2021-2022-2 空间解析几何期末试题(A)卷答案

（各题所答方法若有不同，可酌情给分.）

一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 设$ABCDEF$为正六边形，求向量$\overrightarrow{DF}$在仿射坐标系$[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}]$上的坐标

$(-2,-1)$;

2. 在证明两条异面直线的公垂线存在且唯一时，公式

$[\overrightarrow{v_1}\times(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})]\times[\overrightarrow{v_2}\times(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})]=|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}|^2(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})$在证明过程中的作用是什么？

用来刻画异面直线的公垂线的方向向量

3. 已知一个点P, 以及三个向量$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}$满足

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} & \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2} & \overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_2} & \overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_3} \end{vmatrix}\neq 0$$

则这三个向量与点P可以构成一个仿射坐标系$[P;\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}]$, 为什么？

因为$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}$是不共面的三个向量;

4. 写出平面直角坐标系oxy中的平面曲线$xy=2$绕它的一条渐近线旋转而成的曲面在空间直角坐标系oxyz中的方程

绕x轴得$x^2(y^2+z^2)=4$或绕y轴得$y^2(x^2+z^2)=4$;

5. 写出马鞍面的直母线的一般方程

不妨设马鞍面$\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z(p、q>0)$，则它的直母线族是

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)+2\lambda=0\\ z+\lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=0\end{cases} \text{和} \begin{cases}\lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)+z=0\\ 2\lambda+\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=0\end{cases} \text{(其中}\lambda\text{取遍所有实数)}$$

6. 已知直角坐标系中的两个平面$3x+2y-6z-1=0$与$2x-y+2z-3=0$构成的二面角内含有点$M_0(1,2,-3)$, 写出这个二面角的角平分面方程

$23x-y-4z-24=0$;

7. 已知仿射坐标系$I:oxyz$中三个平面$3x+2y-2z+1=0, 2x+y-z-2=0$, $x-2y+z+2=0$分别对应仿射坐标系$I':o'x'y'z'$中的三个坐标面$o'x'y'$, $o'y'z'$, $o'z'x'$, 且仿射坐标系$I':o'x'y'z'$中的点$(4,4,4)$是仿射坐标系$I:oxyz$中的原点O, 写出I到I'的点的坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ -4 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\15\\23\end{pmatrix} \text{或}I'\text{到}I\text{的点的坐标变换公式}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 12 & 8 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix};$$

8. 已知一个圆锥面顶点为$Q_0(1,2,4)$，轴与平面$2x+2y+z=0$垂直且经过点$Q_1(3,2,1)$.写出求解这个圆锥面的方程的主要方程组.（注意交代好所用的记号的含义，省略计算结果.）

设$M(x,y,z)$是圆锥面上任意一个点,$\vec v=(2,2,1)$,则$\left|\cos<\overrightarrow{Q_0M},\vec v>\right|=\left|\cos<\overrightarrow{Q_0Q_1},\vec v>\right|$

即$\dfrac{\left|\overrightarrow{Q_0M}\cdot\vec v\right|}{\left|\overrightarrow{Q_0M}\right|\left|\vec v\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{Q_0Q_1}\cdot\vec v\right|}{\left|\overrightarrow{Q_0Q_1}\right|\left|\vec v\right|}$即$\dfrac{|2(x-1)+2(y-2)+(z-4)|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}}=\dfrac{|2(3-1)+2(2-2)+(1-4)|}{\sqrt{(3-1)^2+(2-2)^2+(1-4)^2}}$;

9. 在右手平面直角坐标系oxy中做一个同定向的转轴变换可使得二次曲线$4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$的交叉项xy的系数变为0，写出这个转轴变换

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{-1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$;

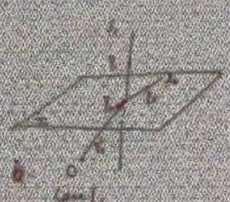
10. 写出使得在右手平面直角坐标系oxy中的二次曲线$\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0$是一对虚平行线时，不变量和半不变量需要满足的条件

$I_2=I_3=0,K_1>0$.

二、本题 12 分

在给定的直角坐标系中，求经过点P_0，且与直线$\vec r=\vec r_1+k\vec u$正交的直线方程.

解：设O是给定的直角坐标系的坐标原点，已知直线$\vec r=\vec r_1+k\vec u$记为l_1，其中$\vec r_1=\overrightarrow{OP_1}$，再记所求直线为$l_0$：$\vec r=\vec r_0+k\vec v(\vec v\neq0)$，其中$\vec r_0=\overrightarrow{OP_0}$，下面只要求出直线$l_0$的方向向量$\vec v$即可.



*Caes*1.若P_0恰好是直线l_1上的点，这时直线l_0与l_1相互垂直且交于P_0

于是过P_0且以l_1为法线做一个平面$\pi:(\vec r-\vec r_0)\cdot\vec u=0$,则所求直线$l_0$有无穷多条，形如$\vec r=\vec r_0+k(\vec r_2-\vec r_0)$，其中$\vec r_2$是平面$\pi:(\vec r-\vec r_0)\cdot\vec u=0$的任意一个不等于$\vec r_0$的解.

*Caes*2.若P_0是直线l_1外一点，这时设直线l_0与l_1相互垂直交于P_2，记$\vec r_2=\overrightarrow{OP_2}$，于是$(\vec r_2-\vec r_0)\cdot\vec u=0$，且$\vec r_2=\vec r_1+k_2\vec u$.

4 分

于是,$0=(\vec r_2-\vec r_0)\cdot\vec u=(\vec r_1-\vec r_0)\cdot\vec u+k_2\vec u\cdot\vec u$,得$k_2=\dfrac{(\vec r_0-\vec r_1)\cdot\vec u}{\left|\vec u\right|^2}$.

$\therefore\vec r_2=\vec r_1+\dfrac{(\vec r_0-\vec r_1)\cdot\vec u}{\left|\vec u\right|^2}\vec u$.

4 分

取 $\vec{r}_1-\vec{r}_0$ 为直线 l_0 的方向向量，得 l_0: $\vec{r}=\vec{r}_0+k\left(\vec{r}_1-\vec{r}_0+\dfrac{\left((\vec{r}_0-\vec{r}_1)\cdot\vec{n}\right)}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\right)$ 4分

(注：此题若没有考虑 Case1 的情形不扣分，
若考虑了 Case1 但 Case2 做错了，最多得 6 分.)

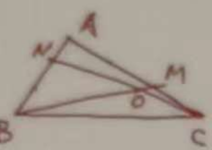
三、本题 12 分

在 $\triangle ABC$ 中，M,N 分别是边 AC,AB 上的点，并且 $\overrightarrow{CM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}$，

$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，设 BM 与 CN 交于点 O. 证明：$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{7}\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{ON}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{CN}$.

证明：建立仿射坐标系 $[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$，则 $B(1,0)$，$C(0,1)$. 记 $O(x_0,y_0)$.

$\because CM=\dfrac{1}{3}CA, AN=\dfrac{1}{3}AB, \therefore \overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \therefore M(0,\dfrac{2}{3}), N(\dfrac{1}{3},0).$ 4分



$\because C(0,1), O(x_0,y_0), N(\dfrac{1}{3},0)$ 三点共线，同时 $B(1,0), O(x_0,y_0), M(0,\dfrac{2}{3})$ 三点共线

$$\therefore \begin{vmatrix} 0 & x_0 & \frac{1}{3} \\ 1 & y_0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ 及 } \begin{vmatrix} 1 & x_0 & 0 \\ 0 & y_0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,\ \text{即} \begin{cases} x_0+\frac{1}{3}y_0-\frac{1}{3}=0 \\ \frac{2}{3}x_0+y_0-\frac{2}{3}=0 \end{cases},\ \text{得} x_0=\frac{1}{7}, y_0=\frac{4}{7}, \text{即} O(\frac{1}{7},\frac{4}{7}).$$ 4分

$\therefore \overrightarrow{OM}=(0,\dfrac{2}{3})-(\dfrac{1}{7},\dfrac{4}{7})=(-\dfrac{1}{7},\dfrac{2}{21}), \overrightarrow{BM}=(0,\dfrac{2}{3})-(1,0)=(-1,\dfrac{2}{3}),$

$\overrightarrow{ON}=(\dfrac{1}{3},0)-(\dfrac{1}{7},\dfrac{4}{7})=(\dfrac{4}{21},-\dfrac{4}{7}), \overrightarrow{CN}=(\dfrac{1}{3},0)-(0,1)=(\dfrac{1}{3},-1)$

$\therefore \overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{7}\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{ON}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{CN}.$ 4分

四、本题 12 分

证明直角坐标系中的二次曲面 $(x-2y+z)^2+3(x-z)^2-4=0$ 是圆柱面，并求出它的母线方向和平面圆线做的准线.

证明：$\because x-2y+z=\sqrt{6}(\dfrac{1}{\sqrt{6}}x-\dfrac{2}{\sqrt{6}}y+\dfrac{1}{\sqrt{6}}z), x-z=\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}z)$

且 $(\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}})\cdot(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}})=0$

$\therefore$ 令 $\vec{e_1}'=(\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}), \vec{e_2}'=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}), \vec{e_3}'=\vec{e_1}'\times\vec{e_2}'=(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}),$

$$\text{令} \begin{cases} x'=\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{2}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z \\ y'=\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}z \\ z'=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z \end{cases},\ \text{即} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$ 4分

这时二次曲面$(x-2y+z)^2+3(x-z)^2-4=0$在新的右手直角坐标系

$[O;\vec{e_1}',\vec{e_2}',\vec{e_3}']$中的方程为$(\sqrt{6}x')^2+3(\sqrt{2}y')^2-4=0$,即$x'^2+y'^2=\dfrac{2}{3}$ ∴是圆柱面. 4分

$\pm\vec{e_3}'$是它的母线方向, $\begin{cases}x'^2+y'^2=\dfrac{2}{3}\\ z'=0\end{cases}$是准线, 在原$[O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}]$系下,

圆柱面的母线方向是$\pm(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})$,

准线方程是$\begin{cases}(x-2y+z)^2+3(x-z)^2-4=0\\ x+y+z=0\end{cases}$. 4分

五、画图题, 本题12分

画出空间曲线

$\begin{cases}x^2+y^2-z^2=0\\ 2x-z^2+3=0\end{cases}$(注意要保留必要的图形分析和作图痕迹.)

解: 图形准确 4分

必要作图痕迹 4分

必要的图形分析 4分

具体如下:

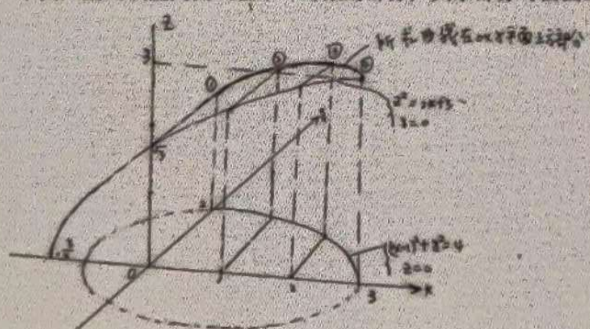
由曲线的方程知$|x|\le|z|,|y|\le|z|$.

空间曲线在oxy平面的投影的方程是$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\ z=0\end{cases}$;

空间曲线在ozx平面的投影的方程是$\begin{cases}2x-z^2+3=0\\ y=0\end{cases}$(其中$-1\le x\le3$);

曲线关于oxy平面对称, 同时曲线也关于oxz平面对称, 故为了简洁,

下面只画出该空间曲线在第一卦限的部分, 其余部分可由曲线的对称性得到.



六、综述题, 本题12分

已知在直角坐标系oxyz中的二次曲面的一般方程是$a_{11}x^2++a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0$, 结合所学的第五章二次曲线的分类办法, 推广之, 你会怎样着手对二次曲面分类? (字数不限)

答: 论述思想能合理的结合平面二次曲线的分类方法 4分

给出了二次曲面有五大类: 椭球面、双曲面、抛物面、二次锥面、二次柱面 4分

内容丰满、有个人观点 4分