张宇考研数学概率论与数理统计
基础阶段模考试卷

一、选择题:1 ～ 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 向半径为 r 的圆内随机抛一点,则此点到圆心的距离大于 $\frac{1}{3}r$ 的概率为(　　).

(A) $\frac{1}{9}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{8}{9}$

2. 设一批产品中有 10 个正品和 2 个次品,任意抽取两次,每次抽一个,抽出后不放回,则第二次抽出的是次品的概率为(　　).

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{6}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{3}$

3. 设三事件 A,B,C 两两独立,则 A,B,C 相互独立的充要条件为(　　).

(A) A 与 BC 独立　　(B) AB 与 $A\cup C$ 独立

(C) AB 与 AC 独立　　(D) $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

4. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$, $-\infty<x<+\infty$,则下列服从标准正态分布的随机变量是(　　).

(A) $\frac{X+3}{2}$　　(B) $\frac{X+3}{\sqrt{2}}$　　(C) $\frac{X-3}{2}$　　(D) $\frac{X-3}{\sqrt{2}}$

5. 设随机变量 X 服从指数分布,则随机变量 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数(　　).

(A) 是连续函数　　(B) 至少有两个间断点

(C) 是阶梯函数　　(D) 恰好有一个间断点

6. 设随机变量 $X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}(i=1,2)$,且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$,则 $P\{X_1=X_2\}=$(　　).

(A) 0　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

7. 设一旅客到达火车站的时间 X 均匀分布在早上 7：55 至 8 点,而火车在 7：55 后 Y 分钟开出,且 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{25}(5-y), & 0\leqslant y\leqslant 5,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 则旅客能乘上火车的概率为(

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{1}{2}$

8. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$，对 X 和 $|X|$ 说法正确的是(　　).

(A) X 和 $|X|$ 不相关，且 X 和 $|X|$ 独立

(B) X 和 $|X|$ 相关，且 X 和 $|X|$ 不独立

(C) X 和 $|X|$ 相关，且 X 和 $|X|$ 独立

(D) X 和 $|X|$ 不相关，且 X 和 $|X|$ 不独立

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $X\sim N(0,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，则样本二阶原点矩 $A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 的方差 $DA_2=$(　　).

(A) $\frac{2\sigma^4}{n}$　　(B) $\frac{3\sigma^4}{n}$　　(C) $\frac{2\sigma^4}{n-1}$　　(D) $\frac{3\sigma^4}{n-1}$

10. (数学一) 设总体 X 的数学期望为 μ，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则下列命题正确的是(　　).

(A) X_1 是 μ 的无偏估计量　　(B) X_1 是 μ 的最大似然估计量

(C) X_1 是 μ 的相合估计量　　(D) X_1 不是 μ 的估计量

(数学三) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是(　　).

(A) $t=\frac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$　　(B) $t=\frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$　　(C) $t=\frac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$　　(D) $t=\frac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

二、填空题：11 ～ 16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 已知 $P(\overline{B}\mid A)=\frac{1}{3}$，$P(B\mid\overline{A})=\frac{4}{7}$，$P(AB)=\frac{1}{5}$，则 $P(\overline{A}\overline{B})=$________.

12. 设 X 服从参数为 1 的指数分布，则方程 $4x^2+4Xx+X+2=0$ 无实根的概率为________.

13. 设随机变量 X,Y 相互独立，X 在区间 $[0,5]$ 上服从均匀分布，Y 服从参数为 5 的指数分布，令 $Z=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ 0, & X>Y,\end{cases}$ 则 Z 的分布律为________.

14. 设随机变量 $X \sim N(a,\sigma^2)(\sigma > 0)$，则 $E\mid X-a\mid =$ ________.

15. 设随机变量 $F \sim F(n,n)$，且 $P\{F > a\} = 0.3$，a 为常数，则 $P\left\{F > \dfrac{1}{a}\right\} =$ ________.

16. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{6x}{\theta^3}(\theta - x), & 0 < x < \theta, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，θ 为未知参数，$\hat{\theta}$ 为 θ 的矩估计量，则 $D\hat{\theta} =$ ________.

三、解答题：17 ～ 22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

求：(1) 常数 c；

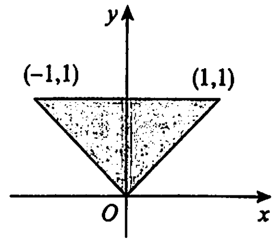
(2) $P\left\{\mid X\mid \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$，$P\left\{X = \dfrac{1}{2}\right\}$，$P\left\{X \geqslant \dfrac{1}{3}\right\}$；

(3) X 的分布函数 $F(x)$；

(4) $Y = 2X - 1$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

18.(本题满分 12 分)

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}kx^2y, & (x,y)\in G,\\ 0, & 其他,\end{cases}$其中$G$是由$y=|x|$及$y=1$围成的区域(见图).



(1) 求k;

(2) 求X,Y的边缘概率密度;

(3) 求当$Y=y(0<y<1)$已知条件下,X的条件概率密度$f_{X|Y}(x\mid y)$;

(4) 求$P\left\{X>\frac{1}{4}\middle|Y=\frac{1}{2}\right\}$和$P\left\{X<\frac{1}{2}\middle|Y=\frac{1}{4}\right\}$;

(5) 求$P\left\{Y<\frac{1}{2}\right\}$.

19.(本题满分 12 分)

设随机变量X,Y相互独立,且$X\sim N(1,1)$,$Y\sim N(-2,1)$.求:

(1)$Z=2X+Y$的概率密度;

(2)$P\{|2X+Y|<\sqrt{5}\}$;

(3)$D(|2X+Y|)$;

(4)$W=(2X+Y)^2$的概率密度($\Phi(1)=0.8413$).

20.(本题满分 12 分)

设随机变量 X,Y 相互独立,且都在区间$[a,b]$上服从均匀分布,求:

(1)$Z_1=\max\{X,Y\}$ 的概率密度;

(2)$Z_2=\min\{X,Y\}$ 的概率密度.

21.(本题满分 12 分)

设$\overline{X}_n$ 和 S_n^2 分别是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本均值和样本方差,即$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$,现在又获得了第 $n+1$ 个样本 X_{n+1},证明:

(1)$\overline{X}_{n+1}=\frac{n}{n+1}\overline{X}_n+\frac{1}{n+1}X_{n+1}=\overline{X}_n+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)$;

(2)$S_{n+1}^2=\frac{n-1}{n}S_n^2+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)^2$.

22.(本题满分 12 分)

设总体 $X \sim U[\theta, \theta+|\theta|]$，其中 θ 是未知参数，从总体 X 中抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应的样本值. 分别就(1)$\theta<0$;(2)$\theta>0$ 两种情况求未知参数 θ 的最大似然估计值.

张宇考研数学概率论与数理统计
基础阶段模考参考答案及评分细则

一、选择题

1.答　应选(D).

解　(几何概率)$p=1-\dfrac{\pi\left(\dfrac{1}{3}r\right)^2}{\pi r^2}=\dfrac{8}{9}$.

2.答　应选(B).

解　**方法一**　记 $A_i=\{$第 i 次取得次品$\}$,$i=1,2$. 则由已知得

$$P(A_1)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},P(\overline{A}_1)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6},P(A_2\mid A_1)=\frac{1}{11},P(A_2\mid \overline{A}_1)=\frac{2}{11}.$$

由全概率公式得 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{11}+\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2}{11}=\dfrac{1}{6}$.

方法二　由抽签原理(中签的概率与抽签的先后次序无关),知第二次抽到次品的概率与第一次抽到次品的概率相同,都是 $\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

【注】　抽签原理:若 n 个签中有 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个“有”签,$n-m$ 个“无”签,n 个人排队依次抽签(或某人抽 n 次,每次抽出一个),则第 k 个人(或某人第 k 次,$k=1,2,\cdots,n$)抽到“有”签的概率都一样,都等于 $\dfrac{m}{n}$. 由此原理知,其概率与各人抽签次序(各次抽签顺序)无关,与抽签方式(有放回还是无放回)也无关,仅与“有”签所占比例有关.

3.答　应选(A).

解　A,B,C 两两独立的意思是

$$P(AB)=P(A)P(B),P(AC)=P(A)P(C),P(BC)=P(B)P(C),$$

而 A,B,C 相互独立的意思是在上述 3 个式子的基础上加 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,共要求 4 个式子成立. 在题目已知的条件下,A,B,C 相互独立的充要条件即为 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,而 A 与 BC 独立的含义为 $P(A(BC))=P(A)P(BC)$,由于 B 与 C 独立,即 $P(BC)=P(B)P(C)$,故可得 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,故选(A).

【注】　本题主要要求理解“两两独立”与“相互独立”的定义及相互关系.

4. 答　应选(B).

解　由 $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{[x-(-3)]^2}{2(\sqrt{2})^2}}$，$-\infty<x<+\infty$，知 $X\sim N(-3,(\sqrt{2})^2)$，

于是 $\dfrac{X-(-3)}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，选(B).

5. 答　应选(D).

解　首先 X 的分布函数 $F(x)$ 肯定是连续函数，而 $Y=\min\{X,2\}=\begin{cases}X, & X\leqslant 2,\\ 2, & X>2,\end{cases}$ Y 永远小于等于 2，所以 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=\begin{cases}1, & y\geqslant 2,\\ P\{X\leqslant y\}=F(y), & y<2,\end{cases}$$

从而 $F_Y(y)$ 在 $y=2$ 处有一个跳跃间断点.

6. 答　应选(A).

解　首先，列出二维随机变量 (X_1,X_2) 的分布律及其边缘分布律中的部分数值.

X_1 \ X_2	-1	0	1	$P\{X_1=x_{1i}\}$
-1	a	b	c	$\frac{1}{4}$
0	d	e	f	$\frac{1}{2}$
1	g	h	k	$\frac{1}{4}$
$P\{X_2=x_{2i}\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

由于 $P\{X_1X_2=0\}=1$，故 $P\{X_1X_2\neq 0\}=0$. 因此 $a=0,c=0,g=0,k=0$. 根据边缘分布的性质，知

$$b=\frac{1}{4},d=\frac{1}{4},f=\frac{1}{4},h=\frac{1}{4},e=\frac{1}{2}-(b+h)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

因此，(X_1,X_2) 的分布律应如下.

X_1 \ X_2	-1	0	1	$P\{X_1=x_{1i}\}$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$P\{X_2=x_{2i}\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

故 $P\{X_1=X_2\}=P\{X_1=-1,X_2=-1\}+P\{X_1=0,X_2=0\}+P\{X_1=1,X_2=1\}=0.$

7. 答　应选(B).

解　因为 X 均匀分布在早上 7∶55 至 8 点，将 7∶55 作为时间轴(单位:分) 的起点，则 X 在区间$[0,5]$上服从均匀分布，其概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}, & 0\leqslant x\leqslant 5,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

由于 X 与 Y 之间互不影响，可认为相互独立，于是可得(X,Y) 的概率密度为

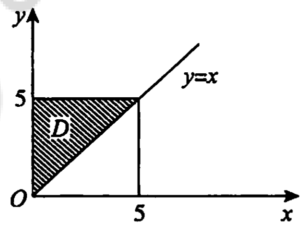
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{125}(5-y), & 0\leqslant x\leqslant 5,0\leqslant y\leqslant 5,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

事件“旅客能乘上火车” 可以表示为“$Y>X$”，也就是“$0<Y-X\leqslant 5$”，因此问题归结为求“$0<Y-X\leqslant 5$” 的概率，即如图所示的阴影部分. 于是，所求概率为

$$P\{0<Y-X\leqslant 5\}=\iint\limits_{0<y-x\leqslant 5}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}\frac{2}{125}(5-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^5\mathrm{d}x\int_x^5\frac{2}{125}(5-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}.$$



8. 答　应选(D).

解
$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x=0,$$

$$E(X\mid X\mid)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mid x\mid f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mid x\mid\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x=0,$$

于是，$\mathrm{Cov}(X,\mid X\mid)=E(X\mid X\mid)-EX\cdot E\mid X\mid=0$，所以 X 与 $\mid X\mid$ 不相关.

$$P\{X\leqslant 1\}=\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}e^{-1}<1,$$

$$P\{\mid X\mid\leqslant 1\}=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x=1-e^{-1}>0,$$

$$P\{X\leqslant 1,\mid X\mid\leqslant 1\}=P\{\mid X\mid\leqslant 1\}\neq P\{X\leqslant 1\}\cdot P\{\mid X\mid\leqslant 1\},$$

所以 X 与 $\mid X\mid$ 不独立.

9. 答　应选(A).

解　$DA_2=D\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\cdot nD(X^2)=\dfrac{D(X^2)}{n}$，而

$$X\sim N(0,\sigma^2)\Rightarrow\frac{X}{\sigma}\sim N(0,1)\Rightarrow\left(\frac{X}{\sigma}\right)^2=\frac{X^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1),$$

所以 $D\left(\dfrac{X^2}{\sigma^2}\right)=2$，进而 $D(X^2)=2\sigma^4$，所以 $DA_2=\dfrac{D(X^2)}{n}=\dfrac{2\sigma^4}{n}$，选(A).

10. **(数学一) 答** 应选(A).

解 因为简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的任何不含未知参数的函数即统计量都是 μ 的估计量，X_1 是随机样本的函数且不含未知参数，因而 X_1 是 μ 的估计量，又因为 $E(X_1)=\mu$，所以 X_1 是 μ 的无偏估计量，故(A) 的结论正确.

> **【注】** 在总体分布未知时，无法求出最大似然估计，因而(B) 不正确，而 X_1 与 n 无关，无法研究 $n\to\infty$ 的情况，所以(C) 也不正确.

(数学三) 答 应选(B).

解 由已知得 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，所以 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$. 又由 $\dfrac{nS_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，且 S_2^2 与 $\overline{X}$ 相互

独立，故由 t 分布的构成知 $\dfrac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{nS_2^2}{\sigma^2(n-1)}}}\sim t(n-1)$，即 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}\sim t(n-1)$，故选(B).

> **【注】** 本题主要考查 t 分布的构成. 注意 t 分布的构成中要求分子的随机变量(服从正态分布)与分母的随机变量(根号内为 χ^2 分布除以自由度)相互独立，而本题的 S_3^2,S_4^2 与 $\overline{X}$ 没有"独立"的结论，故(C)，(D) 不可选$\left(\text{当然也可从自由度上看出，因为}\dfrac{(n-1)S_3^2}{\sigma^2}=\dfrac{nS_4^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)\right)$. 若用 S_1^2，有 $\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，$S_1^2$ 与 $\overline{X}$ 也独立，但根据 t 分布的构成得 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，与(A) 不符.

二、填空题

11. **答** 应填 $\dfrac{3}{10}$.

解 $$\frac{1}{3}=P(\overline{B}\mid A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)-\frac{1}{5}}{P(A)}\Rightarrow P(A)=\frac{3}{10},$$

$$\frac{4}{7}=P(B\mid\overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\frac{P(B)-\frac{1}{5}}{1-\frac{3}{10}}\Rightarrow P(B)=\frac{3}{5},$$

于是 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\dfrac{3}{10}$.

12. 答　应填 $1-\mathrm{e}^{-2}$.

解　X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 于是所求方程无实根的概率

$$p=P\{(4X)^2-4\cdot 4\cdot(X+2)<0\}=P\{X^2-X-2<0\}=P\{-1<X<2\}$$

$$=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-2}.$$

13. 答　应填 $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-\frac{1}{25}(1-\mathrm{e}^{-25}) & \frac{1}{25}(1-\mathrm{e}^{-25})\end{pmatrix}$.

解

$$P\{Z=1\}=P\{X\leqslant Y\}=\iint\limits_{x\leqslant y}f_X(x)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^5\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\frac{1}{5}\cdot 5\mathrm{e}^{-5y}\mathrm{d}y=\int_0^5\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x}\mathrm{d}x=\frac{1}{25}(1-\mathrm{e}^{-25}),$$

从而 $P\{Z=0\}=1-P\{Z=1\}=1-\frac{1}{25}(1-\mathrm{e}^{-25})$，于是 Z 的分布律为

$$Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-\frac{1}{25}(1-\mathrm{e}^{-25}) & \frac{1}{25}(1-\mathrm{e}^{-25})\end{pmatrix}.$$

14. 答　应填 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma$.

解　方法一

$$E\mid X-a\mid=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mid x-a\mid \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令\frac{1}{\sigma}(x-a)=t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma\mid t\mid \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma.$$

方法二　设 $Y\sim N(0,1)$，则 $E\mid Y\mid=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$. 又 $\frac{X-a}{\sigma}\sim N(0,1)$，则有 $E\left(\left|\frac{X-a}{\sigma}\right|\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$，从而 $E\mid X-a\mid=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma$.

15. 答　应填 0.7.

解　$P\{F>a\}=0.3$，于是常数 $a=F_{0.3}(n,n)$，根据“$F_\alpha(m,n)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$”，知 $\frac{1}{a}=\frac{1}{F_{0.3}(n,n)}=F_{0.7}(n,n)$，于是 $P\left\{F>\frac{1}{a}\right\}=P\{F>F_{0.7}(n,n)\}=0.7$.

16. 答　应填 $\frac{\theta^2}{5n}$.

解 $$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\theta} \frac{6x^2}{\theta^3}(\theta - x)\mathrm{d}x = \frac{\theta}{2}.$$

记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，由 $\frac{\theta}{2} = \overline{X}$，得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$. 由于

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\theta} \frac{6x^3}{\theta^3}(\theta - x)\mathrm{d}x = \frac{3\theta^2}{10},$$

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{3\theta^2}{10} - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{20},$$

因此 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ 的方差为 $D\hat{\theta} = D(2\overline{X}) = 4D\overline{X} = \frac{4}{n}DX = \frac{\theta^2}{5n}$.

三、解答题

17. 解 (1) $$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 cx(1-x)\mathrm{d}x = c\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$

$$= c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{c}{6},$$

故 $c = 6$. ……2 分

(2) $$P\left\{|X| \leqslant \frac{1}{2}\right\} = P\left\{-\frac{1}{2} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} 6x(1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$ ……3 分

$$P\left\{X = \frac{1}{2}\right\} = 0,$$ ……4 分

$$P\left\{X \geqslant \frac{1}{3}\right\} = \int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{3}}^{1} 6x(1-x)\mathrm{d}x = \frac{20}{27}.$$ ……5 分

(3) $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

当 $x < 0$ 时，$F(x) = 0$；

当 $0 \leqslant x < 1$ 时，$F(x) = \int_0^x 6t(1-t)\mathrm{d}t = 3x^2 - 2x^3$； ……6 分

当 $x \geqslant 1$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_0^1 6t(1-t)\mathrm{d}t + \int_1^x 0\mathrm{d}t = 1$.

故 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 3x^2 - 2x^3, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$ ……8 分

(4) $y = 2x - 1(0 < x < 1)$ 的反函数为 $x = \frac{y+1}{2}(-1 < y < 1)$，于是

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left(\frac{y+1}{2}\right)\cdot\left|\left(\frac{y+1}{2}\right)'\right|=6\cdot\frac{y+1}{2}\left(1-\frac{y+1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}(1-y^2), & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

……10 分

18. 解 (1) 由于 $\iint\limits_G kx^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}kx^2y\mathrm{d}x=k\cdot\frac{2}{15}=1$，故 $k=\frac{15}{2}$. ……2 分

(2) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-x}^{1}\frac{15}{2}x^2y\mathrm{d}y, & -1<x\leqslant 0,\\ \int_{x}^{1}\frac{15}{2}x^2y\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

故 $$f_X(x)=\begin{cases}\frac{15}{4}x^2(1-x^2), & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$ ……4 分

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-y}^{y}\frac{15}{2}x^2y\mathrm{d}x=5y^4, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$ ……5 分

(3) 当 $0<y<1$ 时 $f_Y(y)=5y^4>0$. 在 $Y=y$ 条件下，X 的值域为 $[-y,y]$，

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{\frac{15}{2}x^2y}{5y^4}=\frac{3x^2}{2y^3}, & -y\leqslant x\leqslant y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$ ……6 分

(4) 由于 $$f_{X|Y}\left(x\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}12x^2, & -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故 $$P\left\{X>\frac{1}{4}\,\middle|\,Y=\frac{1}{2}\right\}=\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty}f_{X|Y}\left(x\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}12x^2\mathrm{d}x=\frac{7}{16}.$$ ……8 分

同理有 $$f_{X|Y}\left(x\,\middle|\,\frac{1}{4}\right)=\begin{cases}96x^2, & -\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{4},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得 $$P\left\{X<\frac{1}{2}\,\middle|\,Y=\frac{1}{4}\right\}=\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}f_{X|Y}\left(x\,\middle|\,\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}96x^2\mathrm{d}x=1.$$ ……10 分

(5) **方法一** 记 $B=\left\{(x,y)\,\middle|\,y<\frac{1}{2}\right\}$. 故 $B\cap G=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|<y<\frac{1}{2}\right\}$，

$$P\left\{Y<\frac{1}{2}\right\}=\iint\limits_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{B\cap G}\frac{15}{2}x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}\frac{15}{2}x^2y\mathrm{d}x=\frac{1}{32}.$$

……12 分

方法二 由 (2) 可得

$$P\left\{Y<\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}} 5y^4\mathrm{d}y=\frac{1}{32}.$$ ……12 分

19. 解　$Z=2X+Y$ 是独立正态随机变量线性组合，故仍服从正态分布.

$$EZ=2EX+EY=0, DZ=4DX+DY=5,$$

所以 $Z=2X+Y\sim N(0,5)$.

(1) $f_Z(z)=\dfrac{1}{\sqrt{10\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{10}}, -\infty<z<+\infty$. ……4 分

(2) $P\{|Z|<\sqrt{5}\}=P\left\{\left|\dfrac{Z}{\sqrt{5}}\right|<1\right\}=2\Phi(1)-1=2\times 0.8413-1=0.6826$. ……6 分

(3) $D|Z|=E(|Z|^2)-(E|Z|)^2=E(Z^2)-(E|Z|)^2$. 因为 $E(Z^2)=DZ=5$,

$$E|Z|=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{10}}|z|\mathrm{d}z=\frac{2}{\sqrt{10\pi}}\int_0^{+\infty}z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{10}}\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{10}{\pi}},$$

所以 $$D(|2X+Y|)=5-\frac{10}{\pi}.$$ ……8 分

(4) $W=Z^2$ 定义域为 $(0,+\infty)$. 当 $w\geqslant 0$ 时,

$$F_W(w)=P\{W\leqslant w\}=P\{Z^2\leqslant w\}=P\{-\sqrt{w}\leqslant Z\leqslant\sqrt{w}\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}\int_{-\sqrt{w}}^{\sqrt{w}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{10}}\mathrm{d}z;$$

当 $w<0$ 时, $F_W(w)=0$. ……10 分

对 $F_W(w)$ 求导得到 W 的概率密度为

$$f_W(w)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{10\pi w}}\mathrm{e}^{-\frac{w}{10}}, & w>0,\\ 0, & w\leqslant 0.\end{cases}$$ ……12 分

20. 解　(1) Z_1 的分布函数为

$$F_{Z_1}(z)=P\{Z_1\leqslant z\}=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}$$
$$=P\{X\leqslant z, Y\leqslant z\}$$
$$=P\{X\leqslant z\}P\{Y\leqslant z\},$$ ……2 分

当 $a\leqslant z\leqslant b$ 时,

$$F_{Z_1}(z)=\frac{z-a}{b-a}\cdot\frac{z-a}{b-a}=\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^2;$$

当 $z<a$ 时, $F_{Z_1}(z)=0$;

当 $z\geqslant b$ 时, $F_{Z_1}(z)=1$.

$$F_{Z_1}(z)=\begin{cases}0, & z<a,\\ \left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)^2, & a\leqslant z\leqslant b,\\ 1, & z>b.\end{cases}$$ ……5 分

从而，Z_1 的概率密度为

$$f_{Z_1}(z)=\begin{cases}\dfrac{2(z-a)}{(b-a)^2}, & a\leqslant z\leqslant b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$ ……6 分

(2)Z_2 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_{Z_2}(z)&=P\{Z_2\leqslant z\}=1-P\{Z_2>z\}\\&=1-P\{\min\{X,Y\}>z\}\\&=1-P\{X>z,Y>z\}\\&=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}\\&=1-[1-P\{X\leqslant z\}]^2\end{aligned}$$ ……8 分

$$=\begin{cases}0, & z<a,\\ 1-\left(1-\dfrac{z-a}{b-a}\right)^2, & a\leqslant z\leqslant b,\\ 1, & z>b,\end{cases}$$ ……10 分

从而 Z_2 的概率密度为

$$f_{Z_2}(z)=\begin{cases}\dfrac{2(b-z)}{(b-a)^2}, & a\leqslant z\leqslant b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$ ……12 分

21.证 (1) $$\overline{X}_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}X_i=\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{n}X_{n+1}\right)$$ ……2 分

$$=\frac{n}{n+1}\overline{X}_n+\frac{1}{n+1}X_{n+1}$$ ……3 分

$$=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\overline{X}_n+\frac{1}{n+1}X_{n+1}$$

$$=\overline{X}_n+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n).$$ ……4 分

(2) 由(1)有

$$S_{n+1}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}(X_i-\overline{X}_{n+1})^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}\left[X_i-\overline{X}_n-\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)\right]^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}\left[(X_i-\overline{X}_n)^2+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2(X_{n+1}-\overline{X}_n)^2-2(X_i-\overline{X}_n)\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)\right]$$

……6 分

$$=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2+(X_{n+1}-\overline{X}_n)^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\frac{2}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)\sum_{i=1}^{n+1}(X_i-\overline{X}_n)\right]$$

……8 分

$$=\frac{n-1}{n}S_n^2+\frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+1}\right](X_{n+1}-\overline{X}_n)^2$$

$$=\frac{n-1}{n}S_n^2+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)^2.$$ ……12 分

22. 解　先求似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{|\theta|}, & \theta\leqslant x_i\leqslant\theta+|\theta|,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{|\theta|^n}, & \theta\leqslant x_i\leqslant\theta+|\theta|,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$ ……4 分

(1) 若 $\theta<0$，即 θ 的取值范围为 $(-\infty,0)$，

$$L=\begin{cases}\dfrac{1}{|\theta|^n}, & \theta\leqslant x_i\leqslant 0,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

可见欲使 L 达最大，须在 $\theta\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$ 的限制下让 $|\theta|$ 达最小，即 θ 达最大（因为 $|\theta|=-\theta$），故 $\hat{\theta}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$. ……8 分

(2) 若 $\theta>0$，即 θ 的取值范围为 $(0,+\infty)$，

$$L=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & \theta\leqslant x_i\leqslant 2\theta,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

可见欲使 L 达最大，须在 $\theta\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}\leqslant 2\theta$ 的限制下，让 θ 达最小，θ 最小只能取 $\frac{1}{2}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$，即 $\hat{\theta}=\frac{1}{2}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$. ……12 分