sim p_{ij}$. 联合分布律常用表格形式表示 .

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

X \ Y	y_1	…	y_j	…	$P\{X = x_i\}$
x_1	p_{11}	…	p_{1j}	…	$p_{1\cdot}$
⋮	⋮		⋮		⋮
x_i	p_{i1}	…	p_{ij}	…	$p_{i\cdot}$
⋮	⋮		⋮		⋮
$P\{Y = y_j\}$	$p_{\cdot 1}$	…	$p_{\cdot j}$	…	1

$\{p_{ij}\}$ 是联合分布律的充要条件为 $p_{ij} \geqslant 0$ 且 $\sum\limits_j \sum\limits_i p_{ij} = 1$.

（3）$f(x,y)$ **是联合概率密度的充要条件** .

如果二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$ 可以表示为

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\text{，}(x,y)\in \mathbf{R}^2\text{，}$$

其中 $f(x,y)$ 是非负可积函数，则称 (X,Y) 为**二维连续型随机变量**，称 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的**概率密度**，记为 $(X,Y) \sim f(x,y)$.

$f(x,y)$ 是联合概率密度的充要条件为 $f(x,y) \geqslant 0$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$.

（4）**反问题（重点）**.

$$\text{用}\begin{cases} F(-\infty,y) = 0, F(x,-\infty) = 0, \\ F(-\infty,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1, \\ \sum\limits_j\sum\limits_i p_{ij} = 1, \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 \end{cases}\text{建方程，求参数 .}$$

二　求分布

（1）**求联合分布** .

①求 $F(x,y)$.

a. $(X,Y)\sim p_{ij}$，则

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\sum_{x_i\leqslant x,y_j\leqslant y}p_{ij}.$$

b. $(X,Y)\sim f(x,y)$，则

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}v.$$

②求 p_{ij}（常与求 $P(A)$ 结合）.

③求 $f(x,y)$.

a. 二维均匀分布.

称 (X,Y) 在平面有界区域 D 上服从**均匀分布**，如果 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 S_D 为区域 D 的面积.

b. 二维正态分布.

如果 (X,Y) 的概率密度为

微信公众号：djky66（顶尖考研祝您上岸）

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},$$

其中 $\mu_1\in\mathbf{R}$，$\mu_2\in\mathbf{R}$，$\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，$-1<\rho<1$，则称 (X,Y) 服从参数为 μ_1，μ_2，σ_1^2，σ_2^2，ρ 的**二维正态分布**，记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$. 注意参数位置顺序.

【注】有下面 6 条重要结论.

①若 $(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则

$$X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\quad X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2).$$

②若 $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 且 X_1，X_2 相互独立，则

独立 ⇒ 不相关，故 $\rho=0$

$$(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;0).$$

恰好说明：联合分布 ⇒ 边缘分布 ⇍

③$(X_1,X_2)\sim N\Rightarrow k_1X_1+k_2X_2\sim N$（$k_1$，$k_2$ 是不全为 0 的常数）.

④$(X_1,X_2)\sim N$，$Y_1=a_1X_1+a_2X_2$，$Y_2=b_1X_1+b_2X_2$，且

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow(Y_1,Y_2)\sim N.$$

$\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{bmatrix}$，为可逆线性变换矩阵

⑤$(X_1,X_2)\sim N$，则 X_1，X_2 相互独立 ⇔ X_1，X_2 不相关.

以上 5 条可推广至有限个随机变量的情形.

⑥$(X,Y)\sim N$，则 $f_{X|Y}(x|y)\sim N$，$f_{Y|X}(y|x)\sim N$（二维正态分布的条件分布仍是正态分布）.

（2）求边缘分布.

①求 $F_X(x)$，$F_Y(y)$.

$$F_X(x)=F(x,+\infty),\quad F_Y(y)=F(+\infty,y).$$

②求 $p_{i\cdot}$，$p_{\cdot j}$.

$$p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}, \quad p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}.$$

③求 $f_X(x)$，$f_Y(y)$.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y, \quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

（3）求条件分布.

①求 $P\{Y=y_j \mid X=x_i\}$，$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}$.

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},$$

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}.$$

②求 $f_{Y|X}(y \mid x)$，$f_{X|Y}(x \mid y)$.

$$f_{Y|X}(y \mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_{X|Y}(x \mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

联立得 $\dfrac{f_{X|Y}(x \mid y)}{f_{Y|X}(y \mid x)}=\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.
可记住此公式.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

【注】（1）联合 = 边缘 × 条件，亦常考. 如 $f(x,y)=f_{Y|X}(y \mid x)f_X(x)$.
（2）以上式子，所有分母均不为零.

（4）判独立.

① X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ 对任意 x，y，$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$.

X,Y 不独立 $\Leftrightarrow$ 存在 x_0,y_0，使 $A=\{X \leqslant x_0\}$ 与 $B=\{Y \leqslant y_0\}$ 不独立，即 $F(x_0,y_0)\neq F_X(x_0)\cdot F_Y(y_0)$.

因此，证明不独立的常用方法：找 x_0,y_0，使 $0<P\{X \leqslant x_0\},P\{Y \leqslant y_0\}<1$,

$$\{X \leqslant x_0\}\subset\{Y \leqslant y_0\} \text{ 或 } \{Y \leqslant y_0\}\subset\{X \leqslant x_0\} \text{ 或 } \{X \leqslant x_0, Y \leqslant y_0\}=\varnothing.$$

②若 (X,Y) 为二维离散型随机变量，X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ 对任意 i，j，$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$.

③由②知，(X,Y) 的分布律为

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$p_{2\cdot}$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$p_{\cdot 3}$	1

其中 $p_{ij}\neq 0, i=1,2, j=1,2,3$，且满足 $\begin{bmatrix} p_{1\cdot} \\ p_{2\cdot} \end{bmatrix}[p_{\cdot 1} \quad p_{\cdot 2} \quad p_{\cdot 3}]=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{bmatrix}$，即

$$\frac{p_{11}}{p_{21}}=\frac{p_{12}}{p_{22}}=\frac{p_{13}}{p_{23}}.$$

又以上过程可逆，故可有重要结论：当 $p_{ij}\neq 0$ 时，X，Y 独立 $\Leftrightarrow$ 联合分布律的每行元素对应成比例. 故可由联合分布律的每行元素是否对应成比例来判断 X，Y 是否独立.

④若 (X,Y) 为二维连续型随机变量，X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ 对任意 x，y，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

⑤ a. 若 $f(x,y)$ 的非零区域不是矩形（包括无界广义矩形），则 X 与 Y 不独立；

b. 若 $f(x,y)$ 不能分解成仅含 x,y 的两个一元函数的乘积，则 X 与 Y 不独立；

c. 若 $f(x,y)$ 的非零区域是矩形，且 $f(x,y)$ 能分解成仅含 x,y 的两个一元函数的乘积，则 X 与 Y 独立．

⑥ a. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个随机变量也相互独立；

b. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则其函数 $g_1(X_1),g_2(X_2),\cdots,g_n(X_n)$ 也相互独立．

三 用分布

用分布求概率及反问题．

① $(X,Y)\sim p_{ij}$，则 $P\{(X,Y)\in D\}=\sum\limits_{(x_i,y_j)\in D}p_{ij}$ ．

② $(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ．

③ (X,Y) 为混合型，则用全概率公式．

微信公众号：djky66

④反问题：已知概率反求参数．

（顶尖考研祝您上岸）

例 4.1 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{21}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{21}$

求 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$ ．

【解】(X,Y) 所有可能取值点为 $(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$，$(1,1)$．由此可将平面划分为五个区域．由图 4-1 易知，

对于离散型，用集中点和坐标系划分出区域．
划分方式：以所有的点为起点，向上向右划分区域

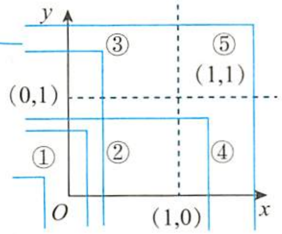


图 4-1

①当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$ ；

②当 $0\leqslant x<1$，$0\leqslant y<1$ 时，

$$F(x,y)=P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{3};$$

③当 $0\leqslant x<1$，$y\geqslant 1$ 时，

$$F(x,y)=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=\frac{11}{21};$$

④当 $x\geqslant 1$，$0\leqslant y<1$ 时，

$$F(x,y)=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{2}{3};$$

⑤当 $x\geqslant 1$，$y\geqslant 1$ 时，$F(x,y)=1$ ．

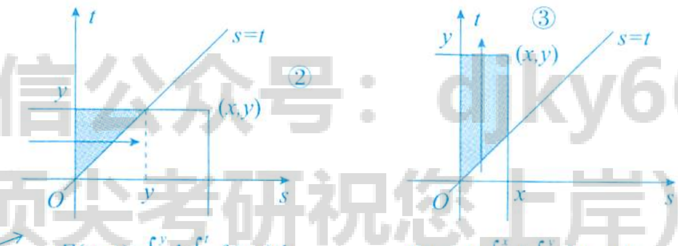
所以 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0,\\ \dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,0\leqslant y<1,\\ \dfrac{11}{21}, & 0\leqslant x<1,y\geqslant 1,\\ \dfrac{2}{3}, & x\geqslant 1,0\leqslant y<1,\\ 1, & x\geqslant 1,y\geqslant 1.\end{cases}$$

例 4.2 已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+y)}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$.



微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

对于连续型，用交点和坐标系划分出区域．
划分方式：以所有的点为起点，向上向右划分区域

【解】如图 4-2 所示，①当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$；

②当 $0\leqslant y<x$ 时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}s\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\mathrm{d}t=2\int_0^y \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s=1-2\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{-2y};$$

③当 $0\leqslant x\leqslant y$ 时，

$$\begin{aligned}F(x,y)&=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}s\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\mathrm{d}t=2\int_0^x \mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s\int_s^y \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&=1-2\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{-(x+y)}.\end{aligned}$$

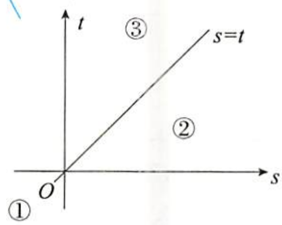


图 4-2

于是，(X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0,\\ 1-2\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{-2y}, & 0\leqslant y<x,\\ 1-2\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{-(x+y)}, & 0\leqslant x\leqslant y.\end{cases}$$

例 4.3 下列表格给出了二维随机变量 (X,Y) 的分布律和边缘分布的部分值，并已知 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$ ，$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0.2$ ，且 $EY=0$，求下表中 a，b，c，d 的值．

X \ Y	-1	0	1	$P\{X=x_i\}$
-1	a	b	0.2	$a+b+0.2$
1	0.1	c	d	$c+d+0.1$
$P\{Y=y_j\}$	0.2	$b+c$	$0.2+d$	1

【解】 $a=0.2-0.1=0.1$，$EY=-0.2+0.2+d=d=0$，

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=-1,Y=0\}$$
$$=a+b=0.1+b=0.2,$$

故 $b=0.1$. 又由 $0.2+b+c+0.2+d=1$，得 $c=0.5$.

例 4.4 袋中有编号为 1，1，2，3 的四个球，现从中无放回地取两次，每次取一个，设 X_1，X_2 分别为第一次、第二次取到的球的号码，求 (X_1,X_2) 的分布律，并判断 X_1 与 X_2 的独立性.

【解】 X_1 与 X_2 可能的取值为 1，2，3，则 $=P\{X_1=1\}P\{X_2=1\mid X_1=1\}$

$$p_{11}=\underline{P\{X_1=1,X_2=1\}}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}，\quad p_{12}=P\{X_1=1,X_2=2\}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}，$$

$$p_{13}=P\{X_1=1,X_2=3\}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}，\quad p_{21}=P\{X_1=2,X_2=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}，$$

$$p_{22}=0，\quad p_{23}=P\{X_1=2,X_2=3\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}，$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

$$p_{31}=P\{X_1=3,X_2=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}，$$

$$p_{32}=P\{X_1=3,X_2=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}，\quad p_{33}=0.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

于是 (X_1,X_2) 的分布律为

X_1 \ X_2	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

因为 $p_{11}\neq p_{\cdot 1}\cdot p_{1\cdot}$，所以 X_1 与 X_2 不相互独立.

例 4.5 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}，\quad -\infty<x<+\infty，\quad -\infty<y<+\infty，$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$.

【解】因为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y$$
$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2-x^2}\mathrm{d}y=A\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$
$$=A\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}，\quad -\infty<x<+\infty，$$

所以

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\mathrm{d}x=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=A\pi,$$

故 $A=\dfrac{1}{\pi}$.

当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\dfrac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2xy-y^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2},\quad -\infty<y<+\infty .$$

例 4.6 设二维正态随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，已知条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)=\sqrt{\dfrac{2}{3\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}$ 和 $f_{Y|X}(y\mid x)=\sqrt{\dfrac{2}{3\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}$，则 $f(x,y)=$________.

【分析】由于 $f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$，$f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$，则 $\dfrac{f_{X|Y}(x\mid y)}{f_{Y|X}(y\mid x)}=\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$，从而将 x，y 的函数分离．再由 $f(x,y)=f_{X|Y}(x\mid y)\cdot f_Y(y)$ 即可求得 $f(x,y)$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

【解】应填 $\dfrac{1}{\sqrt{3}\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}$.

由于

$$\frac{f_{X|Y}(x\mid y)}{f_{Y|X}(y\mid x)}=\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\left[\left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)-\left(y^2-xy+\frac{x^2}{4}\right)\right]}=\mathrm{e}^{-\frac{x^2-y^2}{2}}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}},$$

且二维正态分布的两个边缘分布都是正态分布的形式，故可令 $f_X(x)=C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，$f_Y(y)=C\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$，$C$ 为常数．由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\mathrm{d}x=1$，$\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)\mathrm{d}y=1$，得 $C=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$，即 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，$f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$. 故

$$f(x,y)=f_{X|Y}(x\mid y)\cdot f_Y(y)=\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)} .$$

例 4.7 已知二维随机变量 (X,Y) 在以点 $(0,0)$，$(1,-1)$，$(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布．

（1）求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 及条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$，$f_{Y|X}(y\mid x)$，并判断 X 与 Y 是否独立；

（2）计算概率 $P\left\{X>\dfrac{1}{2}\middle|Y>0\right\}$，$P\left\{X>\dfrac{1}{2}\middle|Y=\dfrac{1}{4}\right\}$.

【解】直接应用公式计算，但要注意非零区域（见图 4-3）.

由于以 $(0,0)$，$(1,-1)$，$(1,1)$ 为顶点的三角形的面积为

$$\frac{1}{2}\times1\times2=1,$$

故

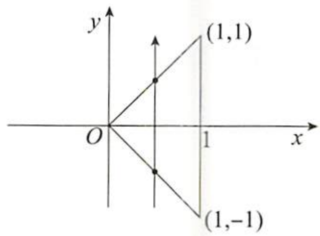


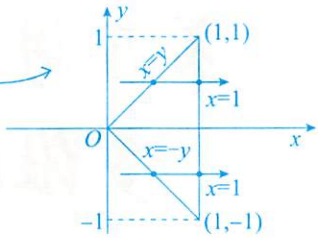
图 4-3

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant1,|y|<x,\\0, & 其他.\end{cases}$$

（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-x}^{x}\mathrm{d}y=2x, & 0\leqslant x\leqslant1,\\0, & 其他.\end{cases}$

求边缘概率密度的口诀：
求谁不积谁，
不积先定限，
限内画条线，
先交写下限，
后交写上限.

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-y}^{1}\mathrm{d}x=1+y, & -1\leqslant y<0,\\ \int_{y}^{1}\mathrm{d}x=1-y, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



$$=\begin{cases}1-|y|, & |y|\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

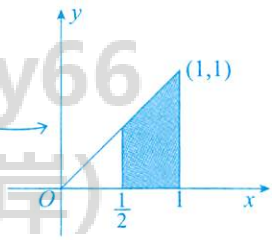
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

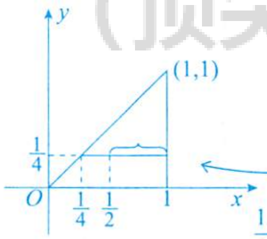
$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & |y|<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由于 $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，故 X 与 Y 不独立.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（2）$$P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y>0\right\}=\frac{P\left\{X>\frac{1}{2},Y>0\right\}}{P\{Y>0\}}=\frac{\iint\limits_{x>\frac{1}{2},y>0}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{y>0}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$





$$=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y}{\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y}=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\mathrm{d}x}{\int_0^1 x\mathrm{d}x}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}.$$

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y=\frac{1}{4}\right\}=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f_{X|Y}\left(x\middle|y=\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

$$\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}$$

【注】由于 $f(x,y)$ = 常数，因此可以利用面积计算概率.

例 4.8 已知随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 λ 的指数分布，$P\{Y=-1\}=\dfrac{1}{4}$，$P\{Y=1\}=\dfrac{3}{4}$，则概率 $P\{XY\leqslant 2\}$ =________.

【解】应填 $1-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-2\lambda}$.

已知 $X\sim f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $P\{Y=-1\}=\dfrac{1}{4}$，$P\{Y=1\}=\dfrac{3}{4}$，X 与 Y 独立，属于混合型问题，所以由全概率公式得

$$\begin{aligned}P\{XY\leqslant 2\}&=P\{XY\leqslant 2,Y=1\}+P\{XY\leqslant 2,Y=-1\}\\&=P\{X\leqslant 2,Y=1\}+P\{-X\leqslant 2,Y=-1\}\\&=P\{Y=1\}P\{X\leqslant 2\}+P\{Y=-1\}P\{X\geqslant -2\}\\&=\frac{3}{4}\int_0^2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=1-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2\lambda}.\end{aligned}$$

第5讲 多维随机变量函数的分布

知识结构

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

- 多维→一维
  - （离散型，离散型）→离散型
    - $(X,Y)\sim p_{ij}, Z=g(X,Y) \Rightarrow Z$ 的分布律
    - $X\sim p_k, Y\sim q_k, \left\{\begin{array}{l} Z=X+Y \\ Z=XY \\ Z=\max\{X,Y\} \\ Z=\min\{X,Y\} \end{array}\right\} Z$ 的分布律
  - （连续型，连续型）→连续型
    - 分布函数法 — $F_Z(z)=P\{g(X,Y)\leqslant z\}=\iint\limits_{g(x,y)\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
    - 卷积公式法
      - $Z=X+Y \Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$
        $=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$
        $\overset{\text{独立}}{=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$
        $=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$
      - $Z=X-Y \Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-z)\mathrm{d}x$
        $=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y+z,y)\mathrm{d}y$
        $\overset{\text{独立}}{=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(x-z)\mathrm{d}x$
        $=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y+z)f_Y(y)\mathrm{d}y$
      - $Z=XY \Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$
        $=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f\left(\frac{z}{y},y\right)\mathrm{d}y$
        $\overset{\text{独立}}{=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$
        $=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y(y)\mathrm{d}y$
      - $Z=\frac{X}{Y} \Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz,y)\mathrm{d}y$
        $\overset{\text{独立}}{=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(yz)f_Y(y)\mathrm{d}y$
    - 最值分布
      - $P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{X\leqslant z, Y\leqslant z\}=F(z,z)$
      - $P\{\min\{X,Y\}\leqslant z\}=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z)$
  - （离散型，连续型）→连续型 — $X\sim p_i, Y\sim f_Y(y), Z=g(X,Y)$

- 一维→多维
  - 离散型→（离散型，离散型）— $X \sim p_i$，$\begin{cases} U = g(X), \\ V = h(X) \end{cases} \Rightarrow (U,V) \sim q_{ij}$
  - 连续型→（离散型，离散型）— $X \sim f(x)$，$\begin{cases} U = g(X), \\ V = h(X) \end{cases} \Rightarrow (U,V) \sim p_{ij}$
- 多维→多维
  - （离散型，离散型）→（离散型，离散型）— $(X,Y) \sim p_{ij}$，$\begin{cases} U = g(X,Y), \\ V = h(X,Y) \end{cases} \Rightarrow (U,V) \sim q_{ij}$
  - （连续型，连续型）→（离散型，离散型）— $(X,Y) \sim f(x,y)$，$\begin{cases} U = g(X,Y), \\ V = h(X,Y) \end{cases} \Rightarrow (U,V) \sim p_{ij}$
  - （离散型，连续型）→（离散型，离散型）— $X \sim p_i$，$Y \sim f_Y(y)$，$\begin{cases} U = g(X,Y), \\ V = h(X,Y) \end{cases} \Rightarrow (U,V) \sim q_{ij}$

一 多维→一维

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（1）（离散型，离散型）→离散型 .

①$(X,Y) \sim p_{ij}$，$Z = g(X,Y) \Rightarrow Z \sim q_i$.

②$X \sim p_k$，$Y \sim q_k$，X，Y独立且取值在某一集合，可考$Z = X + Y$，XY，$\max\{X,Y\}$，$\min\{X,Y\}$等，这是重点，比如：

a. $Z = X + Y$，且X，Y独立并取非负整数，则

$$\begin{aligned} P\{Z = k\} &= P\{X + Y = k\} \\ &= P\{X = 0\}P\{Y = k\} + P\{X = 1\}P\{Y = k-1\} + \cdots + P\{X = k\}P\{Y = 0\} \\ &= p_0 q_k + p_1 q_{k-1} + \cdots + p_k q_0,\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \end{aligned}$$

b. $Z = \max\{X,Y\}$，且X，Y独立并取非负整数，则

$$\begin{aligned} P\{Z = k\} &= P\{\max\{X,Y\} = k\} \\ &= P\{X = k, Y = k\} + P\{X = k, Y = k-1\} + \cdots + P\{X = k, Y = 0\} + \\ &\quad\ P\{X = k-1, Y = k\} + P\{X = k-2, Y = k\} + \cdots + P\{X = 0, Y = k\} \\ &= p_k q_k + p_k q_{k-1} + \cdots + p_k q_0 + p_{k-1} q_k + p_{k-2} q_k + \cdots + p_0 q_k,\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \end{aligned}$$

c. $Z = \min\{X,Y\}$，且X，Y独立，$0 \leqslant X$，$Y \leqslant l$，X，Y取整数时，

$$\begin{aligned} P\{Z = k\} &= P\{\min\{X,Y\} = k\} \\ &= P\{X = k, Y = k\} + P\{X = k, Y = k+1\} + \cdots + P\{X = k, Y = l\} + \\ &\quad\ P\{X = k+1, Y = k\} + P\{X = k+2, Y = k\} + \cdots + P\{X = l, Y = k\} \\ &= p_k q_k + p_k q_{k+1} + \cdots + p_k q_l + p_{k+1} q_k + p_{k+2} q_k + \cdots + p_l q_k,\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l. \end{aligned}$$

例 5.1 袋中有编号为 1，1，2，3 的四个球，现从中无放回地取两次，每次取一个，设X_1，X_2分别为第一次、第二次取到的球的号码，求随机变量$Y=X_1X_2$的分布 .

【解】由例 4.4 知，(X_1,X_2)的分布律为

X_1 \ X_2	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$Y=X_1X_2$ 的所有取值为 1，2，3，6，于是

$$P\{Y=1\}=p_{11}=\frac{1}{6},\quad P\{Y=2\}=p_{12}+p_{21}=\frac{1}{3},$$

微信公众号：djky66

$$P\{Y=3\}=p_{13}+p_{31}=\frac{1}{3},\quad P\{Y=6\}=p_{23}+p_{32}=\frac{1}{6},$$

从而有

（顶尖考研祝您上岸）

$$Y\sim\begin{pmatrix}1&2&3&6\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

例 5.2 设 X 与 Y 是独立同分布的随机变量，均服从参数为 p 的几何分布，求 $Z=\max\{X,Y\}$ 的概率分布 .

【解】由题设，有

$$P\{X=k\}=P\{Y=k\}=p(1-p)^{k-1}(k=1,2,\cdots).$$

$Z=\max\{X,Y\}$ 的所有取值为 1，2，…，且事件

$$\begin{aligned}\{Z=k\}&=\{X=1,Y=k\}\cup\{X=2,Y=k\}\cup\cdots\cup\{X=k,Y=k\}\cup\\&\quad\{X=k,Y=1\}\cup\{X=k,Y=2\}\cup\cdots\cup\{X=k,Y=k-1\}(k=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

由 X 与 Y 相互独立，得

$$\begin{aligned}P\{Z=k\}&=P\{X=1\}P\{Y=k\}+P\{X=2\}P\{Y=k\}+\cdots+P\{X=k\}P\{Y=k\}+\\&\quad P\{X=k\}P\{Y=1\}+P\{X=k\}P\{Y=2\}+\cdots+P\{X=k\}P\{Y=k-1\}\\&=pq^{k-1}(p+pq+\cdots+pq^{k-1})+pq^{k-1}(p+pq+\cdots+pq^{k-2})\\&=p^2q^{k-1}\left(\frac{1-q^k}{1-q}+\frac{1-q^{k-1}}{1-q}\right)\\&=pq^{k-1}(2-q^k-q^{k-1})(q=1-p;\ k=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

例 5.3 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从参数为 λ 的泊松分布，

$$Y\sim\begin{pmatrix}-1&1\\ \frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix},$$

求 $Z=XY$ 的概率分布 .

【解】已知 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}(k=0,1,\cdots)$，$Y$ 可能取值为 −1，1，X 与 Y 相互独立，故 $Z=XY$ 可能取

值为 0，±1，±2，⋯，±k，⋯，其概率分布为

$$P\{Z=XY=0\}=P\{X=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda},$$

$$P\{Z=XY=k\}=P\{X=k,Y=1\}=P\{X=k\}P\{Y=1\}=\frac{3}{4}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=1,2,3,\cdots,$$

$$P\{Z=XY=-k\}=P\{X=k\}P\{Y=-1\}=\frac{1}{4}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=1,2,3,\cdots.$$

（2）（连续型，连续型）→连续型．

①分布函数法．

设 $(X,Y)\sim f(x,y)$，$Z=g(X,Y)$，则

$$F_Z(z)=P\{g(X,Y)\leqslant z\}=\iint\limits_{g(x,y)\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z).$$

②卷积公式法．

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

a. 和的分布．

设 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{独立}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

b. 差的分布．

设 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $Z=X-Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y+z,y)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{独立}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(x-z)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(y+z)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

c. 积的分布．

设 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $Z=XY$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f\left(\frac{z}{y},y\right)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{独立}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

d. 商的分布．

设 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)\mathrm{d}y\xlongequal{独立}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

【注】以上所述的四组公式，可用“口诀”来记忆：“积谁不换谁，换完求偏导”．如 $Z=X-Y$ 的 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)\mathrm{d}x$ 中．

先用第一句："积谁不换谁". 对 x 积分，则不换 x，写成 $f(x,\boxed{})$，换 $y=x-z$，为 $f(x,x-z)$.
再用第二句："换完求偏导". $\dfrac{\partial(x-z)}{\partial z}=-1$，因概率密度非负，要加绝对值，即为 $|-1|=1$. 这样便记住了公式.
若出现更一般的 $Z=aX+bY$，该如何求解？见例 5.5.

③最值函数的分布.

a. $\max\{X,Y\}$ 分布.

设 $(X,Y)\sim F(x,y)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z)=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=F(z,z).$$

当 X 与 Y 独立时，

$$F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z).$$

b. $\min\{X,Y\}$ 分布.

微信公众号：djky66

设 $(X,Y)\sim F(x,y)$，则 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_{\min}(z)&=P\{\min\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{\{X\leqslant z\}\cup\{Y\leqslant z\}\}\\&=P\{X\leqslant z\}+P\{Y\leqslant z\}-P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}\\&=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z).\end{aligned}$$

（顶尖考研祝您上岸）

当 X 与 Y 独立时，

$$F_{\min}(z)=F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z)F_Y(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

推广到 n 个相互独立的随机变量 X_1，X_2，…，X_n 的情况，即

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)].$$

特别地，当 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立且有相同的分布函数 $F(x)$ 与概率密度 $f(x)$ 时，

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n,\quad f_{\max}(z)=n[F(z)]^{n-1}f(z).$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n,\quad f_{\min}(z)=n[1-F(z)]^{n-1}f(z).$$

这些结果在数理统计部分极为重要.

例 5.4 设二维随机变量 (X,Y) 在矩形区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布，求边长为 X 和 Y 的矩形面积 Z 的概率密度.

用卷积公式"三部曲"：
①换字母.

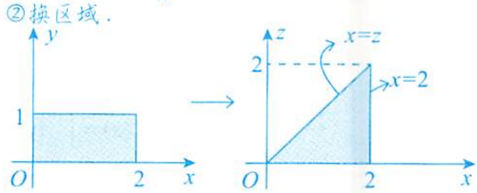
【解】 由题设 $Z=XY$，(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$y\to\dfrac{z}{x}$

$0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant\dfrac{z}{x}\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant z\leqslant x$

②换区域.



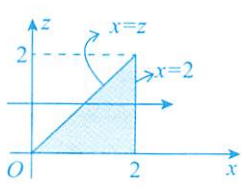
用卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x,\quad 0<z<x\leqslant 2.$$

当 $z\leqslant 0$ 或 $z\geqslant 2$ 时，$f_Z(z)=0$；
当 $0<z<2$ 时，

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_z^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln z).$$

③背口诀.
求 z 不积 z
不积先定限
限内画条线
先交写下限
后交写上限



因此 $Z=XY$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln z), & 0<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

【注】本题亦可用分布函数法.

正概率密度区域 D 与所求概率 $F_Z(z)=P\{XY\leqslant z\}$ 的积分区域的公共部分有三种不同的组合形式（见图 5-1），于是：

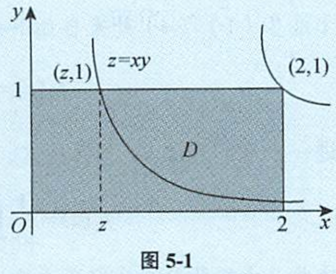


图 5-1

当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0<z<2$ 时，

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{2}\mathrm{d}y+\int_z^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{z}{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}z(1-\ln z+\ln 2)\text{；}\end{aligned}$$

当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=1$.

因此 $Z=XY$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln z), & 0<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 5.5 设随机变量 X，Y 相互独立，且 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{ay}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（1）求 a 的值；

（2）若 $Z=2X+aY$，求 Z 的概率密度.

【解】（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)\mathrm{d}y=1$，故 $a\neq 0$，且

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{ay}\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ay}\Big|_0^{+\infty}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ay}-\frac{1}{a}\right)=1,$$

若成立，必有 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ay}=0$，故解得 $a=-1$.

（2）由（1）知，$Z=2X-Y$，且 X，Y 独立，故

$$f_Z(z)\xlongequal{(*)}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(2x-z)\mathrm{d}x,$$

积分区域为 $\begin{cases}0<x<1,\\ 2x-z>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<x<1,\\ 2x>z,\end{cases}$ 如图 5-2 所示. 于是

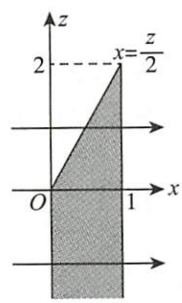


图 5-2

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^1\mathrm{e}^{-(2x-z)}\mathrm{d}x, & z<0,\\ \int_{\frac{z}{2}}^1\mathrm{e}^{-(2x-z)}\mathrm{d}x, & 0\leqslant z<2,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2})\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{z-2}), & 0\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

【注】(1)(*)处来自如下公式．设 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $Z=aX+bY(ab\neq 0)$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{z-by}{a},y\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,\frac{z-ax}{b}\right)\mathrm{d}x\ .$$

进一步地，若 X，Y 相互独立，且 $X\sim f_X(x)$，$Y\sim f_Y(y)$，则

$$f_Z(z)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X\left(\frac{z-by}{a}\right)f_Y(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y\left(\frac{z-ax}{b}\right)\mathrm{d}x\ .$$

这些公式依然符合我们所讲的“口诀”：“积谁不换谁，换完求偏导”．

微信公众号：djky66

如 $f_Z(z)=\dfrac{1}{|a|}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{z-by}{a},y\right)\mathrm{d}y$ 中．

（顶尖考研祝您上岸）

先用第一句：“积谁不换谁”．对 y 积分，则不换 y，写成 $f(\square,y)$，换 $x=\dfrac{z-by}{a}$，为 $f\left(\dfrac{z-by}{a},y\right)$．

再用第二句：“换完求偏导”．$\dfrac{\partial\left(\dfrac{z-by}{a}\right)}{\partial z}=\dfrac{1}{a}$，因概率密度非负，要加绝对值，即为 $\dfrac{1}{|a|}$．这样便记住了公式．

(2) 考生亦可用分布函数法求 Z 的概率密度，一是检查答案的正确性，二是比较两种方法的繁简．

利用分布函数法．

由题意可知，X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<1,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由 $Z=2X-Y$ 的分布函数 $F_Z(z)=\displaystyle\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可知，

当 $z<0$ 时，
$$F_Z(z)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2x-z}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2})\mathrm{e}^{z}\ ;$$

当 $0\leqslant z<2$ 时，
$$F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y+\int_{\frac{z}{2}}^1\mathrm{d}x\int_{2x-z}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{z}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z-2}\ ;$$

当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=1$．

故 $Z=2X-Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2})\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{z-2}), & 0\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 5.6 设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，θ 为正常数，X_1，X_2，X_3 是取自 X 的一个样本，求 $Y=\max\{X_1,X_2,X_3\}$，$Z=\min\{X_1,X_2,X_3\}$ 的分布函数和概率密度.

【解】设 $F(x)$ 为 X 的分布函数，$f(x)$ 为 X 的概率密度，则

$$F(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant\theta,\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

由 $Y=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$，$Z=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$，则 Y 的分布函数与概率密度分别为

$$F_Y(y)=[F(y)]^3=\begin{cases}1, & y\geqslant\theta,\\ \left(\dfrac{y}{\theta}\right)^3, & 0\leqslant y<\theta,\\ 0, & y<0,\end{cases}\quad f_Y(y;\theta)=3[F(y)]^2\cdot f(y)=\begin{cases}3\left(\dfrac{y}{\theta}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\theta}, & 0\leqslant y<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

Z 的分布函数与概率密度分别为

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

$$F_Z(z)=1-[1-F(z)]^3=\begin{cases}1, & z\geqslant\theta,\\ 1-\left(1-\dfrac{z}{\theta}\right)^3, & 0\leqslant z<\theta,\\ 0, & z<0,\end{cases}$$

$$f_Z(z;\theta)=3[1-F(z)]^2f(z)=\begin{cases}3\left(1-\dfrac{z}{\theta}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\theta}, & 0\leqslant z<\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（3）（离散型，连续型）→连续型.

设 $X\sim p_i$，$Y\sim f_Y(y)$，$Z=g(X,Y)$（常考 $X\pm Y$，XY 等），则

① X，Y 独立时，可用分布函数法及全概率公式求 $F_Z(z)$.

② X，Y 不独立时，用分布函数法.

例 5.7 设随机变量 X_1，X_2，X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

（1）求二维随机变量 (X_1,Y) 的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\varPhi(x)$ 表示；

（2）证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

（1）【解】记 (X_1,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，则对任意实数 x 和 y，都有

$=P\{X_1\leqslant x,X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y,\ \Omega\}$
$=P\{X_1\leqslant x,X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y,(X_3=0\cup X_3=1)\}$

$$\begin{aligned}F(x,y)&=P\{X_1\leqslant x,Y\leqslant y\}\\&=P\{X_1\leqslant x,X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\}\\&=P\{X_3=0\}P\{X_1\leqslant x,X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\mid X_3=0\}+\\&\quad P\{X_3=1\}P\{X_1\leqslant x,X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\mid X_3=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_2\leqslant y\mid X_3=0\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_1\leqslant y\mid X_3=1\}\\&\qquad\qquad 独立性\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 独立性\\&=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_2\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_1\leqslant y\}\\&=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_2\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant\min\{x,y\}\}\end{aligned}$$

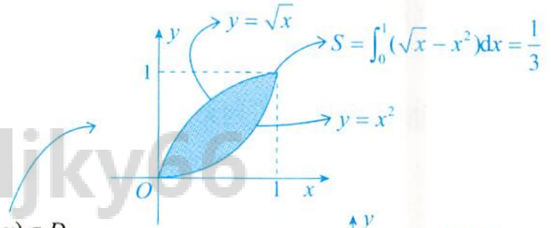
$$=\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(\min\{x,y\})\ .$$

（2）【证】由（1）知，Y 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(\min\{x,y\})\right]\\&=\frac{1}{2}\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y)=\Phi(y)\ ,\end{aligned}$$

所以 Y 服从标准正态分布.

例 5.8 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$



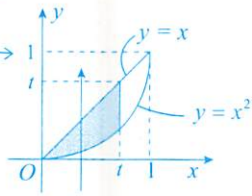
（1）写出 (X,Y) 的概率密度；

（2）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（3）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F_Z(z)$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

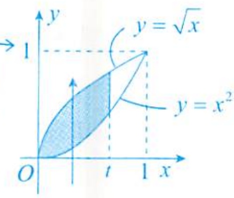
【解】（1）(X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他.\end{cases}$



（2）对于 $0<t<1$ ，$P\{U\leqslant 0,X\leqslant t\}=P\{X>Y,X\leqslant t\}=\int_0^t\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\mathrm{d}y=\frac{3}{2}t^2-t^3$ ，

$$P\{U\leqslant 0\}=P\{X>Y\}=\frac{1}{2}\ ,\quad P\{X\leqslant t\}=\int_0^t\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3\mathrm{d}y=2t^{\frac{3}{2}}-t^3\ .$$

由于 $P\{U\leqslant 0,X\leqslant t\}\neq P\{U\leqslant 0\}P\{X\leqslant t\}$ ，因此 U 与 X 不相互独立.



U,X 不独立，故以下不用全概率公式，而用等价事件

（3）①当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$ ；

②当 $0\leqslant z<1$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{U+X\leqslant z\}$

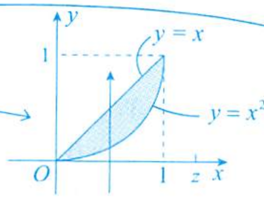
$$=P\{U=0,X\leqslant z\}=P\{X>Y,X\leqslant z\}=\frac{3}{2}z^2-z^3\ ;$$

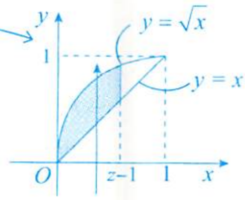
U 的取值范围是 $\{0,1\}$，$X\in(0,1)\Rightarrow Z=U+X\in(0,2)$ ，

故当 $0\leqslant z<1$ 时，$\{U+X\leqslant z\}$ 等价于 $\{U=0,X\leqslant z\}$.

③当 $1\leqslant z<2$ 时，$F_Z(z)=P\{U+X\leqslant z\}=P\{U=0,X\leqslant z\}+P\{U=1,X\leqslant z-1\}$

$$\begin{aligned}&=P\{X>Y,X\leqslant z\}+P\{X\leqslant Y,X\leqslant z-1\}\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\mathrm{d}y+\int_0^{z-1}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}3\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2\ ;\end{aligned}$$





④当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=P\{U+X\leqslant z\}=1$.

所以
$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1,\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}$$

二 一维→多维

（1）离散型→（离散型，离散型）.

$$X \sim p_i\text{，}\begin{cases}U = g(X),\\ V = h(X)\end{cases} \Rightarrow (U,V) \sim q_{ij}\text{ .}$$

（离散型，离散型）往往人为制造，如伯努利计数变量

（2）连续型→（离散型，离散型）.

$$X \sim f(x)\text{，}\begin{cases}U = g(X),\\ V = h(X)\end{cases} \Rightarrow (U,V) \sim p_{ij}\text{ .}$$

三 多维→多维

（1）（离散型，离散型）→（离散型，离散型）.

$$(X,Y) \sim p_{ij}\text{，}\begin{cases}U = g(X,Y),\\ V = h(X,Y)\end{cases} \Rightarrow (U,V) \sim q_{ij}\text{ .}$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（2）（连续型，连续型）→（离散型，离散型）.

$$(X,Y) \sim f(x,y)\text{，}\begin{cases}U = g(X,Y),\\ V = h(X,Y)\end{cases} \Rightarrow (U,V) \sim p_{ij}\text{ .}$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（3）（离散型，连续型）→（离散型，离散型）.

$$X \sim p_i\text{，}\ Y \sim f_Y(y)\text{，}\begin{cases}U = g(X,Y),\\ V = h(X,Y)\end{cases} \Rightarrow (U,V) \sim q_{ij}\text{ .}$$

例 5.9 已知随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$，$Y$ 服从参数为 1 的指数分布，记

$$Y \sim f_Y(y) = \begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y \geqslant 0,\\ 0, & y < 0,\end{cases}$$

$$U = \begin{cases}0, & X < Y,\\ 1, & X \geqslant Y,\end{cases} V = \begin{cases}0, & X < 2Y,\\ 1, & X \geqslant 2Y,\end{cases}$$

$$Y \sim F_Y(y) = \begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y}, & y \geqslant 0,\\ 0, & y < 0.\end{cases}$$

求 (U,V) 的分布律.

【解】(U,V) 是离散型随机变量，X 是离散型的，Y 是连续型的，X 与 Y 相互独立，故由全概率公式得 U，V 的分布，

$$\begin{aligned}P\{U=0\} &= P\{X<Y\} = P\{X<Y, X=0\} + P\{X<Y, X=1\}\\ &= P\{Y>0, X=0\} + P\{Y>1, X=1\}\\ &= P\{X=0\}\underbrace{P\{Y>0\}}_{=1} + P\{X=1\}P\{Y>1\}\\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-1},\end{aligned}$$

$$P\{U=1\} = 1 - P\{U=0\} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-1},$$

$$\begin{aligned}P\{V=0\} &= P\{X<2Y\} = P\{X<2Y, X=0\} + P\{X<2Y, X=1\}\\ &= P\{Y>0, X=0\} + P\left\{Y>\frac{1}{2}, X=1\right\}\\ &= P\{X=0\}\underbrace{P\{Y>0\}}_{=1} + P\{X=1\}P\left\{Y>\frac{1}{2}\right\}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}e^{-y}dy=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}},$$

$$P\{V=1\}=1-P\{V=0\}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}}.$$

又 $P\{U=0,V=1\}=P\{X<Y,X\geqslant 2Y\}=0$，所以 (U,V) 的分布律为

$V \backslash U$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{-1}$	$\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}e^{-1}$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}}$
1	0	$\frac{3}{4}-\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{4}-\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{-1}$	$\frac{3}{4}-\frac{3}{4}e^{-1}$	1

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

第6讲 数字特征

知识结构

- 数学期望
  - X
    - $X \sim p_i \Rightarrow EX = \sum_i x_i p_i$
      - 有限项相加
      - 无穷项相加(无穷级数)
    - $X \sim f(x) \Rightarrow EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$
      - 有限区间积分(定积分)
      - 无穷区间积分(反常积分)
  - $g(X)$
    - $X \sim p_i, Y = g(X) \Rightarrow EY = \sum_i g(x_i) p_i$
    - $X \sim f(x), Y = g(X) \Rightarrow EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x$
  - $g(X,Y)$
    - $(X,Y) \sim p_{ij}, Z = g(X,Y) \Rightarrow EZ = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$
    - $(X,Y) \sim f(x,y), Z = g(X,Y) \Rightarrow EZ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
  - 最值
    - $Y = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) \mathrm{d}y$，其中 $f_Y(y) = n[1 - F(y)]^{n-1} f(y)$
    - $Z = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，$EZ = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z) \mathrm{d}z$，其中 $f_Z(z) = n[F(z)]^{n-1} f(z)$
  - 分解 — $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n$
  - 性质
    - ① $Ea = a$，$E(EX) = EX$
    - ② $E(aX + bY) = aEX + bEY$，$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i EX_i$
    - ③若 X，Y 相互独立，则 $E(XY) = EXEY$
- 方差
  - X
    - 定义 — $DX = E[(X - EX)^2]$
    - 定义法
      - $X \sim p_i \Rightarrow DX = E[(X - EX)^2] = \sum_i (x_i - EX)^2 p_i$
      - $X \sim f(x) \Rightarrow DX = E[(X - EX)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x) \mathrm{d}x$
    - 公式法 — $DX = E(X^2) - (EX)^2$
  - 最值
    - $Y = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) \mathrm{d}y \Rightarrow DY = E(Y^2) - (EY)^2$
    - $Z = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_Z(z) \mathrm{d}z \Rightarrow DZ = E(Z^2) - (EZ)^2$
  - 分解 — $D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \cdots + DX_n + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \overset{\text{独立}}{=\!=} DX_1 + DX_2 + \cdots + DX_n$
  - 性质
    - ① $DX \geqslant 0$，$E(X^2) = DX + (EX)^2 \geqslant (EX)^2$
    - ② $Dc = 0$（c 为常数）
    - ③ $DX = 0 \Leftrightarrow X$ 几乎处处为某个常数 a，即 $P\{X = a\} = 1$
    - ④ $D(aX + b) = a^2 DX$
    - ⑤ $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$
    - ⑥ $D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 DX_i + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
    - ⑦ $D(aX + bY) \overset{\text{独立}}{=\!=} a^2 DX + b^2 DY$
    - ⑧ $D(XY) \overset{\text{独立}}{=\!=} DXDY + DX(EY)^2 + DY(EX)^2 \geqslant DXDY$
    - ⑨对任意常数 c，有 $DX = E[(X - EX)^2] \leqslant E[(X - c)^2]$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

- 常用分布的 EX，DX
  - ① 0—1 分布，$EX=p$，$DX=p-p^2=(1-p)p$
  - ② $X\sim B(n,p)$，$EX=np$，$DX=np(1-p)$
  - ③ $X\sim P(\lambda)$，$EX=\lambda$，$DX=\lambda$
  - ④ $X\sim G(p)$，$EX=\dfrac{1}{p}$，$DX=\dfrac{1-p}{p^2}$
  - ⑤ $X\sim U(a,b)$，$EX=\dfrac{a+b}{2}$，$DX=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
  - ⑥ $X\sim E(\lambda)$，$EX=\dfrac{1}{\lambda}$，$DX=\dfrac{1}{\lambda^2}$
  - ⑦ $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$EX=\mu$，$DX=\sigma^2$
  - ⑧ $X\sim \chi^2(n)$，$EX=n$，$DX=2n$
- 协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 与相关系数 ρ_{XY}
  - $\mathrm{Cov}(X,Y)$
    - 定义 — $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$
    - 定义法
      - $(X,Y)\sim p_{ij}\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=\sum\limits_i\sum\limits_j(x_i-EX)(y_j-EY)p_{ij}$
      - $(X,Y)\sim f(x,y)\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)(y-EY)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
    - 公式法 — $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

  - ρ_{XY} 定义 — $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}\begin{cases}=0\Leftrightarrow X,Y\text{不相关}\\ \neq 0\Leftrightarrow X,Y\text{相关}\end{cases}$
  - 性质
    - ① $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$
    - ② $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$
    - ③ $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$
    - ④ $|\rho_{XY}|\leqslant 1$
    - ⑤ $\rho_{XY}=1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1(a>0)$
    - ⑥ $\rho_{XY}=-1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1(a<0)$
    - ⑦ $\rho_{XY}=0\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0\Leftrightarrow E(XY)=EXEY$
      $\Leftrightarrow D(X+Y)=DX+DY\Leftrightarrow D(X-Y)=DX+DY$
    - ⑧ X，Y 独立 $\Rightarrow \rho_{XY}=0$
    - ⑨若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho_{XY})$，则 X，Y 独立 $\Leftrightarrow X$，Y 不相关 $(\rho_{XY}=0)$
- 独立性与不相关性的判定
  - 用分布判独立
    - ①若 (X,Y) 是连续型的，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$
    - ②若 (X,Y) 是离散型的，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$
  - 用数字特征判不相关 — $\rho_{XY}=0\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0$
    $\Leftrightarrow E(XY)=EXEY\Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY$
  - 步骤 — 先计算 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，而后按下列步骤进行判断或再计算：
    $$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY\begin{cases}\neq 0\Leftrightarrow X\text{ 与 }Y\text{ 相关}\Rightarrow X\text{ 与 }Y\text{ 不独立}\\ =0\Leftrightarrow X\text{ 与 }Y\text{ 不相关，通过分布推断}\begin{cases}X,\ Y\text{ 独立}\\ X,\ Y\text{ 不独立}\end{cases}\end{cases}$$
  - 重要结论
    - ①如果 X 与 Y 独立，则 X 与 Y 不相关，反之不然
    - ②如果 X 与 Y 相关，则 X，Y 不独立
    - ③如果 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X，Y 独立 $\Leftrightarrow X$，Y 不相关
    - ④如果 X 与 Y 均服从 0—1 分布，则 X，Y 独立 $\Leftrightarrow X$，Y 不相关
- 切比雪夫不等式
  - $P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$
  - $P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant 1-\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$

一 数学期望

数学期望就是随机变量的取值与取值概率乘积的和 .

1. X

① $X \sim p_i \Rightarrow EX = \sum\limits_i x_i p_i \begin{cases} \text{有限项相加,} \\ \text{无穷项相加(无穷级数).} \end{cases}$

② $X \sim f(x) \Rightarrow EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x \begin{cases} \text{有限区间积分(定积分),} \\ \text{无穷区间积分(反常积分).} \end{cases}$

2. $g(X)$

g 为连续函数（或分段连续函数）.

① $X \sim p_i$， $Y = g(X) \Rightarrow EY = \sum\limits_i g(x_i) p_i$.

微信公众号：djky66（顶尖考研祝您上岸）

② $X \sim f(x)$， $Y = g(X) \Rightarrow EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\mathrm{d}x$.

3. $g(X,Y)$

① $(X,Y) \sim p_{ij}$， $Z = g(X,Y) \Rightarrow EZ = \sum\limits_i \sum\limits_j g(x_i, y_j) p_{ij}$.

② $(X,Y) \sim f(x,y)$， $Z = g(X,Y) \Rightarrow EZ = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4. 最值

若 $X_i (i = 1,2,\cdots,n;\ n \geqslant 2)$ 独立同分布，其分布函数为 $F(x)$，概率密度为 $f(x)$，记 $Y = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，$Z = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，则

$F_Y(y) = 1 - [1 - F(y)]^n$， $f_Y(y) = n[1 - F(y)]^{n-1} f(y) \Rightarrow EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y$;

$F_Z(z) = [F(z)]^n$， $f_Z(z) = n[F(z)]^{n-1} f(z) \Rightarrow EZ = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z)\mathrm{d}z$.

5. 分解

若 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，则 $EX = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n$.

6. 性质

① $Ea = a$， $E(EX) = EX$.

无条件打开

② $E(aX + bY) = aEX + bEY$， $E\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^n a_i EX_i$.

③若 X，Y 相互独立，则 $E(XY) = EXEY$.

二 方差

1. X

①定义 .

$DX=E[(X-EX)^2]$，X 的方差就是 $Y=(X-EX)^2$ 的数学期望．

②定义法．

$$\begin{cases} X\sim p_i \Rightarrow DX=E[(X-EX)^2]=\sum\limits_i (x_i-EX)^2 p_i, \\ X\sim f(x)\Rightarrow DX=E[(X-EX)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2 f(x)\mathrm{d}x. \end{cases}$$

③公式法．

$DX=E(X^2)-(EX)^2$．

2. 最值

接“一、数学期望”的“4. 最值”，有

$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\mathrm{d}y \Rightarrow DY=E(Y^2)-(EY)^2$；

$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_Z(z)\mathrm{d}z \Rightarrow DZ=E(Z^2)-(EZ)^2$．

微信公众号：djky66

3. 分解

若 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$，则 $DX=DX_1+DX_2+\cdots+DX_n+2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$．

（顶尖考研祝您上岸）

当 X_1，X_2，…，X_n 相互独立时，有 $DX=DX_1+DX_2+\cdots+DX_n$．

4. 性质

① $DX\geqslant 0$，$E(X^2)=DX+(EX)^2\geqslant (EX)^2$．

② $Dc=0$（c 为常数）．

$DX=0 \Leftrightarrow X$ 几乎处处为某个常数 a，即 $P\{X=a\}=1$．

③ $D(aX+b)=a^2DX$．

④ $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$，$D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2DX_i+2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$．

⑤如果 X 与 Y 相互独立，则

$$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY,$$
$$D(XY)=DXDY+DX(EY)^2+DY(EX)^2\geqslant DXDY.$$

【注】**证** 因 X，Y 相互独立，故 X^2，Y^2 也相互独立，即有

$$E(XY)=EXEY,$$
$$E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2),$$
$$\begin{aligned} D(XY)&=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2=E(X^2)E(Y^2)-(EX)^2(EY)^2 \\ &=[DX+(EX)^2][DY+(EY)^2]-(EX)^2(EY)^2 \\ &=DXDY+(EX)^2DY+(EY)^2DX. \end{aligned}$$

又 $(EX)^2DY+(EY)^2DX\geqslant 0$，所以 $D(XY)\geqslant DXDY$．

一般地，如果 X_1，X_2，…，X_n 相互独立，$g_i(x)$ 为 x 的连续函数，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 DX_i ,$$

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} D[g_i(X_i)] .$$

⑥对任意常数 c，有 $DX = E[(X-EX)^2] \leqslant E[(X-c)^2]$.

【注】证
$$\begin{aligned} E[(X-c)^2] &= E(X^2 - 2cX + c^2) \\ &= E(X^2) - 2cEX + c^2 \\ &\xlongequal{令} g(c). \end{aligned}$$

由
$$g'(c) = -2EX + 2c \xlongequal{令} 0,$$

得 $c=EX$，又 $g''(c) = 2 > 0$，故 $c=EX$ 是 $g(c)$ 的最小值点.

三 常用分布的 EX，DX

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

考生应记住如下常用分布的 EX，DX.

① 0—1 分布，$EX = p$，$DX = p - p^2 = (1-p)p$.

② $X \sim B(n,p)$，$EX = np$，$DX = np(1-p)$.

③ $X \sim P(\lambda)$，$EX = \lambda$，$DX = \lambda$.

④ $X \sim G(p)$，$EX = \dfrac{1}{p}$，$DX = \dfrac{1-p}{p^2}$.

⑤ $X \sim U(a,b)$，$EX = \dfrac{a+b}{2}$，$DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

⑥ $X \sim E(\lambda)$，$EX = \dfrac{1}{\lambda}$，$DX = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

⑦ $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$EX = \mu$，$DX = \sigma^2$.

⑧ $X \sim \chi^2(n)$，$EX = n$，$DX = 2n$.

四 协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 与相关系数 ρ_{XY}

（1）$\mathrm{Cov}(X,Y)$.

①定义.

X,Y 偏差（波动）程度

$\mathrm{Cov}(X,Y) \xlongequal{\triangle} E[(X-EX)(Y-EY)]$.

【注】$\mathrm{Cov}(X,X) = E[(X-EX)(X-EX)]$
$= E[(X-EX)^2] = DX$.

②定义法 .

$$\begin{cases}(X,Y)\sim p_{ij}\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=\sum\limits_{i}\sum\limits_{j}(x_i-EX)(y_j-EY)p_{ij},\\ (X,Y)\sim f(x,y)\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)(y-EY)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{cases}$$

③公式法 .

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY$.

（2）ρ_{XY} 定义 .（相关系数，表示线性相依程度）

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}\begin{cases}=0\Leftrightarrow X,Y\text{不相关},\\ \neq 0\Leftrightarrow X,Y\text{相关}.\end{cases}$$

（量纲为 1，无单位）

$-1\leqslant\rho\leqslant 1$

$-1 \longleftarrow 0 \longrightarrow 1$

强 ← 弱 → 强

在 $\rho=0$ 时，线性相依程度为 0，往两边走，线性相依程度增强，在 $\rho=1$，$\rho=-1$ 时线性相依程度最强. 见下面 (3) 的⑤.

（3）性质 .

① $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$.

② $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$.

③ $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.

④ $|\rho_{XY}|\leqslant 1$.

⑤ $\rho_{XY}=1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1(a>0)$.

$\rho_{XY}=-1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1(a<0)$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

【注】$Y=aX+b$，$a>0\Rightarrow\rho_{XY}=1$.

$Y=aX+b$，$a<0\Rightarrow\rho_{XY}=-1$.

⑥五个充要条件 .

$\rho_{XY}=0\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0\Leftrightarrow E(XY)=EXEY$

$\Leftrightarrow D(X+Y)=DX+DY\Leftrightarrow D(X-Y)=DX+DY$.

⑦ X，Y 独立 $\Rightarrow\rho_{XY}=0$.

⑧若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho_{XY})$，则 X，Y 独立 $\Leftrightarrow X$，Y 不相关 $(\rho_{XY}=0)$.

例 6.1 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k},k=1,2,3,\cdots$. Y 表示 X 被 3 除的余数，则 Y 的方差为________.

【解】应填 $\frac{20}{49}$.

由例 3.1 可知，Y 的概率分布为 $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7}\end{pmatrix}$，所以

$$EY=0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}=\frac{8}{7},$$

$$E(Y^2)=0\times\frac{1}{7}+1^2\times\frac{4}{7}+2^2\times\frac{2}{7}=\frac{12}{7},$$

$$DY=E(Y^2)-(EY)^2=\frac{12}{7}-\left(\frac{8}{7}\right)^2=\frac{20}{49}.$$

例 6.2 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 对 X 进行独立重复观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数 .

（1）求 Y 的概率分布；

（2）求 EY.

【解】（1）记 p 为"观测值大于 3"的概率，则 $p=P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}$.

依题意知 Y 为离散型随机变量，而且取值为 2，3，…，则 Y 的概率分布为

$$P\{Y=k\}=\mathrm{C}_{k-1}^1p(1-p)^{k-2}\cdot p=\mathrm{C}_{k-1}^1p^2(1-p)^{k-2}=(k-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\text{，}\ k=2\text{，}3\text{，}\cdots.$$

（2）
$$EY=\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot(k-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}=\frac{1}{64}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}$$

$$=\frac{1}{64}\sum_{k=2}^{\infty}(x^k)''\bigg|_{x=\frac{7}{8}}=\frac{1}{64}\left(\sum_{k=2}^{\infty}x^k\right)''\bigg|_{x=\frac{7}{8}}=\frac{1}{64}\cdot\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''\bigg|_{x=\frac{7}{8}}$$

$$=\frac{1}{64}\cdot\frac{2}{(1-x)^3}\bigg|_{x=\frac{7}{8}}=16\ .$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 6.3 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品，从甲箱中任取 3 件放入乙箱后，乙箱中次品数 X 的数学期望为________.

读懂题：即甲中 3 合 3 次，任取 3 件，次品数 X 的 EX

【解】应填 $\frac{3}{2}$.

将抽取过程分解，设第 i 次取出的次品数为 $X_i(i=1,2,3)$，且 $X=\sum_{i=1}^{3}X_i$，则

$$X_i=\begin{cases}0,\text{从甲箱取到合格品,}\\ 1,\ \text{从甲箱取到次品,}\end{cases}\text{且 }X_i\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

于是有
$$EX_i=\frac{1}{2}\text{，}\quad EX=E(X_1+X_2+X_3)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ .$$

【注】（1）在分解从甲箱中抽取产品的过程时，每次抽到次品的概率都是相同的，其原理见例 1.3（4）.

（2）先求乙箱中次品数 X 的概率分布 .

X 的可能取值为 0，1，2，3. 由

$$P\{X=k\}=\frac{\mathrm{C}_3^k\mathrm{C}_3^{3-k}}{\mathrm{C}_6^3}\text{，}\ k=0\text{，}1\text{，}2\text{，}3\text{，}$$

得
$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20}\end{pmatrix},$$

因此
$$EX=\sum_{k=0}^{3}kP\{X=k\}=\sum_{k=0}^{3}k\frac{\mathrm{C}_3^k\mathrm{C}_3^{3-k}}{\mathrm{C}_6^3}=\frac{3}{2}\ .$$

例 6.4 设 $X\sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a^2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ a 为正常数，则 DX=________.

【解】应填 $\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{\pi}\right)a^2$.

$$EX=\int_0^{+\infty}\frac{4}{a^3\sqrt{\pi}}x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\cdot 2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^{2\cdot 2-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(2)=\frac{2a}{\sqrt{\pi}},$$

$$E(X^2)=\frac{2a^2}{\sqrt{\pi}}\cdot 2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^{2\cdot\frac{5}{2}-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{2a^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=\frac{2a^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2,$$

故
$$DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{3a^2}{2}-\frac{4a^2}{\pi}=\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)a^2 .$$

微信公众号：djky66
（预尖考研祝您上岸）

【注】计算积分时，若能用上“Γ 函数”的知识，会既快速又准确.

（1）定义 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\xlongequal{x=t^2}2\int_0^{+\infty}t^{2\alpha-1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t(x,t>0)$.

（2）递推式 $\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x=\alpha\Gamma(\alpha)$，

其中 $\Gamma(1)=1$，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，故 $\Gamma(n+1)=n!,\Gamma(2)=1,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

例 6.5 设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，θ 未知 $(\theta>0)$，X_1，X_2，X_3 是取自 X 的一个样本.

（1）求 $\hat{\theta}_1=\frac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$，$\hat{\theta}_2=4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$ 的数学期望；

（2）求 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$ 的方差.

【解】（1）令 $Y=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$，$Z=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$，由例 5.6，得 Y 和 Z 的概率密度分别为

$$f_Y(y;\theta)=\begin{cases}3\left(\dfrac{y}{\theta}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\theta}, & 0\leqslant y<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_Z(z;\theta)=\begin{cases}3\left(1-\dfrac{z}{\theta}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\theta}, & 0\leqslant z<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以
$$EY=\frac{3}{\theta^3}\int_0^{\theta}y^3\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\theta,\quad E\left(\frac{4}{3}\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\theta,$$

$$EZ=\frac{3}{\theta^3}\int_0^{\theta}z(\theta-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\theta,\quad E\left(4\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\theta .$$

（2）因为
$$DY=E(Y^2)-(EY)^2=\frac{3}{\theta}\int_0^{\theta}y^2\left(\frac{y}{\theta}\right)^2\mathrm{d}y-\left(\frac{3}{4}\theta\right)^2$$

$$=\frac{3}{\theta^3}\int_0^{\theta}y^4\mathrm{d}y-\frac{9}{16}\theta^2=\frac{3}{5}\theta^2-\frac{9}{16}\theta^2=\frac{3}{80}\theta^2,$$

所以
$$D\left(\frac{4}{3}\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\frac{16}{9}DY=\frac{1}{15}\theta^2 .$$

因为
$$DZ=E(Z^2)-(EZ)^2=\frac{3}{\theta}\int_0^{\theta}z^2\left(1-\frac{z}{\theta}\right)^2\mathrm{d}z-\left(\frac{1}{4}\theta\right)^2$$
$$=\frac{3}{\theta^3}\int_0^{\theta}z^2(\theta-z)^2\mathrm{d}z-\frac{1}{16}\theta^2=\frac{1}{10}\theta^2-\frac{1}{16}\theta^2=\frac{3}{80}\theta^2,$$
所以
$$D\left(4\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=16DZ=16\cdot\frac{3}{80}\theta^2=\frac{3}{5}\theta^2.$$

例 6.6 设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，当 X 取到 $x(0<x<1)$ 时，随机变量 Y 等可能地在 $(x,1)$ 上取值，则 $E(|X-Y|)$ =________.

【解】应填 $\frac{1}{4}$.

$X\sim f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 随机变量 Y 在 $X=x$ 的条件下，在 $(x,1)$ 上服从均匀分布，所以 Y 的条件概率密度为
$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

故
$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$
因此有
$$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{x<y}(y-x)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\frac{y-x}{1-x}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1-x}\int_x^1(y-x)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\frac{1-x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

例 6.7 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(1,4)$，则 $D(XY)$ =（　　）.

（A）6　　（B）8　　（C）14　　（D）15

【解】应选（C）.
$$D(XY)=DXDY+DX(EY)^2+DY(EX)^2=14.$$

例 6.8 设 n 个信封内分别装有发给 n 个人的通知，但信封上各收信人的地址是随机填写的．以 X 表示收到自己通知的人数，求 X 的数学期望和方差．

【解】①记 A_k ={ 第 k 封信的地址与内容一致 } $(k=1,2,\cdots,n)$．第 k 个人的通知随意装入 n 个信封中的一个信封，恰好装进写有其地址的信封的概率等于 $\frac{1}{n}$，故 $P(A_k)=\frac{1}{n}$.

引进随机变量
$$U_k=\begin{cases}1, & A_k 发生,\\ 0, & A_k 不发生,\end{cases}$$
则 $X=U_1+U_2+\cdots+U_n$，其中 $U_k\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$，从而，有
$$EU_k=\frac{1}{n},$$

故
$$EX=E(U_1+U_2+\cdots+U_n)=EU_1+EU_2+\cdots+EU_n=n\cdot\frac{1}{n}=1 .$$

②由 $P(A_k)=\frac{1}{n}$，则 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j|A_i)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}$. 故

$$DX=D(U_1+U_2+\cdots+U_n)=DU_1+DU_2+\cdots+DU_n+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(U_i,U_j) .$$

易知 $DU_k=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$. 又对于任意 $i\neq j$，U_iU_j 只有 0 和 1 两个可能值，且

$$P\{U_iU_j=1\}=P(U_i=1,U_j=1)=P(A_iA_j)=\frac{1}{n(n-1)} ,$$

从而 $U_iU_j\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-\frac{1}{n(n-1)} & \frac{1}{n(n-1)}\end{pmatrix}$. 故对于任意 $i\neq j$，有

$$\mathrm{Cov}(U_i,U_j)=E(U_iU_j)-EU_iEU_j=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2} .$$

于是 $DX=n\cdot\left[\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]+2\cdot\mathrm{C}_n^2\cdot\left[\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}\right]=1$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

【注】该题的解法具有典型性：求解时并没有直接利用 X 的概率分布，仅利用数学期望和方差的性质．当然，也可以先求 X 的概率分布，然后根据定义求数学期望和方差．然而，求概率分布需要相当复杂的计算过程，并且由此概率分布求数学期望和方差也并非易事．

例 6.9 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$. 将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（　　）.

（A）$-\frac{1}{2}$　　（B）$-\frac{1}{3}$　　（C）$\frac{1}{3}$　　（D）$\frac{1}{2}$

【解】应选（A）.

由例 2.3 知
$$X\sim B\left(2,\frac{1}{3}\right),Y\sim B\left(2,\frac{1}{3}\right),X+Y\sim B\left(2,\frac{2}{3}\right) .$$

从而 $DX=DY=\frac{4}{9}$，以及 $D(X+Y)=\frac{4}{9}$. 再由

$$D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{Cov}(X,Y),$$

可得 $\mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{2}{9}$，所以 X 与 Y 的相关系数为

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=-\frac{1}{2} .$$

【注】由 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$，得 $X\sim B\left(2,\frac{1}{3}\right)$，$Y\sim B\left(2,\frac{1}{3}\right)$ .X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$. 显然

$$EX = EY = \frac{2}{3}，DX = DY = 2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{9}，$$

易知 $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY$，为求 $E(XY)$，先求出 XY 的分布．

X 和 Y 的可能取值均为 0，1，2，且由题意可知 $X+Y \leqslant 2$，所以 XY 的可能取值应为 0，1.

$$P\{XY=1\} = P\{X=1，Y=1\} = 2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{9}，P\{XY=0\} = 1-\frac{2}{9} = \frac{7}{9}．$$

故 XY 的分布为

XY	0	1
P	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$

，$E(XY) = \frac{2}{9}$，故

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY = \frac{2}{9} - \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = -\frac{2}{9}, \rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

五 独立性与不相关性的判定

（1）用分布判独立．

否定方法：$\exists x_0, y_0$，使 $F(x_0, y_0) \neq F_X(x_0) \cdot F_Y(y_0) \Leftrightarrow X, Y$ 不独立．

随机变量 X 与 Y 相互独立，指对任意实数 x，y，事件 $\{X \leqslant x\}$ 与 $\{Y \leqslant y\}$ 相互独立，即 X 和 Y 的联合分布等于边缘分布相乘：$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$．

①若 (X,Y) 是连续型的，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$；

②若 (X,Y) 是离散型的，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}．$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（2）用数字特征判不相关．

随机变量 X 与 Y 不相关，意指 X 与 Y 之间不存在线性相依性，即 $\rho_{XY} = 0$，其充要条件是

$$\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = EXEY \Leftrightarrow D(X \pm Y) = DX + DY．$$

（3）步骤．

先计算 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，而后按下列步骤进行判断或再计算：

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY\begin{cases}\neq 0 \Leftrightarrow X\text{与}Y\text{相关} \Rightarrow X\text{与}Y\text{不独立}.\\ = 0 \Leftrightarrow X\text{与}Y\text{不相关，通过分布推断}\begin{cases}X，Y\text{独立}，\\ X，Y\text{不独立}.\end{cases}\end{cases}$$

（4）重要结论．

① 如果 X 与 Y 独立，则 X，Y 不相关，反之不然．

② 由“①”知，如果 X 与 Y 相关，则 X，Y 不独立．

③ 如果 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X，Y 独立 $\Leftrightarrow X$，Y 不相关．

④ 如果 X 与 Y 均服从 0—1 分布，则 X，Y 独立 $\Leftrightarrow X$，Y 不相关．

【注】（1）上述讨论均假设方差存在并且不为零．

（2）结论④的证明．

证
$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p_1 & p_1\end{pmatrix},\quad Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p_2 & p_2\end{pmatrix},$$
只需证“$\rho_{XY}=0\Rightarrow X$ 与 Y 独立”.

$EX=p_1$，$EY=p_2$，由于 $\rho_{XY}=0$，因此
$$E(XY)=EXEY=p_1p_2,$$
即 $XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p_1p_2 & p_1p_2\end{pmatrix}$，可得 (X,Y) 的分布律为

X \\ Y	0	1	
0	$(1-p_1)(1-p_2)$	$p_2(1-p_1)$	$1-p_1$
1	$p_1(1-p_2)$	p_1p_2	p_1
	$1-p_2$	p_2	

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

所以
$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\},$$
$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=0\},$$
$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=1\},$$
$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\},$$
结论得证.

（3）若 X 与 Y 均服从一般的两点分布，即 $X\sim\begin{pmatrix}a & b\\ p_1 & 1-p_1\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}a & b\\ p_2 & 1-p_2\end{pmatrix}$，可令 $\xi=\dfrac{X-a}{b-a}$，$\eta=\dfrac{Y-a}{b-a}$，此时 ξ 与 η 均服从 0—1 分布，根据上述结论④，知 ξ 与 η 独立 $\Leftrightarrow$ ξ 与 η 不相关.

而 $\dfrac{X-a}{b-a}$ 与 $\dfrac{Y-a}{b-a}$ 独立 $\Leftrightarrow X$ 与 Y 独立，且
$$\mathrm{Cov}\left(\frac{X-a}{b-a},\frac{Y-a}{b-a}\right)=\frac{1}{(b-a)^2}\mathrm{Cov}(X-a,Y-a)=\frac{1}{(b-a)^2}\mathrm{Cov}(X,Y),$$
这表明 $\dfrac{X-a}{b-a}$ 与 $\dfrac{Y-a}{b-a}$ 不相关 $\Leftrightarrow X$ 与 Y 不相关.

综上，X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow X$ 与 Y 不相关.

例 6.10 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$，令 $Z=XY$.

（1）求 Z 的概率密度;

（2）p 为何值，X 与 Z 不相关?

（3）X 与 Z 是否相互独立?

【解】（1）Z 的分布函数为
$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}\\&=P\{Y=-1\}P\{XY\leqslant z\mid Y=-1\}+P\{Y=1\}P\{XY\leqslant z\mid Y=1\}\\&=pP\{-X\leqslant z\}+(1-p)P\{X\leqslant z\}.\end{aligned}$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=pP\{X\geqslant -z\}+(1-p)\cdot 0=p\mathrm{e}^z$ ；

当 $z\geqslant 0$ 时，$F_Z(z)=p\cdot 1+(1-p)P\{X\leqslant z\}=1-(1-p)\mathrm{e}^{-z}$.

所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} p\mathrm{e}^z, & z<0, \\ (1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 0. \end{cases}$$

（2）

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Z)&=E(XZ)-EXEZ=E(X^2Y)-EX\cdot E(XY)\\ &=E(X^2)\cdot EY-(EX)^2\cdot EY=DX\cdot EY\\ &=1-2p,\end{aligned}$$

令 $\mathrm{Cov}(X,Z)=0$，解得 $p=\dfrac{1}{2}$. 所以当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，X 与 Z 不相关.

（3）因为

$X\geqslant 1$

$\Uparrow$

$Y=-1$ 时，$X\leqslant 1$ 且 $X(-1)\leqslant -1\Rightarrow X=1\Rightarrow P=0$ ；

$Y=1$ 时，$X\leqslant 1$ 且 $X\leqslant -1\Rightarrow X\leqslant -1\Rightarrow P=0$.

$$P\{X\leqslant 1,Z\leqslant -1\}=P\{X\leqslant 1,XY\leqslant -1\}=0,$$

$$P\{X\leqslant 1\}>0,\quad P\{Z\leqslant -1\}>0,$$

所以 $P\{X\leqslant 1,Z\leqslant -1\}\neq P\{X\leqslant 1\}P\{Z\leqslant -1\}$，故 X 与 Z 不相互独立.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

六 切比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望与方差均存在，则对任意 $\varepsilon>0$，

$$P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2} \text{ 或 } P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2} .$$

例 6.11 设随机变量 X_1，X_2，…，X_n 独立同分布，记 $E(X_i^k)=\mu_k(k=1,2,3,4)$，则由切比雪夫不等式，对任意 $\varepsilon>0$，有 $P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i^2-\mu_2\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant$（　　）.

（A）$\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$　　（B）$\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$　　（C）$\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$　　（D）$\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

【解】应选（A）.

由 $\mu_k=E(X_i^k)$，知

$$\mu_2=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)=E(X_i^2),$$

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\{E(X_i^4)-[E(X_i^2)]^2\}=\frac{1}{n}(\mu_4-\mu_2^2),$$

故

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2-\mu_2\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i^2\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2} .$$

故选（A）.

第7讲 大数定律与中心极限定理

知识结构

- 依概率收敛
  - $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\} = 0$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$
- 大数定律
  - 切比雪夫大数定律 — $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} EX_i$
  - 伯努利大数定律 — $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$
  - 辛钦大数定律 — $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$
  - 考结论 — $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)$
- 中心极限定理
  - 列维－林德伯格定理 — $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t = \Phi(x)$
  - 棣莫弗－拉普拉斯定理 — $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \Phi(x)$
  - 考结论 — $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

一 依概率收敛

设随机变量 X 与随机变量序列 $\{X_n\}(n=1,2,3,\cdots)$，如果对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\} = 0 \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1,$$

则称随机变量序列 $\{X_n\}$ **依概率收敛于随机变量** X，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X(P)$ 或 $X_n \xrightarrow{P} X(n\to\infty)$.

【注】（1）以上定义中将随机变量 X 写成数 a 也成立.

（2）设 $X_n \xrightarrow{P} X$，$Y_n \xrightarrow{P} Y$，$g(x,y)$ 是二元连续函数，则 $g(X_n,Y_n) \xrightarrow{P} g(X,Y)$.
一般地，对 m 元连续函数 $g(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，上述结论亦成立.

（3）在讨论未知参数估计量是否具有一致性（相合性）时，常常要用到依概率收敛这一性质和大数定律.

二 大数定律

1. 切比雪夫大数定律

切比雪夫大数定律要求：
①相互独立（可放宽到两两不相关）；
②方差存在且一致有上界.

假设 $\{X_n\}(n=1,2,\cdots)$ 是相互独立的随机变量序列，如果方差 $DX_i(i\geqslant 1)$ 存在且一致有上界，即存在常数 C，使 $DX_i\leqslant C$ 对一切 $i\geqslant 1$ 均成立，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i .$$

2. 伯努利大数定律

假设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，在每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则 $\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p$，即对任意 $\varepsilon>0$，有

微信公众号：djky66

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1 .$$

（顶尖考研祝您上岸）

【注】（仅数学三）在数理统计中，若 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为总体样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的一个观测值，按大小顺序排列为 $x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$. 对任意实数 x，称函数

$$F_n(x)=\frac{x_1,x_2,\cdots,x_n\text{中小于等于}x\text{的样本值个数}}{n}$$
$$=\begin{cases}0, & x<x_{(1)},\\ \dfrac{k}{n}, & x_{(k)}\leqslant x<x_{(k+1)}(k=1,2,\cdots,n-1),\\ 1, & x\geqslant x_{(n)}\end{cases}$$

为样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**经验分布函数**.

事实上，$F_n(x)$ 就是事件 $\{X\leqslant x\}$ 在 n 次试验中出现的频率，而 $P\{X\leqslant x\}=F(x)$ 是事件 $\{X\leqslant x\}$ 出现的概率，由伯努利大数定律（即频率收敛于概率）可知，当 n 充分大时，$F_n(x)$ 可作为未知分布函数 $F(x)$ 的一个近似，n 越大，近似效果越好.

3. 辛钦大数定律

辛钦大数定律要求：
①相互独立；②同分布；③期望存在.

假设 $\{X_n\}(n=1,2,\cdots)$ 是独立同分布的随机变量序列，如果数学期望 $EX_i=\mu(i=1,2,\cdots)$ 存在，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$，即对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1 .$$

4. 考结论

在满足一定条件时，大数定律都在讲同一个结论，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) .$$

三 中心极限定理

1. 列维 – 林德伯格定理

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，如果 $EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2>0(i=1,2,\cdots)$ 存在，则 $\{X_n\}$ 服从中心极限定理，即对任意的实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t=\Phi(x).$$

【注】（1）定理的三个条件“独立、同分布、期望与方差存在”，缺一不可.

（2）只要 X_n 满足定理条件，那么当 n 很大时，独立同分布随机变量的和 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从正态分布 $N(n\mu,n\sigma^2)$，由此可知，当 n 很大时，有

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

$$P\left\{a<\sum_{i=1}^{n}X_i<b\right\}\approx\Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right),$$

这常常是解题的依据.只要题目涉及独立同分布随机变量的和 $\sum_{i=1}^{n}X_i$，我们就要考虑独立同分布的中心极限定理.

2. 棣莫弗 – 拉普拉斯定理

假设随机变量 $Y_n\sim B(n,p)(0<p<1,n\geqslant 1)$，则对任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x).$$

【注】（1）如果记 $X_i\sim B(1,p)(0<p<1)$，即 $X_i\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1-p\end{pmatrix}$ 且相互独立，则

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p),$$

由列维 - 林德伯格定理推出棣莫弗 - 拉普拉斯定理.

（2）二项分布概率计算的三种方法.

设 $X\sim B(n,p)$.

①当 n 不太大时 $(n\leqslant 10)$，直接计算

$$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n;$$

②当 n 较大且 p 较小时 $(n>10,p<0.1)$，$\lambda=np$ 适中，根据泊松定理有近似公式

$$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,\cdots,n;$$

③当 n 较大而 p 不太大时 $(p<0.1,np\geqslant 10)$，根据中心极限定理，有近似公式

$$P\{a<X<b\}\approx\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

3. 考结论

设 X_i 独立同分布于某一分布，期望、方差均存在，则当 $n\to\infty$ 时，$\sum_{i=1}^{n}X_i$ 服从正态分布，即不论

$X_i\overset{iid}{\sim}F(\mu,\sigma^2)$，$\mu=EX_i$，$\sigma^2=DX_i\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i\overset{n\to\infty}{\sim}N(n\mu,n\sigma^2)\Rightarrow\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\overset{n\to\infty}{\sim}N(0,1)$，即

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\Phi(x).$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

例 7.1 设 $\{X_n\}$ 是一随机变量序列，$X_n(n=1,2,\cdots)$ 的概率密度为

$$f_n(x)=\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)},\quad -\infty<x<+\infty,$$

证明：$X_n\xrightarrow{P}0(n\to\infty)$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

【证】对任意给定的 $\varepsilon>0$，由于

$$P\{|X_n-0|<\varepsilon\}=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\arctan(n\varepsilon),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n|<\varepsilon\}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\pi}\arctan(n\varepsilon)=1$，所以 $X_n\xrightarrow{P}0(n\to\infty)$.

例 7.2 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布，X_1，X_2，…，X_n 为来自总体 X 的简单随机样本，则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于________.

【解】应填 $\dfrac{1}{2}$.

本题主要考查辛钦大数定律. 由题设，$X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均服从参数为 2 的指数分布，因此，

$$E(X_i^2)=DX_i+(EX_i)^2=\frac{2}{\lambda^2}=\frac{1}{2}.$$

根据辛钦大数定律，若 X_1，X_2，…，X_n 独立同分布且具有相同的数学期望，即 $EX_i=\mu$，则对任意的正数 ε，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

从而，本题有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

即当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $\dfrac{1}{2}$.

例 7.3 （仅数学三）设 $(2,1,5,2,1,3,1)$ 是来自总体 X 的简单随机样本值，求总体 X 的经验分布

函数 $F_7(x)$.

【解】将各观测值按从小到大的顺序排列，得 1，1，1，2，2，3，5，则经验分布函数为

$$F_7(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{3}{7}, & 1\leqslant x<2,\\ \dfrac{5}{7}, & 2\leqslant x<3,\\ \dfrac{6}{7}, & 3\leqslant x<5,\\ 1, & x\geqslant 5.\end{cases}$$

例 7.4 设随机变量序列 X_1，X_2，…，X_n，…相互独立同分布，且 $EX_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<n\right\}=$ ________.

【解】应填 1.

由于 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}EX_n=0$，即对任意 $\varepsilon>0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$，取 $\varepsilon=1$ 以及由 $\left\{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\geqslant 1\right\}\subseteq\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right|\geqslant 1\right\}$，可得

微信公众号：djky66（顶尖考研祝您上岸）

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\geqslant 1\right\}\leqslant\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\geqslant 1\right\}=0,$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<n\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<1\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-P\left\{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\geqslant 1\right\}\right)=1$.

例 7.5 某保险公司接受了 10 000 辆汽车的保险，每辆每年的保费为 1.2 万元 . 若汽车丢失，则车主获得赔偿 100 万元 . 设汽车的丢失率为 0.006，对于此项业务，利用中心极限定理，则保险公司一年所获利润不少于 6 000 万元的概率为________.

【解】应填 0.5.

设 X 为“需要赔偿的车主人数”，则需要赔偿的金额为 $Y=100X$（万元），保费总收入 $C=12\ 000$ 万元 . 易见，随机变量 X 服从参数为 (n,p) 的二项分布，其中 $n=10\ 000$，$p=0.006$，且

$$EX=np=60,\quad DX=np(1-p)=59.64 .$$

由棣莫弗 - 拉普拉斯定理知，随机变量 X 近似服从正态分布 $N(60,59.64)$，则随机变量 Y 近似服从正态分布 $N(6\ 000,596\ 400)$.

保险公司一年所获利润不少于 6 000 万元的概率为

$$P\{12\ 000-Y\geqslant 6\ 000\}=P\{Y\leqslant 6\ 000\}=P\left\{\frac{Y-6\ 000}{\sqrt{596\ 400}}\leqslant 0\right\}\approx\Phi(0)=0.5 .$$

第 8 讲 统计量及其分布

知识结构

- 统计量
  - 样本均值 — $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$
  - 样本方差 — $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$
  - 样本标准差 — $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$
  - 样本 k 阶原点矩 — $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\ (k=1,2,\cdots)$
  - 样本 k 阶中心矩 — $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k\ (k=2,3,\cdots)$
  - 顺序统计量
    - $X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$
    - $X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$
- 统计量的分布
  - 正态分布 — $X\sim N(0,1)$，$P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha(0<\alpha<1)$
  - χ^2 分布
    - $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同服从 $N(0,1)$，则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$
    - $EX=n,DX=2n$
  - t 分布
    - $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，X，Y 独立，$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$
    - $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$
  - F 分布
    - $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，X，Y 独立，$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$
    - $\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$，$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$
- 正态总体下的常用结论
  - ① $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，即 $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$
  - ② $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$
  - ③ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$
  - ④ $\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

研究对象的某数量指标的全体称为总体 X，n 个相互独立且与总体 X 具有相同概率分布的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 所组成的整体 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为来自总体 X 的容量为 n 的一个**简单随机样本**，简称**样本**. 一次抽样结果的 n 个具体数值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一个**观测值**（或**样本值**）. ①

当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本时，$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 元函数，如果 g 中不含任何未知参数，则称 $g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一个**统计量**. 统计量就是由统计数据计算得来的量. 统计量是不含未知参数的随机变量的函数. ②

①总结为：$X_i \overset{iid}{\sim} X \sim F(x) \begin{cases} p_i \\ f(x) \end{cases}$

一 统计量

②总结为：统计量是随机变量的函数（不含未知参数）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则相应的统计量定义如下.

①**样本均值** $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

②**样本方差** $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$；

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

样本标准差 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}$.

③**样本 k 阶原点矩** $A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k\,(k=1,2,\cdots)$.

④**样本 k 阶中心矩** $B_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^k\,(k=2,3,\cdots)$.

⑤**顺序统计量** 将样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的 n 个观测量按其取值从小到大的顺序排列，得

$$X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)} .$$

随机变量 $X_{(k)}(k=1,2,\cdots,n)$ 称作**第 k 顺序统计量**，其中 $X_{(1)}$ 是最小观测量，$X_{(n)}$ 是最大观测量，即

$$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},\quad X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\} .$$

【注】常用的统计量的数字特征.

设总体 X（不论 X 服从何种分布）的期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，记样本均值 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$, 则

$$E\bar{X}=EX=\mu;D\bar{X}=\frac{1}{n}DX=\frac{\sigma^2}{n};\quad E(S^2)=DX=\sigma^2 .$$

二 统计量的分布

定义：统计量的分布称为抽样分布.

1. 正态分布

（1）概念.

如果 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}(-\infty<x<+\infty),$$

其中 $-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma>0$，则称 X 服从参数为 (μ,σ^2) 的**正态分布**或称 X 为**正态变量**，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$．

（2）上 α 分位数．

若 $X\sim N(0,1)$，$P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha(0<\alpha<1)$，则称 μ_α 为标准正态分布的**上 α 分位数**（见图 8-1）．

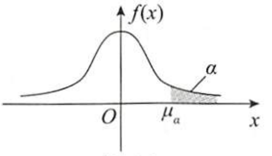


图 8-1

【注】某分布上 α 分位数（亦称上 α 分位点）为 μ_α 意指：点 μ_α 上侧（即右侧），该概率密度曲线下方，x 轴上方图形面积为 α．《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》中规定的便是上 α 分位数．

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（3）性质．

$f(x)$ 的图形关于直线 $x=\mu$ 对称，即 $f(\mu-x)=f(\mu+x)$，并在 $x=\mu$ 处有唯一最大值

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

称 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时的正态分布 $N(0,1)$ 为**标准正态分布**，通常记标准正态分布的概率密度为 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$，分布函数为 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$．显然 $\varphi(x)$ 为偶函数，且有

$$\Phi(0)=\frac{1}{2},\Phi(-x)=1-\Phi(x).$$

2. χ^2 分布

（1）概念．

若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且都服从标准正态分布，则随机变量 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $X\sim\chi^2(n)$．

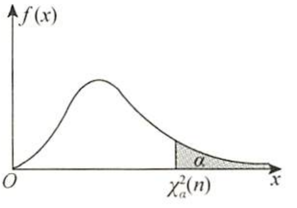
和式中独立变量的个数为自由度

（2）上 α 分位数．

对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足

$$P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\alpha$$

的 $\chi^2_\alpha(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的**上 α 分位数**（见图 8-2）．对于不同的 α，n，$\chi^2(n)$ 分布上 α 分位数可通过查表求得．



$(n>2)$

图 8-2

（3）性质．

①若 $X_1\sim\chi^2(n_1)$，$X_2\sim\chi^2(n_2)$，X_1 与 X_2 相互独立，则

$$X_1+X_2\sim\chi^2(n_1+n_2).$$

此结论可推广至有限多个的和．

【注】常见分布的可加性.
有些相互独立且服从同类型分布的随机变量，其和的分布也是同类型的，它们分别是二项分布、泊松分布、正态分布与 χ^2 分布.
设随机变量 X 与 Y 相互独立，则：
若 $X\sim B(n,p)$，$Y\sim B(m,p)$，则 $X+Y\sim B(n+m,p)$（注意仅 p 相同时成立）；
若 $X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$；
若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$；
若 $X\sim \chi^2(n)$，$Y\sim \chi^2(m)$，则 $X+Y\sim\chi^2(n+m)$.
上述结果对 n 个相互独立的随机变量也成立.

②若 $X\sim\chi^2(n)$，则 $EX=n$，$DX=2n$.

3. t 分布

微信公众号：djky66（顶尖考研祝您上岸）

（1）概念.

设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，X 与 Y 相互独立，则随机变量 $t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $t\sim t(n)$.

（2）上 α 分位数.

对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足

$$P\{t>t_\alpha(n)\}=\alpha$$

的 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的上 α 分位数（见图 8-3）.

（3）性质.

① t 分布概率密度 $f(x)$ 的图形关于 $x=0$ 对称（见图 8-4），因此

$$Et=0(n\geqslant 2).$$

②由 t 分布概率密度 $f(x)$ 图形的对称性，知 $P\{t>-t_\alpha(n)\}=P\{t>t_{1-\alpha}(n)\}$，故 $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$.
当 α 值在表中没有时，可用此式求得上 α 分位数.

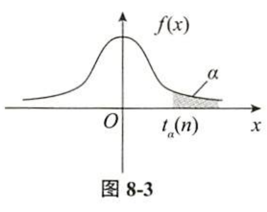


图 8-3

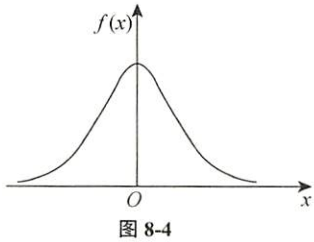


图 8-4

4. F 分布

（1）概念.

设随机变量 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布，记为 $F\sim F(n_1,n_2)$，其中 n_1 称为第一自由度，n_2 称为第二自由度. F 分布的概率密度 $f(x)$ 的图形如图 8-5 所示.

（2）上 α 分位数．

对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足

$$P\{F>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\alpha$$

的 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为 $F(n_1,n_2)$ 分布的上 α 分位数（见图 8-6）．

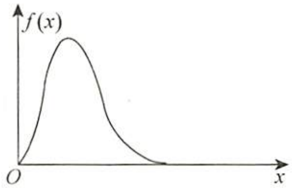


图 8-5

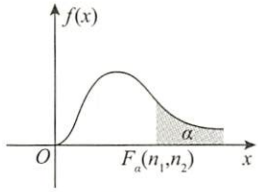


图 8-6

（3）性质．

①若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$．

② $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$．常用来求 F 分布表中未列出的上 α 分位数．

③若 $t\sim t(n)$，则 $t^2\sim F(1,n)$．

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

三 正态总体下的常用结论

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$，S^2 分别是样本均值和样本方差，则

① $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，即 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$；

② $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$；

③ $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$（$\mu$ 未知，在"②"中用 $\overline{X}$ 替代 μ）；

若 $t\sim t(n-1)$，则 $t^2\sim F(1,n-1)$

④ $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$（$\sigma$ 未知，在"①"中用 S 替代 σ）．进一步有

$$\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}\sim F(1,n-1)．$$

例 8.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为独立同分布的随机变量，且均服从正态分布 $N(0,1)$，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n$．求：

（1）Y_i 的方差 DY_i，$i=1,2,\cdots,n$；

（2）Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$；

（3）$P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}$．

【解】（1）$DY_i=D(X_i-\overline{X})$

$$=DX_i+D\bar{X}-2\mathrm{Cov}\left(X_i,\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)\right)$$

$$=1+\frac{1}{n}-2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=1-\frac{1}{n}.$$

$$=\frac{1}{n}[\mathrm{Cov}(X_i,X_1)+\mathrm{Cov}(X_i,X_2)+\cdots+\mathrm{Cov}(X_i,X_n)]$$

$$=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_i)=\frac{1}{n}$$

（2）
$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=\mathrm{Cov}(X_1-\bar{X},X_n-\bar{X})=\mathrm{Cov}(X_1,X_n-\bar{X})-\mathrm{Cov}(\bar{X},X_n-\bar{X})$$
$$=\mathrm{Cov}(X_1,X_n)-\mathrm{Cov}(X_1,\bar{X})-\mathrm{Cov}(\bar{X},X_n)+\mathrm{Cov}(\bar{X},\bar{X}),$$

其中，
$$\mathrm{Cov}(X_1,X_n)=0,$$
$$\mathrm{Cov}(X_i,\bar{X})=\mathrm{Cov}\left(X_i,\frac{X_i}{n}\right)+\mathrm{Cov}\left(X_i,\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}^{n}X_j\right)=\frac{1}{n}DX_i=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n,$$
$$\mathrm{Cov}(\bar{X},\bar{X})=D\bar{X}=\frac{1}{n}.$$

故 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=0-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}$.

微信公众号：djky66

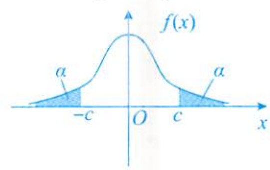
（3）由 $Y_1+Y_n=X_1-\bar{X}+X_n-\bar{X}=\frac{n-2}{n}X_1+\frac{n-2}{n}X_n-\frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n-1}X_i$ 知，Y_1+Y_n 为相互独立的正态随机变量的线性组合，且由 $E(Y_1+Y_n)=0$，有 $P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.

（硕尖考研祝您上岸）

例 8.2 设随机变量 $X\sim t(n)$，$Y\sim F(1,n)$，给定 $\alpha(0<\alpha<0.5)$，常数 c 满足 $P\{X>c\}=\alpha$，则 $P\{Y>c^2\}=$（　　）.

（A）α　　（B）$1-\alpha$

（C）2α　　（D）$1-2\alpha$



【解】应选（C）.

由 $X\sim t(n)$，可得 $X^2\sim F(1,n)$，从而 $P\{Y>c^2\}=P\{X^2>c^2\}=P\{X>c\}+P\{x<-c\}=2\alpha$，故正确选项为（C）.

> 【注】此题只能有概率 $P\{Y>c^2\}$ 与 $P\{X^2>c^2\}$ 相等，而不能说 $Y=X^2$，因为服从相同分布的随机变量并不一定相同.

例 8.3 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是来自正态总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$Y^2=\frac{1}{9}\sum_{i=2}^{10}X_i^2$，则（　　）.

（A）$X_1^2\sim\chi^2(1)$　（B）$Y^2\sim\chi^2(9)$　（C）$\frac{X_1}{Y}\sim t(9)$　（D）$\frac{X_1^2}{Y^2}\sim F(9,1)$

【解】应选（C）.

$\frac{X_1}{\sigma}\sim N(0,1)\Rightarrow\frac{X_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$　　$\frac{9Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(9)$

由于总体服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，由 χ^2 分布的定义知选项（A），（B）不成立. 又选项（D）中 F 分布自由度为 $(9,1)$ 与 $\frac{X_1^2}{Y^2}$ 自由度不相符，所以正确选项为（C）.

$$\frac{\left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2}{\frac{9Y^2}{\sigma^2}/9}\sim F(1,9)$$

事实上，由题设知，$\frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1)$，$i=1,2,\cdots,10$，且相互独立，所以
$$\frac{X_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1),\quad \sum_{i=2}^{10}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2=\frac{9Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(9).$$

又 X_1 与 Y^2 相互独立，故 $\dfrac{X_1/\sigma}{\sqrt{\dfrac{9Y^2}{\sigma^2}\Big/9}}=\dfrac{X_1}{Y}\sim t(9)$，选择（C）.

例 8.4 设总体 X 和 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 分别是来自总体 X 和 Y 且容量都为 n 的两个简单随机样本，样本均值、样本方差分别为 $\overline{X}$，S_X^2 和 $\overline{Y}$，S_Y^2，则（　　）.

（A）$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,\sigma^2)$　　　（B）$S_X^2+S_Y^2\sim\chi^2(2n-2)$

（C）$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}}\sim t(2n-2)$　　　（D）$\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}\sim F(n-1,n-1)$

【解】 应选（D）.

由题设知 $\overline{X}$，$\overline{Y}$，S_X^2，S_Y^2 相互独立，且

$$\overline{X}\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right),\quad \overline{Y}\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right),$$

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\quad \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

由此可知 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(0,\dfrac{2\sigma^2}{n}\right)$，选项（A）不正确.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

$$\frac{n-1}{\sigma^2}(S_X^2+S_Y^2)\sim\chi^2(2n-2),$$

选项（B）不正确.

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\overline{Y})/\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\dfrac{n-1}{\sigma^2}(S_X^2+S_Y^2)\Big/2(n-1)}}=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}}\sim t(2n-2),$$

选项（C）不正确.

$$\frac{\dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}{\dfrac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}=\frac{S_X^2}{S_Y^2}\sim F(n-1,n-1),$$

选择（D）.

第9讲 参数估计与假设检验

知识结构

- 点估计和评价标准
  - 矩估计
    - 一个参数
      - 用一阶矩建立方程，令 $\bar{X}=EX$
      - 用二阶矩建立方程，令 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2)$
    - 两个参数 — 用一阶矩与二阶矩建立两个方程
  - 最大似然估计
    - 写似然函数 — $L(x_i;\theta)=$
      - ① $\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$（离散型总体 X 取 x_i 的概率）
      - ② $\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$（连续型总体 X 取 x_i 的联合概率密度）
    - 求参数
      - ①有驻点，令 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}=0$ 或 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=0$
      - ②无驻点（单调），用定义求 $\hat{\theta}$
      - ③为常数，用定义求 $\hat{\theta}$，$\hat{\theta}$ 不唯一
    - 不变性原则
  - 估计量的评价（仅数学一）
    - 无偏性 — $E\hat{\theta}=\theta$
    - 有效性 — $D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$，称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效
    - 一致性（相合性）
      - $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0$
      - $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$
  - 估计量的数字特征（仅数学三）
    - ①求 $E\hat{\theta}$
    - ②求 $D\hat{\theta}$
    - ③验证是否有 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$
- 区间估计与假设检验（仅数学一）
  - 区间估计
    - 概念
    - 单个正态总体均值和方差的置信区间
  - 假设检验
    - 概念
    - 原假设与备择假设
    - 小概率原理与显著性水平
    - 正态总体下的六大检验及拒绝域
  - 两类错误
    - 第一类错误（“弃真”）
    - 第二类错误（“取伪”）

微信公众号：djky66（顶尖考研祝您上岸）

一 点估计和评价标准

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$（可以是多维的），其中 θ 是一个未知参数，X_1，X_2，…，X_n 是取自总体 X 的一个样本．由样本构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 作为参数 θ 的估计，则称统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的**估计量**．

如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本的一个观察值，将其代入估计量 $\hat{\theta}$ 中得值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，统计学中称这个值为未知参数 θ 的**估计值**．

建立一个适当的统计量作为未知参数 θ 的估计量，并以相应的观察值作为未知参数估计值的问题，称为参数 θ 的**点估计问题**．

1. 矩估计

（1）对于一个参数 $\begin{cases}\text{①用一阶矩建立方程：令 } \overline{X}=EX,\\ \text{②若“①”不能用，用二阶矩建立方程：令 } \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2).\end{cases}$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

一个方程解出一个参数即可作为矩估计．

（2）对于两个参数，用一阶矩与二阶矩建立两个方程，即① $\overline{X}=EX$ 与② $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2)$，两个方程解出两个参数即可作为矩估计．

例 9.1 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;a)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a^2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}(a>0),$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是从 X 取出的样本观测值，则总体参数 a 的矩估计值为________.

【解】应填 $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\overline{x}$．

由例 6.4 知，总体 X 的数学期望 $EX=\dfrac{2a}{\sqrt{\pi}}$，令 $\overline{x}=EX$，即 $\dfrac{2a}{\sqrt{\pi}}=\overline{x}$，则 a 的矩估计值为 $\hat{a}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\overline{x}$．

例 9.2 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}}$，$-\infty<x<+\infty$，$\theta>0$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的样本．则未知参数 θ 的矩估计量为________.

【解】应填 $\sqrt{\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}$．

总体只含有一个参数 θ，但由于一阶矩建立的方程

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}}\mathrm{d}x=0$$

无法解出 θ，因此采用总体二阶矩建立方程：

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}}\mathrm{d}x=2\cdot\frac{1}{2\theta}\int_0^{+\infty}x^2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x\\&=\theta^2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{\theta}\right)\xlongequal{t=\frac{x}{\theta}}\theta^2\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\theta^2\Gamma(3)=2\theta^2,\end{aligned}$$

其中$\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx=n!$. 用样本二阶原点矩$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$代替总体二阶原点矩$E(X^2)$得到$\theta$的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{2}A_2}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}\ .$$

例 9.3 设总体X服从含有两个参数的指数分布，其概率密度为

$$f(x;\theta,\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\theta)}, & x\geqslant\theta, \\ 0, & 其他\end{cases}(\lambda>0)\ ,$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本，求未知参数λ，θ的矩估计量.

【解】这是求两个未知参数矩估计量的问题. 由于

$$EX=\int_\theta^{+\infty}\frac{x}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\theta)}dx\xlongequal{令x-\theta=t}\int_0^{+\infty}\frac{t+\theta}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}t}dt$$

记 $T\sim E\left(\frac{1}{\lambda}\right)$（简单解法）$=E(T+\theta)$
$=ET+\theta=\lambda+\theta$

$$=\int_0^{+\infty}t\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}t}dt+\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}t}dt=\lambda+\theta\ ,$$

$$E(X^2)=\int_\theta^{+\infty}\frac{x^2}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\theta)}dx\xlongequal{令x-\theta=t}\int_0^{+\infty}\frac{(t+\theta)^2}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}t}dt$$

记 $T\sim E\left(\frac{1}{\lambda}\right)$（简单解法）$=E[(T+\theta)^2]$
$=E(T^2)+2\theta ET+\theta^2$
$=2\lambda^2+2\theta\lambda+\theta^2$

$$=\int_0^{+\infty}t^2\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}t}dt+2\int_0^{+\infty}\theta\cdot t\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}t}dt+\theta^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}t}dt$$

$$=2\lambda^2+2\theta\lambda+\theta^2=\lambda^2+(\lambda+\theta)^2\ .$$

矩法方程为

$$\begin{cases}EX=\overline{X}, \\ E(X^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2,\end{cases} 即 \begin{cases}\lambda+\theta=\overline{X}, \\ \lambda^2+(\lambda+\theta)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2.\end{cases}$$

由此解得λ，θ的矩估计量为

$$\hat{\lambda}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2}\ ,\quad \hat{\theta}=\overline{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2}\ .$$

【注】计算EX，$E(X^2)$时应用了指数分布的结论，即

$$\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=1\ ,\quad \int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\ ,\quad \int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}\ .$$

2. 最大似然估计

对未知参数θ进行估计时，在该参数可能的取值范围I内选取，使“样本获此观测值$x_1,x_2,\cdots,x_n$”的概率最大的参数值$\hat{\theta}$作为θ的估计，这样选定的$\hat{\theta}$最有利于$x_1,x_2,\cdots,x_n$的出现，即“参数$\theta=$？时，观测值出现的概率最大”.

（1）写似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)（这是离散型总体 X 取 x_1,x_2,\cdots,x_n 的概率）, \\ \prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)（这是连续型总体 X 取 x_1,x_2,\cdots,x_n 的联合概率密度）.\end{cases}$

独立：拆 $\Rightarrow f=f_1f_2\cdots f_n; p=p_1p_2\cdots p_n$.
同分布：去下标 $\Rightarrow f=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta); p=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（2）求参数 $\begin{cases} 若似然函数有驻点，则令\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}=0或\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=0，解出\hat{\theta}, \\ 若似然函数无驻点(单调)，则用定义求\hat{\theta}, \\ 若似然函数为常数，则用定义求\hat{\theta}，此时\hat{\theta}不唯一. \end{cases}$

（3）最大似然估计量的不变性原则．

设 $\hat{\theta}$ 是总体分布中未知参数 θ 的最大似然估计，函数 $u=u(\theta)$ 具有单值的反函数 $\theta=\theta(u)$，则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计．

例 9.4 设总体 X 服从参数 λ（$\lambda>0$ 但未知）的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，则 $P\{X=0\}$ 的最大似然估计量为________．

【解】应填 $\mathrm{e}^{-\bar{X}}$．

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 对应的样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则似然函数为

$$L(\lambda)=P\{X=x_1\}P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}$$

$$=\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\cdots\cdot\frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{\mathrm{e}^{-n\lambda}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

即
$$\ln L(\lambda)=-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\lambda.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}[\ln L(\lambda)]}{\mathrm{d}\lambda}=0$，即 $-n+\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$，即 λ 的最大似然估计量为 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$．代入 $P\{X=0\}=\dfrac{\lambda^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}$，由最大似然估计量的不变性原则，得 $P\{X=0\}$ 的最大似然估计量为 $\mathrm{e}^{-\bar{X}}$．

【注】常见分布的矩估计量和最大似然估计量．

X 服从的分布	矩估计量	最大似然估计量
0—1 分布	$\hat{p}=\bar{X}$	$\hat{p}=\bar{X}$
$B(n,p)$	$\hat{p}=\dfrac{\bar{X}}{n}$	$\hat{p}=\dfrac{\bar{X}}{n}$
$G(p)$	$\hat{p}=\dfrac{1}{\bar{X}}$	$\hat{p}=\dfrac{1}{\bar{X}}$
$P(\lambda)$	$\hat{\lambda}=\bar{X}$	$\hat{\lambda}=\bar{X}$
$U(a,b)$	$\hat{a}=\bar{X}-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$ $\hat{b}=\bar{X}+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$	$\hat{a}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ $\hat{b}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$
$E(\lambda)$	$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\bar{X}}$	$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\bar{X}}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$\hat{\mu}=\bar{X}$，$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$	$\hat{\mu}=\bar{X}$，$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

例 9.5 设某种电器元件的寿命 X（单位：h）服从双指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-c}{\theta}}, & x\geqslant c,\theta>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ，c 为未知参数，从中抽取 n 件测其寿命，得它们的有效使用时间依次为 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$．求 θ 与 c 的最大似然估计值．

【解】样本似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta,c)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x_i-c}{\theta}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant c,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-nc\right)}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant c,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

取对数得

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

$$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta,c)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-nc\right),$$

有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-nc\right),\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial c}=\dfrac{n}{\theta},\end{cases}$$

令 $\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta}=0$ 得到 $\theta=\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-nc\right)=\overline{x}-c$，其中 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$．第二个方程中 $\dfrac{n}{\theta}$ 恒大于零，说明 $\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta,c)$ 是 c 的单调增函数，要使似然函数达到最大值，必须使 c 取到最大值，而 c 又必须满足 $c\leqslant x_i(i=1,2,\cdots,n)$，即 $c=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=x_1$，故

$$\hat{c}=x_1=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=x_{(1)},\quad \hat{\theta}=\overline{x}-c=\overline{x}-x_1=\overline{x}-x_{(1)}.$$

例 9.6 设总体 X 的概率密度

$$f(x;\theta)=\begin{cases}1, & \theta-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\theta+\dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $-\infty<\theta<+\infty$．$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的简单随机样本，并记

$$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},\quad X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$

求参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$．

【解】设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为简单随机样本的样本值，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}1, & \theta-\dfrac{1}{2}\leqslant x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant\theta+\dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & \theta-\dfrac{1}{2}\leqslant\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\leqslant x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\leqslant\theta+\dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

由最大似然估计定义知，

$$\begin{cases}\hat{\theta}-\dfrac{1}{2}\leqslant X_{(1)},\\ \hat{\theta}+\dfrac{1}{2}\geqslant X_{(n)},\end{cases}$$

此处的 $\hat{\theta}_L$ 不具有唯一性

故满足 $X_{(n)}-\dfrac{1}{2}\leqslant\hat{\theta}_L\leqslant X_{(1)}+\dfrac{1}{2}$ 的统计量均为 θ 的最大似然估计量.

例 9.7 设总体 X 服从 $\left(0,\dfrac{1}{\theta}\right]$ 上的均匀分布，$\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 求：

（1）θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$；

（2）$\hat{\theta}$ 的分布函数；

（3）$P\{\theta<\hat{\theta}\leqslant\theta+1\}$.

【解】（1）由题意知，$X\sim f(x)=\begin{cases}\theta, & 0<x\leqslant\dfrac{1}{\theta},\\ 0, & 其他.\end{cases}$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为简单随机样本的样本值，则似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\theta^n, & 0<x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant\dfrac{1}{\theta},\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

故 $L(\theta)$ 是 θ 的单调增加函数.

当 $\dfrac{1}{\theta}$ 最小时，$L(\theta)$ 最大，即 $\dfrac{1}{\theta}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=x_{(n)}$，故 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{X_{(n)}}$.

（2）$\hat{\theta}$ 的分布函数为

$$F(y)=P\{\hat{\theta}\leqslant y\}=P\left\{\frac{1}{X_{(n)}}\leqslant y\right\}=P\left\{\frac{1}{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}}\leqslant y\right\}.$$

当 $y\leqslant 0$ 时，$F(y)=0$；

当 $y>0$ 时，

$$\begin{aligned}F(y)&=P\left\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\geqslant\frac{1}{y}\right\}\\&=1-P\left\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}<\frac{1}{y}\right\}\\&=1-P\left\{X_1<\frac{1}{y},X_2<\frac{1}{y},\cdots,X_n<\frac{1}{y}\right\}\\&=1-P\left\{X_1<\frac{1}{y}\right\}P\left\{X_2<\frac{1}{y}\right\}\cdots P\left\{X_n<\frac{1}{y}\right\}\\&=1-\left(P\left\{X<\frac{1}{y}\right\}\right)^n,\end{aligned}$$

其中 $P\left\{X<\dfrac{1}{y}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{y}}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{y}}\theta\mathrm{d}x, & \dfrac{1}{y}\leqslant\dfrac{1}{\theta},\\ 1, & \dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{\theta}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\theta}{y}, & y\geqslant\theta,\\ 1, & y<\theta.\end{cases}$

故

$$F(y)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\theta}{y}\right)^n, & y\geqslant\theta,\\ 0, & 0<y<\theta.\end{cases}$$

综上所述，$\hat{\theta}$ 的分布函数为 $F(y)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\theta}{y}\right)^n, & y\geqslant\theta,\\ 0, & y<\theta.\end{cases}$

（3）$P\{\theta<\hat{\theta}\leqslant\theta+1\}=P\{\hat{\theta}\leqslant\theta+1\}-P\{\hat{\theta}\leqslant\theta\}$

$$=F(\theta+1)-F(\theta)=1-\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^n-0$$

$$=1-\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^n.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

3. 估计量的评价（仅数学一）

（1）无偏性.

对于估计量 $\hat{\theta}$，若 $E\hat{\theta}=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量.

（2）有效性.

若 $E\hat{\theta}_1=\theta$，$E\hat{\theta}_2=\theta$，即 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$ 均是 θ 的无偏估计量，当 $D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$ 时，称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

（3）一致性（相合性）（只针对大样本 $n\to\infty$）.

一般用以下两种方法：
①切比雪夫不等式 $P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$
②辛钦大数定律（独立同分布、EX 存在）
$\Rightarrow\bar{X}\xrightarrow{P}E\bar{X}$

若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量，对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0,$$

或

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1,$$

即当 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$ 时，称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致（或相合）估计.

【注】常用切比雪夫不等式、辛钦大数定律判一致性.

4. 估计量的数字特征（仅数学三）

（1）求 $E\hat{\theta}$.

（2）求 $D\hat{\theta}$.

（3）验证 $\hat{\theta}$ 是否依概率收敛到 θ，即是否有 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$，即对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0 \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1.$$

例 9.8 设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，θ 未知 $(\theta>0)$，X_1,X_2,X_3 是取自 X 的一个样本.

（1）（仅数学一）证明 $\hat{\theta}_1=\frac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$，$\hat{\theta}_2=4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$ 都是 θ 的无偏估计；

（仅数学三）设 $\hat{\theta}_1=k_1\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$，$\hat{\theta}_2=k_2\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$，若 $E\hat{\theta}_1=E\hat{\theta}_2=\theta$，求 k_1，k_2 的值.

（2）（仅数学一）上述两个估计中哪个较有效？

（仅数学三）比较（1）中的 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$ 的方差大小.

（1）（仅数学一）【证】由例 5.6 和 6.5（1）可知，

$$E\left(\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\frac{3}{4}\theta,\quad E\left(\frac{4}{3}\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\theta,$$

$$E\left(\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\frac{1}{4}\theta,\quad E\left(4\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\theta,$$

故 $\hat{\theta}_1=\frac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$ 与 $\hat{\theta}_2=4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$ 都是 θ 的无偏估计.

（仅数学三）【解】由例 5.6 和 6.5（1）可知，

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

$$E\left(\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\frac{3}{4}\theta,\quad E\left(\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\frac{1}{4}\theta.$$

又
$$E\hat{\theta}_1=E\left(k_1\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=k_1E\left(\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\frac{3}{4}k_1\theta=\theta,$$

得 $k_1=\frac{4}{3}$.

又
$$E\hat{\theta}_2=E\left(k_2\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=k_2E\left(\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\frac{1}{4}k_2\theta=\theta,$$

得 $k_2=4$.

（2）【解】（仅数学一）由例 6.5（2）可知，

$$D\hat{\theta}_1=D\left(\frac{4}{3}\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\frac{1}{15}\theta^2,$$

$$D\hat{\theta}_2=D\left(4\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\frac{3}{5}\theta^2,$$

从而 $D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$，即 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效.

（仅数学三）由例 6.5（2）可知，

$$D\hat{\theta}_1=D\left(\frac{4}{3}\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\frac{1}{15}\theta^2,$$

$$D\hat{\theta}_2=D\left(4\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}\right)=\frac{3}{5}\theta^2,$$

故 $D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$.

例 9.9 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，$EX=\mu$，$DX=\sigma^2$.

（仅数学一）证明统计量 $Y=\frac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{i=1}^{n}iX_i$ 是 μ 的无偏相合估计量.

（仅数学三）求统计量 $Y=\frac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{i=1}^{n}iX_i$ 的数学期望，并证明 Y 依概率收敛到 μ.

【证】（仅数学一）由于

$$EY=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}E(iX_i)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iEX_i$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}(\mu+2\mu+\cdots+n\mu)=\mu,$$

从而知，Y 是 μ 的无偏估计量.

又因

$$DY=\left[\frac{2}{n(n+1)}\right]^2\sum_{i=1}^{n}i^2DX_i=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$
$$=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}\sigma^2,$$

于是由切比雪夫不等式，对任意实数 $\varepsilon>0$，有

$$1\geqslant P\{|Y-\mu|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{DY}{\varepsilon^2}=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{(2n+1)\sigma^2}{n(n+1)\varepsilon^2},$$

两边取极限，由 $\lim\limits_{n\to\infty}1=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{2}{3}\cdot\frac{(2n+1)\sigma^2}{n(n+1)\varepsilon^2}\right]=1$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|Y-\mu|<\varepsilon\}=1,$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

所以 Y 是 μ 的无偏相合估计量.

（仅数学三）

$$EY=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}E(iX_i)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iEX_i$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}(\mu+2\mu+\cdots+n\mu)=\mu,$$

$$DY=\left[\frac{2}{n(n+1)}\right]^2\sum_{i=1}^{n}i^2DX_i=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$
$$=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}\sigma^2,$$

于是由切比雪夫不等式，对任意实数 $\varepsilon>0$，有

$$1\geqslant P\{|Y-\mu|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{DY}{\varepsilon^2}=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{(2n+1)\sigma^2}{n(n+1)\varepsilon^2},$$

两边取极限，由 $\lim\limits_{n\to\infty}1=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{2}{3}\cdot\frac{(2n+1)\sigma^2}{n(n+1)\varepsilon^2}\right]=1$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|Y-\mu|<\varepsilon\}=1,$$

所以 Y 依概率收敛到 μ.

二 区间估计与假设检验（仅数学一）

1. 区间估计

（1）概念.

设 θ 是总体 X 的分布函数的一个未知参数，对于给定 $\alpha(0<\alpha<1)$，如果由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的

两个统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ ，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ ，使

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha ,$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1,\ \hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的**置信区间**，$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的**置信下限**和**置信上限**，$1-\alpha$ 称为**置信度**或**置信水平**，α 称为显著性水平. 如果 $P\{\theta<\hat{\theta}_1\}=P\{\theta>\hat{\theta}_2\}=\dfrac{\alpha}{2}$ ，则称这种置信区间为等尾置信区间.

考前记一记，喝前摇一摇，即可.

（2）单个正态总体均值和方差的置信区间.

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ ，从总体 X 中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ ，样本均值为 $\overline{X}$ ，样本方差为 S^2 .

① σ^2 已知，μ 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

$\xrightarrow{\text{记为 } I_1} P\{\mu\in I_1\}=1-\alpha$

② σ^2 未知，μ 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right).$$

$\xrightarrow{\text{记为 } I_2} P\{\mu\in I_2\}=1-\alpha$

③ μ 已知，σ^2 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right).$$

$\xrightarrow{\text{记为 } I_3} P\{\sigma^2\in I_3\}=1-\alpha$

此种情况一般不出现

④ μ 未知，σ^2 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right).$$

$\xrightarrow{\text{记为 } I_4} P\{\sigma^2\in I_4\}=1-\alpha$

例 9.10 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ ，从总体中抽取容量为 36 的一个样本，样本均值 $\overline{x}=3.5$ ，样本方差 $s^2=4$. 已知 $\sigma^2=1$ ，则 μ 置信度为 0.95 的置信区间为________. ($\Phi(1.96)=0.975$, $t_{0.025}(35)=2.03,t_{0.05}(35)=1.69$)

【解】应填 (3.17,3.83).

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

当 σ^2 已知时，μ 置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

当 $1-\alpha=0.95$ ，$n=36$ 时，

$$\alpha=0.05 ,\quad \Phi\left(z_{\frac{0.05}{2}}\right)=1-\frac{0.05}{2}=0.975 ,\quad z_{\frac{0.05}{2}}=1.96 ,\quad \overline{x}=3.5 ,$$

所求置信区间为

$$\left(3.5-\frac{1}{6}\times1.96,3.5+\frac{1}{6}\times1.96\right)=(3.17,3.83) .$$

例 9.11 已知某机器生产出的零件长度 X（单位：cm）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ ，现从中随意抽取容量为 16 的一个样本，测得样本均值 $\overline{x}=10$ ，样本方差 $s^2=0.16$ ，则总体均值 μ 置信水平为 0.95 的置

信区间为________. ($t_{0.025}(15)=2.132$)

【解】应填 (9.786 8,10.213 2).

在总体方差 σ^2 未知条件下，求均值 μ 的置信区间，即求置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right).$$

由 $\overline{x}=10$，$s^2=0.16=0.4^2$，得

$$\left(10-\frac{2.132\times0.4}{4},10+\frac{2.132\times0.4}{4}\right)=(9.786\ 8,10.213\ 2).$$

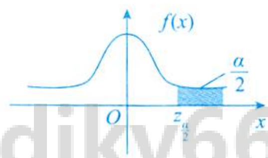
例 9.12 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 已知，n 是给定的样本容量，μ 为未知参数，则 μ 的等尾双侧置信区间长度 L 与置信度 $1-\alpha$ 的关系是（　　）.

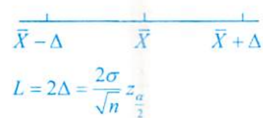
（A）当 $1-\alpha$ 减小时，L 变小

（B）当 $1-\alpha$ 减小时，L 增大

（C）当 $1-\alpha$ 减小时，L 不变

（D）当 $1-\alpha$ 减小时，L 增减不定





微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

【解】应选（A）.

由均值 μ 的等尾双侧置信区间 $\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ 来确定正确选项. 事实上，此时置信区间长度 $L=\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$，当 $1-\alpha$ 减小时，α 增大，$z_{\frac{\alpha}{2}}$ 减小，故 L 变小，所以选择（A）.

例 9.13 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 和 σ^2 均为未知参数. 从总体 X 中抽取容量为 10 的样本，样本值如下：

86.0，85.5，85.4，85.5，85.6，85.9，85.7，85.8，85.7，85.9，

则标准差 σ 的置信水平为 0.98 的置信区间是________.（$\chi^2_{0.01}(9)=21.67$，$\chi^2_{0.01}(10)=23.21$，$\chi^2_{0.99}(9)=2.09$，$\chi^2_{0.99}(10)=2.56$）

【解】应填 (0.129,0.415).

由已知数据算得 $s^2=0.04$. 由于 $n=10$，$\alpha=1-0.98=0.02$，得

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.01}(10-1)=21.67,\quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.99}(10-1)=2.09,$$

因此标准差 σ 的置信水平为 0.98 的置信区间是

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)=\left(\sqrt{\frac{(10-1)\times0.04}{21.67}},\sqrt{\frac{(10-1)\times0.04}{2.09}}\right)=(0.129,0.415).$$

2. 假设检验

（1）概念.

关于总体（分布中的未知参数，分布的类型、特征、相关性、独立性……）的每一种论断（“看法”）称为**统计假设**. 然后根据样本观察数据或试验结果所提供的信息去推断（检验）这个“看法”（即假设）是否成立，这类统计推断问题称为**假设检验**.

（2）原假设与备择假设.

常常把没有充分理由不能轻易否定的假设取为**原假设**（**基本假设或零假设**），记为 H_0，将其否定的陈述（假设）称为**对立假设或备择假设**，记为 H_1 .

（3）小概率原理与显著性水平 .

①小概率原理 .

对假设进行检验的**基本思想**是采用**某种带有概率性质的反证法** . 这种方法的依据是小概率原理——概率很接近于 0 的事件在一次试验或观察中认为备择假设不会发生 . 若小概率事件发生了，则拒绝原假设 .

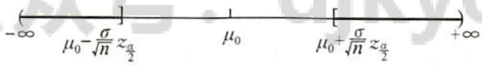
②显著性水平 α .

小概率事件中的“小概率”的值没有统一规定，通常是根据实际问题的要求，规定一个界限 $\alpha(0<\alpha<1)$，当一个事件的概率不大于 α 时，即认为它是小概率事件 . 在假设检验问题中，α 称为**显著性水平**，通常取 $\alpha=0.1$， 0.05， 0.01 等 .

（4）正态总体下的六大检验及拒绝域 . 考前记一记，喝前摇一摇，即可 .

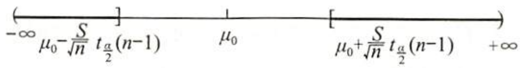
微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

① σ^2 已知，μ 未知 . $H_0:\mu=\mu_0$， $H_1:\mu\neq\mu_0$，则拒绝域为 $\left(-\infty,\mu_0-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right]\cup\left[\mu_0+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty\right)$.



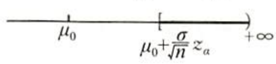
② σ^2 未知，μ 未知 . $H_0:\mu=\mu_0$， $H_1:\mu\neq\mu_0$，则拒绝域为

$$\left(-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]\cup\left[\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty\right).$$



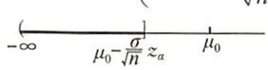
③ σ^2 已知，μ 未知 . $H_0:\mu\leqslant\mu_0$， $H_1:\mu>\mu_0$，则拒绝域为 $\left[\mu_0+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha,+\infty\right)$.

（或写 $\mu=\mu_0$ ）



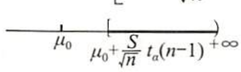
④ σ^2 已知，μ 未知 . $H_0:\mu\geqslant\mu_0$， $H_1:\mu<\mu_0$，则拒绝域为 $\left(-\infty,\mu_0-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha\right]$.

（或写 $\mu=\mu_0$ ）



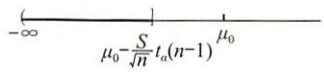
⑤ σ^2 未知，μ 未知 . $H_0:\mu\leqslant\mu_0$， $H_1:\mu>\mu_0$，则拒绝域为 $\left[\mu_0+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1),+\infty\right)$.

（或写 $\mu=\mu_0$ ）



⑥ σ^2 未知，μ 未知 . $H_0:\mu\geqslant\mu_0$， $H_1:\mu<\mu_0$，则拒绝域为 $\left(-\infty,\mu_0-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)\right]$.

（或写 $\mu=\mu_0$ ）



【注】 拒绝域的“形式”与备择假设 H_1 的“形式”一致，便于记忆 .

例 9.14 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自正态总体 $N(\mu,2^2)$ 的样本，样本均值为 $\bar{X}$，则在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设 $H_0:\mu=5$，$H_1:\mu\neq5$ 的拒绝域为________. $(\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.65)=0.95)$

【解】 应填 $(-\infty,4.02]\cup[5.98,+\infty)$.

由“2.（4）①”可知，本题假设检验的拒绝域为

$$\left(-\infty,\ \mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right]\cup\left[\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty\right),$$

其中 $\mu_0=5$，$\sigma=2$，$n=16$，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$，则拒绝域为

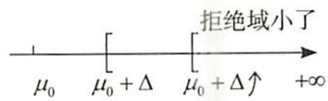
$$(-\infty,4.02]\cup[5.98,+\infty).$$

例 9.15 对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下接受 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu>\mu_0$，那么在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下（　　）．

（A）必接受 H_0　　（B）必拒绝 H_0，接受 H_1

（C）可能接受也可能拒绝 H_0　　（D）拒绝 H_0，可能接受也可能拒绝 H_1

【解】应选（A）．



如图 9-1 所示，拒绝域为 $[\mu_0+\Delta,+\infty)$，无论 $\Delta=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$，还是 $\Delta=\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$，当 α 变小时，总有 z_α 变大，$t_\alpha(n-1)$ 变大，$\mu_0+\Delta$ 变大，拒绝域变小，所以在 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0，选择（A）．

$$\Delta=\begin{cases}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha(\sigma^2\text{已知})\\ \frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)(\sigma^2\text{未知})\end{cases}$$

图 9-1

α：保护 H_0

H_0 是在长期实践中的真理，一般不推翻．

微信公众号：djky66（顶尖考研祝您上岸）

3. 两类错误

第一类错误（“弃真”）：若 H_0 为真，按检验法则，否定了 H_0，此时犯了“弃真”的错误，这种错误称为第一类错误，犯第一类错误的概率为 $\alpha=P\{\text{拒绝 }H_0\,|\,H_0\text{ 为真}\}$．

第二类错误（“取伪”）：若 H_0 不真，按检验法则，接受 H_0，此时犯了“取伪”的错误，这种错误称为第二类错误，犯第二类错误的概率为 $\beta=P\{\text{接受 }H_0\,|\,H_0\text{ 为假}\}$．

例 9.16 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本，考虑假设检验问题：$H_0:\mu\leqslant 10$，$H_1:\mu>10.\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数．若该检验问题的拒绝域为 $W=\{\bar{X}>11\}$，其中 $\bar{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$，则 $\mu=11.5$ 时，该检验犯第二类错误的概率为（　　）．

（A）$1-\Phi(1)$　　（B）$1-\Phi(0.5)$　　（C）$1-\Phi(1.5)$　　（D）$1-\Phi(2)$

【解】应选（A）．

当 $\mu=11.5$ 时，该检验犯第二类错误的概率为

$P\{$接受 $H_0|\,H_0$ 为假$\}$

$$P\{\bar{X}\leqslant 11\,|\,\mu=11.5\}.$$

当 $\mu=11.5$ 时，

$$\bar{X}\sim N\left(11.5,\frac{4}{16}\right)，\text{即}\bar{X}\sim N\left(11.5,\frac{1}{4}\right),$$

从而

$$P\{\bar{X}\leqslant 11\,|\,\mu=11.5\}=\Phi\left(\frac{11-11.5}{1/2}\right)=\Phi(-1)=1-\Phi(1).$$

例 9.17 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta}{x^2}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta,\end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$为来自总体X的简单随机样本，$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

（1）求θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$，并求常数a，使得$a\hat{\theta}$为θ的无偏估计；

（2）对于原假设$H_0:\theta=2$与备择假设$H_1:\theta>2$，若H_0的拒绝域为$W=\{X_{(1)}\geqslant 3\}$，求犯第一类错误的概率α.

【解】（1）设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为简单随机样本的样本值，则似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^n}{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

取对数$\ln L(\theta)=n\ln\theta-2\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$，由于$\dfrac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{n}{\theta}>0$，故$\ln L(\theta)$是$\theta$的单调递增函数，于是$\theta$的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},$$

$EX_{(1)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot n[1-F(x)]^{n-1}f(x)\mathrm{d}x$

且
$$E\hat{\theta}=EX_{(1)}=\int_{\theta}^{+\infty}x\cdot n\cdot\left(\frac{\theta}{x}\right)^{n-1}\cdot\frac{\theta}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\theta}^{+\infty}n\cdot\frac{\theta^n}{x^n}\mathrm{d}x=n\cdot\theta^n\cdot\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}\Big|_{\theta}^{+\infty}=\frac{n}{n-1}\theta.$$

若$E(a\hat{\theta})=\theta$，则$a\dfrac{n}{n-1}\theta=\theta$，所以$a=\dfrac{n-1}{n}$.

（2）$\alpha=P\{X_{(1)}\geqslant 3\mid\theta=2\}=\int_{3}^{+\infty}n\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{2}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{3}^{+\infty}n\cdot\dfrac{2^n}{x^{n+1}}\mathrm{d}x=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

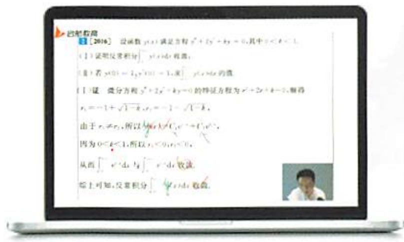
$P\{\text{拒绝}H_0\mid H_0\text{为真}\}$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

2024张宇考研数学

《真题大全解》书课包

以“真题”为鉴，37年真题套卷你值得拥有！



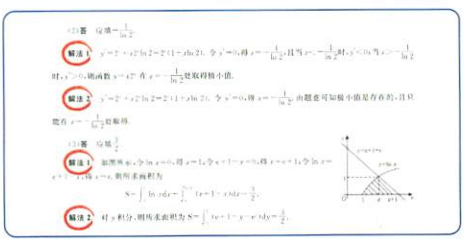
微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

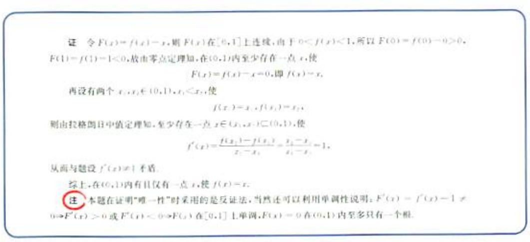
“1987—2023”37年考研数学真题试卷及详细解析

全面

- 收录全部真题，附“答案速查”

- 解析详尽，一题多解，注释点睛





近十年真题逐题精讲

精讲

- “2014—2023”共10年真题**全覆盖讲解**
（区分数学一、数学二、数学三）
- **以题带学**，讲题的同时回溯对应知识点，归纳解题方法与技巧，领略真题考法，助力考研成功上岸

张宇

博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《张宇考研数学基础30讲》《张宇考研数学题源探析经典1000题》《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》《张宇考研数学真题大全解》《考研数学命题人终极预测8套卷》《张宇考研数学最后4套卷》《张宇经济类综合能力数学通关优题库》作者，高等教育出版社原《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》及《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》编者之一，北京、上海、广州、西安等全国著名考研数学辅导班首席主讲。

张宇考研数学系列丛书

教材类

张宇考研数学基础30讲 · 高等数学分册 书课包
张宇考研数学基础30讲 · 线性代数分册 书课包
张宇考研数学基础30讲 · 概率论与数理统计分册 书课包
张宇高等数学18讲 书课包
张宇线性代数9讲 书课包
张宇概率论与数理统计9讲 书课包

题集类

张宇考研数学题源探析经典1000题（分数学一、数学二、数学三）书课包
张宇考研数学真题大全解（分数学一、数学二、数学三）书课包
考研数学命题人终极预测8套卷（分数学一、数学二、数学三）书课包
张宇考研数学最后4套卷（分数学一、数学二、数学三）书课包

北京理工大学出版社网址：http://www.bitpress.com.cn

张宇考研数学
微信公众号

启航教育
微信公众号

ISBN 978-7-5763-0853-2
01>
9 787576 308532

定价：99.90元