2023-2024-2空间解析几何A答案.pdf

中央财经大学 2023—2024 学年第二学期

《空间解析几何》试卷(A)答案

装 订 线

(答题方法不同酌情给分)

一、 填空题（共 6 小题；第 1 至第 4 小题每题 3 分；第 5 至第 6 小题每题 4 分；共 20 分，将答案写在横线上）

1. 在直角坐标系下平面二次曲线的不变量及半不变量分别是 $I_1=2\lambda, I_2=\lambda^2-1$, $I_3=5(\lambda+\frac{3}{5})(\lambda-1), K_1=2(5\lambda-1)$, 则当参数 λ 取值为 $-1<\lambda<1$, 且 $\lambda\neq-\frac{3}{5}$ 时，该二次曲线是双曲线.

2. 在右手直角坐标系 $[O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}]$ 中的柱面 $f(2x+y-3z,x-2y)=0$ 的母线的方向向量是 $k(6,3,5)(k\neq0)$.

3. 写出直线 $\begin{cases}x+y-1=0\\z=0\end{cases}$ 与直线 $\begin{cases}x-z-1=0\\2y+z-2=0\end{cases}$ 的公垂线的点向式标准方程 $\frac{x+\frac{1}{3}}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-\frac{1}{3}}{-1}$.

4. 已知在平面直角坐标系中方程 $4x^2+8xy+4y^2+13x+3y+4=0$ 表示的是一条抛物线，则 $z=4x^2+8xy+4y^2+13x+3y+4$ 是抛物柱面形状的二次曲面.

5. 在仿射坐标系中，直线 l 平行于平面 $3x-y+2z-1=0$, 且该直线 l 过点 $(0,0,-2)$, 并与直线 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$ 相交，则该直线的点向式标准方程是 $\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$.

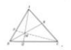
6. 在直角坐标系中的点 $(1,2,-3)$ 位于平面 $\pi_1:2x-y+2z-3=0$ 和平面 π_2: $3x+2y-6z-1=0$ 构成的一个二面角中，则该二面角的角平分面方程是 $23x-y-4z-24=0$.

姓名＿＿＿＿＿＿班级＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	阅卷人
得 分												

二、(本题 12 分)

证明切瓦Ceva定理：设点 P,Q,R 分别内分 ΔABC 的边 AB,BC,CA 成定比 λ, μ, ν, 如下图，证明三线 AQ,BR,CP 共点的充要条件是 $\lambda\mu\nu=1$.



证明：建仿射坐标系 $[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$, 则各点坐标分别为 $A(0,0),B(1,0),C(0,1)$, $P(\frac{\lambda}{1+\lambda},0),Q(\frac{1}{1+\mu},\frac{\mu}{1+\mu}),R(0,\frac{1}{1+\nu})$. ....3分（建坐标系）

设 AQ,BR 相交于点 $M(x,y)$, 且 M 分 AQ,BR 成定比 k,l,

则 $x=\frac{k\frac{1}{1+\mu}}{1+k}=\frac{1}{1+l}, y=\frac{k\frac{\mu}{1+\mu}}{1+k}=\frac{l\frac{1}{1+\nu}}{1+l}$. ....3分（定比分点概念）

$\therefore x=\frac{1}{1+\mu(1+\nu)}, y=\frac{\mu}{1+\mu(1+\nu)}$. ....3分（计算准确）

三线 AQ,BR,CP 共点 $\Leftrightarrow$ 三点 C,M,P 共线

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{1+\mu(1+\nu)} & \frac{\lambda}{1+\lambda}\\ 1 & \frac{\mu}{1+\mu(1+\nu)} & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{-1+\lambda\mu\nu}{(1+\lambda)[1+\mu(1+\nu)]}=0$$

$\Leftrightarrow\lambda\mu\nu=1$. ....3分（三点共线条件）

三、(本题 10 分)

求准线为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\2x^2+2y^2+z^2=2\end{cases}$, 母线的方向向量为 $(-1,0,1)$ 的柱面方程.

解：$\forall M(x,y,z)\in$ 该柱面

$\Leftrightarrow\exists M_0(x_0,y_0,z_0)\in$ 准线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\2x^2+2y^2+z^2=2\end{cases}$, 使得 $M(x,y,z)$ 落在穿过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的母线上. 4分

即 $\begin{cases}x_0^2+y_0^2+z_0^2=1\\2x_0^2+2y_0^2+z_0^2=2\\x=x_0-t\\y=y_0\\z=z_0+t\end{cases}$ 4分

$\Leftrightarrow(x+z)^2+y^2=1$ 2分

四、(本题 10 分)

求马鞍面 $z=xy$ 的两族直母线方程，并求出过点 $(1,1,1)$ 的两条直母线的点向式标准方程.

解：$z=xy$ 的直母线族分别为

$\begin{cases}\lambda x+z=0\\\lambda+y=0\end{cases}(\lambda\in R)$ 3分

或

$\begin{cases}\lambda y+z=0\\\lambda+x=0\end{cases}(\lambda\in R)$ 3分

过点 $(1,1,1)$ 的两条直母线的方程分别是

$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$ 2分

和

$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$ 2分

五、(本题 12 分)

在右手直角坐标系 $oxyz$ 中利用直角坐标变换把二次曲面 $z=xy-x-y-2$ 变成标准型，并指出该二次曲面的类型.

解：先做转轴坐标变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$ 3分

原方程变换成 $z'=\frac{1}{2}(y'-\sqrt2)^2-\frac{1}{2}x'^2-3$. 2分

再做移轴变换 $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\sqrt2\\-3\end{pmatrix}$ 3分

原方程变换成 $2z^*=y^{*2}-x^{*2}$. 2分

该二次曲面是马鞍面. 2分

方法二：$z=(x-1)(y-1)-3$

先做移轴变换 $\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$ 3分

原方程变换成 $z^*=x^*y^*$. 2分

再做转轴坐标变换

$$\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$ 3分

原方程变换成 $2z'=-x'^2+y'^2$. 2分

该二次曲面是马鞍面. 2分

六、(本题 12 分)

设直线 l_1,l_2 是两条互不垂直的异面直线，恰当建立直角坐标系求出在该直角坐标系下 l_1 绕 l_2 旋转所得的旋转曲面方程.

解：设直线 l_1,l_2 距离为 a, 建立右手直角坐标系，使得 x 轴是 l_1,l_2 的公垂线，z 轴是 l_2, 公垂线段的端点坐标是 $(0,0,0),(a,0,0)$. 2分

记 l_1 的方向向量是 (t,m,n).

由 l_1 垂直于 x 轴，但 l_1 不垂直于 l_2 得 $(t,m,n)\cdot(1,0,0)=0$ 及 $(t,m,n)\cdot(0,0,1)\neq0$,

$\therefore t=0,n\neq0\therefore l_1$ 的方向向量是 $(t,m,n)=n(0,\frac{m}{n},1)=n(0,b,1)$,

又 l_1,l_2 是异面的 $\therefore l_1$ 与 l_2 不共线，即 $(0,b,1)$ 与 $(0,0,1)$ 不共线 $\therefore b\neq0$.

$\therefore(0,b,1)(b\neq0)$ 可以为 l_1 的方向向量. 2分

$\therefore l_1$ 的方程为 $\frac{x-a}{0}=\frac{y}{b}=\frac{z}{1}$. 2分

$\therefore$ 点 $M(x,y,z)\in$ 旋转曲面

$\Leftrightarrow\exists M_0(x_0,y_0,z_0)\in l_1, M(x,y,z)\in M_0(x_0,y_0,z_0)$ 绕 l_2 旋转所得的纬圆上

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x_0-a}{0}=\frac{y_0}{b}=\frac{z_0}{1}\\x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2\\(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(0,0,1)=0\end{cases}$$ 4分

$\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{a^2b^2}=1$(是旋转单叶双曲面). 2分

七、作图题（共 2 题，每小题 12 分，共 24 分）

（本题所涉坐标系均是直角坐标系，要求画图保留作图痕迹.）

1. 先用不等式组表示曲面 $x^2+y^2=4z, x+y=1, x=0, y=0, z=0$ 围成的第一卦限的空间区域，且该区域包含点 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{64})$；再画出这个区域.

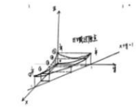
解：

$$\begin{cases}x^2+y^2\geq4z\\x+y\leq1\\x\geq0\\y\geq0\\z\geq0\end{cases}$$ 6分

所围区域的面与面的交线有6条：

$\begin{cases}x+y=1\\z=0\end{cases},\begin{cases}y=1\\x=0\end{cases},\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases},\begin{cases}x^2=4z\\y=0\end{cases},\begin{cases}y^2=4z\\x=0\end{cases},\begin{cases}x+y=1\\x^2+y^2=4z\end{cases}$,

其中 $\begin{cases}x+y=1\\x^2+y^2=4z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\(x-\frac{1}{2})^2=2(z-\frac{1}{8})\end{cases}$ 4分



..........2分

2. 利用直角坐标变换把平面二次曲线 $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$ 的方程变成标准型，要求：写出坐标变换公式，并在原直角坐标系中画出此曲线.

解：$c\tan2\theta=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=\frac{1-1}{-2}=0,\therefore\tan\theta=\pm1$. 不妨取 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

做转轴变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$ 2分

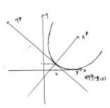
把原方程变换为 $2y'^2-8\sqrt2x'+2\sqrt2y'+25=0$. 2分

再做移轴变换 $\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ 2分

把上述方程变换为 $y^{*2}=4\sqrt2x^*$. 2分

综上，点的坐标变换公式为 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

..........2分



..........2分

方法二：$A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, 计算 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1\\1&\lambda-1\end{vmatrix}=0$

得 $\lambda_1=0,\lambda_2=2$.

考虑 $(\lambda_1E-A)\eta=0$ 即 $\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$,

得相应的一个单位特征向量 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$.

考虑 $(\lambda_2E-A)\eta=0$ 即 $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$,

得相应的一个单位特征向量 $\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$.

做转轴变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$ 2分

把原方程变换为 $2y'^2-8\sqrt2x'+2\sqrt2y'+25=0$. 2分

再做移轴变换 $\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ 2分

把上述方程变换为 $y^{*2}=4\sqrt2x^*$. 2分

综上，点的坐标变换公式为 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

..........2分

图 2分