启航教育 云图 2023版

张宇数学教育系列丛书·一

张宇考研数学基础30讲

主编 张宇

【线性代数分册】

北京理工大学出版社

启航教育 云图 YUN TU

张宇考研数学基础30讲

【线性代数分册】

主编 张宇

张宇数学教育系列丛书编委（按姓氏拼音排序）

蔡燧林 陈静静 方春贤 高昆轮 胡金德 贾建厂 李志龙 刘硕
柳叶子 吕倩 秦艳鱼 沈利英 史明洁 石臻东 王慧珍 王燕星
吴金金 徐兵 严守权 亦一（笔名） 曾凡（笔名） 张乐 张青云 张婷婷
张宇 郑利娜 朱杰

北京理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学基础 30 讲. 线性代数分册/张宇主编. —北京:北京理工大学出版社,2021.8

ISBN 978-7-5763-0210-3

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学-研究生入学考试-自学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 167786 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68944723(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 9
字　　数 / 225 千字
版　　次 / 2021 年 8 月第 1 版　2021 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 / 49.80 元

责任编辑 / 多海鹏
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 李志强

2023版前言

本书专供考研数学基础复习之用，在2023版中，做了较大幅度的修订：

一、更换例题72道，习题44道，配套《基础300题》，更换习题58道；

二、对知识的讲解进行了修改、补充及润色；

三、分成三个分册，即高等数学分册、线性代数分册和概率论与数理统计分册。

本书自出版以来，承蒙读者厚爱，在考研数学基础复习的阶段起到了一定的积极作用，略感欣慰的同时，亦让我压力倍增。

望各位不吝赐教，多提意见与建议，特此致谢！

张宇

二〇二一年八月于北京

2022版前言

这本书是专门供学生考研数学基础复习之用的。之所以叫《张宇考研数学基础 30 讲》，是因为将考研数学中的全部基础知识系统化和科学化地分成了 30 个部分，希望考生一讲一讲地学，一关一关地过，最终建立起考研数学的基础知识结构，实现真正意义上的夯实基础。

一、这是真正意义上的考研数学基础教材

考研数学命题并没有指定教材，学生可以自行选择市面上的各种教材进行复习，但有一个专业问题：市面上的数学教材大多是为大学数学教学而编写的，依据的是《本科教学基本要求》，鲜见真正意义上按照《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》(简称《考试大纲》)编写的数学教材，尤其是基础教材，本书就是在多年一线考研辅导基础上做出的最新成果。

二、这是真正意义上的全程视频讲解

我全程讲解了这本书，并且将讲解视频做了两种系统。一种是整讲观看系统：扫描书中每一讲开篇的二维码，可以观看这一讲全部的视频讲解，使得知识具有完整性和连贯性，适合第一遍起步复习。另一种是逐点观看系统：扫描书中知识点旁的二维码，可以有针对性地观看对应这一知识点的视频讲解，适合第二遍查漏补缺，巩固知识。

三、这是基础课笔记

这是我在基础课上讲出来的笔记，学生可以听着课跟我一页一页地学，我把笔记写好了，你可以集中精力认真听，不需再记大量笔记，我几乎把要说的话一句一句都写出来了，请务必搞懂吃透。

四、这是课后作业

每讲后面的习题与附录《基础 300 题》作为课后作业，所有题目均有详细解答，课后务必及时落实。

五、这是答疑解惑

起步阶段的复习，很多学生会遇到各种问题和疑惑：知识理解上的问题，思路方法上的疑惑。本书集中回答并希望能够切实解决学生的各种问题和疑惑。

六、这是减负不是增负

不论你在读哪本数学教材，本书都可以作为思考总结的笔记，放在手边随时翻阅，基础阶段的知识、思路、题型和方法，皆会以清晰的结构呈现在你面前，把握在你手中。你若能再添砖加瓦，画龙点睛，将其内化为你自己的，那将是极妙的。

七、看到什么程度

一遍当然不够。反复修炼直至字字搞懂、句句通透并熟稔于心。

无水印版由【公众号：小盆学长】免费提供

感谢命题专家们给予的支持、帮助与指导，感谢编辑老师们的辛勤工作和无私奉献，感谢学生们的努力和信任。

本书是我多年基础阶段教学经验的总结，愿助潜心研读者打好地基、夯实基础，勇攀考研数学高峰。

张宇

目录

第 1 讲　行列式 …… 1

第 2 讲　矩阵 …… 21

第 3 讲　向量组 …… 49

第 4 讲　线性方程组 …… 68

第 5 讲　特征值与特征向量 …… 86

第 6 讲　二次型 …… 114

第1讲 行列式

基础知识结构

- 行列式的定义与性质
  - 本质定义（第一种定义）
  - 性质
  - 逆序数法定义（第二种定义）
  - 展开定理（第三种定义）
  - 几个重要的行列式
    - 主对角线行列式
    - 副对角线行列式
    - 拉普拉斯展开式
    - 范德蒙德行列式
- 行列式的计算
  - 具体型
    - 化为基本形
    - 递推法
    - 行列式表示的函数和方程
  - 抽象型
    - 用性质
    - 用公式$|AB|=|A||B|$
- 余子式与代数余子式的计算

基础内容精讲

一、行列式的本质定义（第一种定义）

大多数教材都是从“纯粹”的代数学角度来定义行列式的，较为抽象，难于理解和接受．我们先详细通俗地给出行列式的本质定义，并且告诉读者，我们将要开始的线性代数这门课程到底要学什么．

先看一个式子：$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$．我们称其为2阶行列式，其中$a_{ij}$的第一个下标$i$表示此元素所在的行

数，第二个下标 j 表示此元素所在的列数，$i=1,2,j=1,2$，于是此行列式中有四个元素，并且 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 这是一个什么样的计算规则？它背后有什么样的意义？

希望读者跟着我的思路走. 请你将此行列式的第 1 行的两个元素 a_{11},a_{12} 看成一个 2 维向量 $[a_{11},a_{12}]\xlongequal{记}\boldsymbol{\alpha}_1$（线性代数中，向量不需要在字母上加箭头写成 $\overrightarrow{\alpha_1}$，只要写 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 即可，此后类同，不再重复）. 将此行列式的第 2 行的两个元素 a_{21},a_{22} 看成另一个 2 维向量 $[a_{21},a_{22}]\xlongequal{记}\boldsymbol{\alpha}_2$. 不失一般性，将这两个向量标在直角坐标系中，且以这两个向量为邻边作出一个 $\square OABC$，则 $S_{\square OABC}=$？

不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的长度（模）为 l，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的长度（模）为 m，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 x 轴正向的夹角为 α，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 x 轴正向的夹角为 β，如图 1-1 所示.

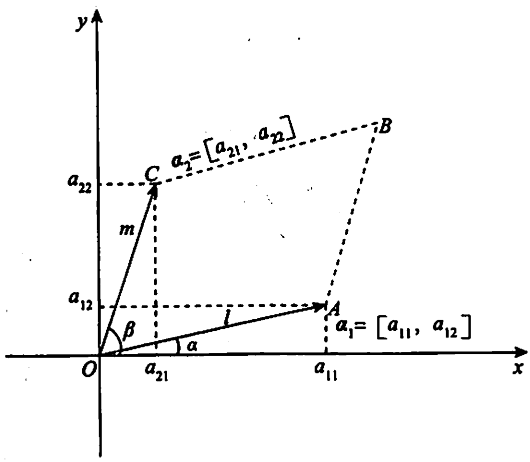


图 1-1

则
$$\begin{aligned} S_{\square OABC}&=l\cdot m\cdot\sin(\beta-\alpha)\\ &=l\cdot m(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)\\ &=l\cos\alpha\cdot m\sin\beta-l\sin\alpha\cdot m\cos\beta\\ &=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \end{aligned}$$

于是
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=S_{\square OABC}.$$

我们看到了一个极其直观有趣的结论：**2 阶行列式是由两个 2 维向量组成的，其（运算规则的）结果为以这两个向量为邻边的平行四边形的面积**. 这不仅得出了 2 阶行列式的计算规则，也能够清楚地看到其几何意义.

线性代数这门学科最大的一个特点是“可以作线性推广”——3 阶行列式 $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是什么？我希望读者能够仿照上述定义回答出：**3 阶行列式是由三个 3 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{12},a_{13}]$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{21},a_{22},a_{23}]$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[a_{31},a_{32},a_{33}]$ 组成的，其（运算规则的）结果为以这三个向量为邻边的平行六面体的体积**. 如图 1-2 所示.

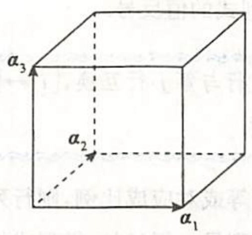


图 1-2

依此类推,我们便可以给出 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的本质定义:

n 阶行列式是由 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}]$,$\cdots$,$\boldsymbol{\alpha}_n=[a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn}]$组成的,其(运算规则的)结果为以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的体积.

由此看来,一个重要观点出现了:读者一开始,就应该**把行列式看作是由若干个向量拼成的,并且要把这些向量作运算**. 以 3 阶行列式为例,若 $D_3\neq 0$,则意味着体积不为 0,则称组成该行列式的三个向量**线性无关**;若 $D_3=0$,则称**线性相关**.

二、行列式的性质

性质 1 行列互换,其值不变,即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

性质 2 若行列式中某行(列)元素全为零,则行列式为零.

性质 3 若行列式中某行(列)元素有公因子 $k(k\neq 0)$,则 k 可提到行列式外面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】 (1)本书用 k ⓘ表示第 i 行乘 k,$k[j]$表示第 j 列乘 k.

(2)以后称上述等式从右到左的运算为**"倍乘"**性质.

性质 4 行列式中某行(列)元素均是两个元素之和,则可拆成两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】 等式从右到左是两个行列式相加的运算.如果两个行列式的其他元素对应相等,只有一行(列)不同时,可以相加,相加时其他元素不变,不同元素的行(列)对应相加即可.

性质 5 行列式中两行(列)互换,行列式的值反号.

【注】 (1)以后用 ⓘ↔ⓙ 表示第 i 行与第 j 行互换,$[i]\leftrightarrow[j]$ 表示第 i 列与第 j 列互换.

(2)以后称上述运算为**"互换"**性质.

性质 6 行列式中的两行(列)元素相等或对应成比例,则行列式为零.

性质 7 行列式中某行(列)的 k 倍加到另一行(列),行列式的值不变.

【注 1】 (1)以后用 ⓘ$+k$ⓙ 表示第 j 行的 k 倍加到第 i 行,$[i]+k[j]$ 表示第 j 列的 k 倍加到第 i 列.

(2)以后称上述运算为**"倍加"**性质.

【注 2】 以上七个性质均可由本讲"一、行列式的本质定义(第一种定义)"所介绍的行列式的几何背景直观地得到,而不需复杂抽象的分析.如性质 6 所说到的"两行(列)元素对应成比例,则行列式为零",可取 $\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}$,因向量$[2,3]$与向量$[4,6]$为平行向量,故$\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}=S_\square=0$,如图 1-3 所示,一目了然.

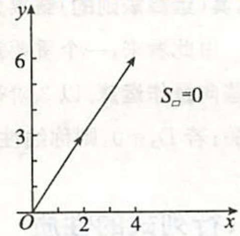


图 1-3

三、行列式的逆序数法定义(第二种定义)

1. 排列和逆序

排列 由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列,如 23145 是一个 5 级排列,41352 也是一个 5 级排列.n 级排列共有 $n!$ 个.

逆序 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,若 $i_s>i_t$,且 i_s 排在 i_t 前面,则称这两个数构成一个逆序.

逆序数 一个排列中,逆序的总数称为该排列的逆序数,记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$,如 $\tau(231546)=3$,$\tau(621534)=8$.由小到大顺排的排列称为自然排序,如 12345,显然,自然排序的逆序数为 0.

奇排列和偶排列 排列的逆序数为奇数时,该排列称为奇排列;排列的逆序数为偶数时,该排列称为偶排列.

2. n 阶行列式的定义

$n(n\geqslant 2)$阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 个列下标排列求和,故为 $n!$ 项之和.注意到行下标已经顺排,而列下标是任一个 n 级排列,故每项由取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积组成,每项的正、负号取决于$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.当

列下标为奇排列时，应附加负号；当列下标为偶排列时，应附加正号.

【注】 (1)规定 1 阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

(2)如：请确定“$a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$”这一展开项前的正、负号. 答：首先将行下标顺排为 $a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$，然后计算 $\tau(25134)=4$，为偶排列，故该项前为正号.

(3)上述 n 阶行列式利用逆序的定义和教材中对于 2,3 阶行列式的定义是完全一致的. 也就是

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.$$

如

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix}=520,\quad \begin{vmatrix} 我 & 0 & 生 \\ 0 & 有 & 0 \\ 你 & 0 & 幸 \end{vmatrix}=我有幸一生有你,$$

读者若将上式结果中的减号“－”看作汉字“一”，一个浪漫的公式便产生了.

四、行列式的展开定理(第三种定义)

阶数超过 3 的行列式，若还用“一”“三”的方法，就太麻烦了，为此，提出行列式的展开定理.

1. 余子式

在 n 阶行列式中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列元素，由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的 $n-1$阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 代数余子式

余子式 M_{ij} 乘$(-1)^{i+j}$后称为 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

显然也有 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$.

3. 行列式按某一行(列)展开的展开公式

行列式的值等于行列式的某行(列)元素分别乘其相应的代数余子式后再求和，即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{cases} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n), \\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(j=1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

但行列式的某行(列)元素分别乘另一行(列)元素的代数余子式后再求和,结果为零,即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0,i\neq k;$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0,j\neq k.$$

【注】 余子式与代数余子式是行列式展开定理的核心概念,关于它们的灵活使用请参看例 1.13.

五、几个重要的行列式

1. 主对角线行列式(上(下)三角形行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

2. 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

3. 拉普拉斯展开式

设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

【注】 以后称以上 12 个行列式为“基本形”行列式,加上下面的“4. 范德蒙德行列式”,简称为“12＋1”型行列式.

4. 范德蒙德行列式

记

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

基础例题精解

一、具体型行列式的计算

$$
\text{1. 化基本形法}\begin{cases}\text{直接展开}\\ \text{爪形}\\ \text{异爪形}\\ \text{行(列)和相等}\\ \text{消零化基本形}\\ \text{拉普拉斯展开式}\\ \text{范德蒙德行列式}\end{cases}
$$

用行列式的性质或展开公式，化为“基本形”行列式.

例 1.1　$D_4=\begin{vmatrix}2&-1&0&0\\0&2&-1&0\\0&0&2&-1\\-1&0&0&2\end{vmatrix}=($　　$)$.

(A)17　　(B)15　　(C)13　　(D)11

解　应选(B).

按照第 1 列展开，得

$$
\begin{aligned}
D_4&=\begin{vmatrix}2&-1&0&0\\0&2&-1&0\\0&0&2&-1\\-1&0&0&2\end{vmatrix}\\
&=2\begin{vmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\0&0&2\end{vmatrix}-1\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-1&0&0\\2&-1&0\\0&2&-1\end{vmatrix}\\
&=16-1=15,
\end{aligned}
$$

故选(B).

例 1.2　计算行列式：$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\times3\times4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 24\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 24-12-8-6=-2.$$

【注】 本题的行列式是“爪形行列式”(除了第1列、第1行及主对角线元素，其余元素均为零的行列式)，这种行列式都可以化为“基本形”行列式.

例 1.3 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$ ______.

解 应填 $4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4$.

按第4行展开，得

$$\text{原式} = 4(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$(\lambda+1)(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4.$$

例 1.4 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 将第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第1列，则可提出公因子，即

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal{[1]+\sum_{i=2}^{n}[i]} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{ⓘ-①}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\0 & a-b & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & a-b & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

【注 1】 行和或列和相等的行列式(行和是指每一行元素相加的和,列和同理)

$$\begin{vmatrix}a & b & b & \cdots & b\\b & a & b & \cdots & b\\b & b & a & \cdots & b\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}_{n\times n}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

【注 2】 行列式中每行(列)元素之和相等时,将其余各行(列)加到第 1 行(列),然后提出公因子是可取的方法.

【注 3】 这类字母抽象型行列式显然具有代表性.如

(1)当 $a=0,b=1$ 时,$\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{vmatrix}_{n\times n}=(n-1)(-1)^{n-1}$;

当 $a=2,b=1$ 时,$\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 2 & 1 & \cdots & 1\\1 & 1 & 2 & \cdots & 1\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\1 & 1 & 1 & \cdots & 2\end{vmatrix}_{n\times n}=n+1.$

(2)当 $a=x$ 时,$\begin{vmatrix}x & b & b & \cdots & b\\b & x & b & \cdots & b\\b & b & x & \cdots & b\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\b & b & b & \cdots & x\end{vmatrix}_{n\times n}=[x+(n-1)b](x-b)^{n-1}.$

若视 x 为变量,b 是常数,则行列式是 x 的 n 次多项式,其根是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=b,x_n=(1-n)b$.

当 a 取为 $\lambda-a$ 时,$\begin{vmatrix}\lambda-a & b & b & \cdots & b\\b & \lambda-a & b & \cdots & b\\b & b & \lambda-a & \cdots & b\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\b & b & b & \cdots & \lambda-a\end{vmatrix}_{n\times n}=[\lambda-a+(n-1)b](\lambda-a-b)^{n-1}.$

若视 λ 为变量，a,b 为常数，则行列式是 λ 的 n 次多项式，其根是 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=a+b,\lambda_n=a-(n-1)b$.

(3) 当 a 在副对角线上时，
$$G_n=\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & a \\ b & b & \cdots & a & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & b & b \\ a & b & \cdots & b & b \end{vmatrix} \overset{(*)}{=\!=} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

(*) 处是将最后 1 列和前面相邻列对换，对换 $n-1$ 次到第 1 列，再将最新的行列式的最后 1 列和相邻列对换，对换 $n-2$ 次到第 2 列，……，直到换成 D_n，共交换 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$ 次，故得
$$G_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

注意，上述结果不要当作公式去记忆，而是要学会分析行列式中元素分布的规律性，并掌握相应的计算方法.

例 1.5 计算行列式
$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}.$$

解 先将第 2,4 列互换，再将第 2,4 行互换，最后利用拉普拉斯展开式.
$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\times(-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$$
$$=a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4-a_1b_2b_3a_4-b_1a_2a_3b_4.$$

【注】 注意：
$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$$
是错误的. 不要当作 2 阶行列式计算. 展开式共有 4 项，且副对角线元素乘积的那一项取正号.

例 1.6 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$$
$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=(a+b+c)(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$
$$=(a+b+c)(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$
$$=(a+b+c)(b-a)(c-b)(c-a).$$

2. 递推法

例 1.7 $D_4=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=(\quad)$.

(A)$a^4+2a^3+6a^2+2a+1$　　(B)$a^4-2a^3+6a^2+a$

(C)$a^4+a^3+a^2+a+1$　　(D)$a^4-a^3+a^2-a+1$

解 应选(D).

对这类行列式，适宜采用递推法计算．计算的关键是找到上、下阶行列式之间的关系式，即递推公式.

先将其余各行加至第 4 行，化简整理，再按第 4 行展开，有

$$D_4=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=-(-1)^{4+1}a^4+D_3=a^4-(-1)^{3+1}a^3+D_2=a^4-a^3-(-1)^{2+1}a^2+D_1$$
$$=a^4-a^3+a^2-a+1,$$

故选(D).

【注】 本题也可考虑用归纳法.考虑到行列式排列有序,可以从低阶计算,逐步升阶找出规律.由

$$D_1=1-a,\quad D_2=\begin{vmatrix}1-a & a\\ -1 & 1-a\end{vmatrix}=1-a+a^2,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1-a & a & 0\\ -1 & 1-a & a\\ 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=(1-a)D_2-1\times(-1)^{2+1}a(1-a)=1-a+a^2-a^3,$$

可类推得 $D_4=a^4-a^3+a^2-a+1$,故选(D).

3. 行列式表示的函数和方程

这类问题的行列式元素 a_{ij} 往往不是具体数值,而是含 x 或 λ 等的函数,可能会在计算之外给读者带来新的困难和麻烦,自然也会给命题人带来新的角度.请读者重视对此类问题的研究.

例 1.8 设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ 1 & 2 & x^2\\ 1 & 3 & x^3\end{vmatrix}$,求 $f(x+1)-f(x)$.

解

$$f(x+1)-f(x)=\begin{vmatrix}1 & 0 & x+1\\ 1 & 2 & (x+1)^2\\ 1 & 3 & (x+1)^3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ 1 & 2 & x^2\\ 1 & 3 & x^3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & x+1\\ 1 & 2 & x^2+2x+1\\ 1 & 3 & x^3+3x^2+3x+1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ 1 & 2 & x^2\\ 1 & 3 & x^3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2x+1\\ 1 & 3 & 3x^2+3x+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 3x^2\end{vmatrix}=6x^2.$$

【注】 函数可以用含有变量的行列式表示,因此,对这类行列式当然也可以求极限、导数、积分等,如本题 $[f(x+1)-f(x)]'=(6x^2)'=12x$, $\int[f(x+1)-f(x)]\mathrm{d}x=2x^3+C$.

例 1.9 设 $f(x)=\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

分析 此题实质上是计算行列式,观察计算出的关于 x 的多项式的次数.在计算过程中要充分运用行列式的性质.

解 应选(B).

$$f(x)\xlongequal[\text{[4]}-\text{[1]}]{\substack{\text{[2]}-\text{[1]}\\ \text{[3]}-\text{[1]}}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{[4]}+\text{[2]}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=5x(x-1),$$

由此可知 $f(x)$是二次多项式,故应选(B).

【注】 不要错误地认为 $f(x)$一定是四次多项式.

例 1.10 设关于 λ 的方程

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & a & \lambda-5 \end{vmatrix}=0$$

有二重根,求参数 a 的值.

解

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & a & \lambda-5 \end{vmatrix}\xlongequal{①-②}\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & a & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{[2]}+\text{[1]}}\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)[(\lambda-3)(\lambda-5)-3(a-1)]$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18-3a)=0.$$

若 $\lambda=2$ 是二重根,则

$$(\lambda^2-8\lambda+18-3a)\Big|_{\lambda=2}=4-16+18-3a=0,$$

得 $a=2$,经验证 $\lambda=2$ 是二重根.

若 $\lambda=2$ 不是二重根,则 $\lambda^2-8\lambda+18-3a=0$ 有两个相等的根,故 $\Delta=(-8)^2-4(18-3a)=0$,得 $a=\dfrac{2}{3}$. 此时,$\lambda=4$ 是二重根.

综上所述,$a=2$ 或 $a=\dfrac{2}{3}$.

二、抽象型行列式的计算

例 1.11 已知 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=a$, $|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1|=b$, 则 $|\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}|=$ ________.

解 应填 $a+b$.

这是一个抽象的带字母的行列式计算题,要通过列变换将要求的行列式简化分离,最终表示为两个已

知行列式的运算形式.

因为

$$|\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}| \xlongequal{[1]-[3]} |\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}| \xlongequal{[1]\leftrightarrow[2]} -|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}|,$$

又

$$|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1| = -|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}| = -|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}| - |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}|,$$

故 $|\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}|=a+b$.

【注】 高阶带字母行列式,通常指4阶及4阶以上带字母的行列式,比较抽象.有两种基本类型,一种与高阶数值型行列式类似,元素排列有序,有一定规律性,且计算有一定规律,通过初等变换最终化为三角形行列式定值,这些题一般阶数不大,即使大一些,但计算量不大,大家通过一定练习注意把握.另一种如本题,主要通过行、列变换,与已知行列式对应,代值计算.

例1.12 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为3维列向量,已知

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3],\quad \boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3],$$

且 $|\boldsymbol{A}|=2$,则 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=$__________.

解 应填10.

$$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3| \xlongequal{(*)} \left|[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}0&2&1\\-1&2&2\\2&-5&-2\end{bmatrix}\right|$$

$$=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\begin{vmatrix}0&2&1\\-1&2&2\\2&-5&-2\end{vmatrix},$$

其中 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=|\boldsymbol{A}|=2$.又

$$\begin{vmatrix}0&2&1\\-1&2&2\\2&-5&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&1\\-1&2&2\\0&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}=5,$$

故 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=10$.

【注】 能够熟练地将线性组合表示成矩阵乘积的形式,

$$0\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix},\quad 2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}2\\2\\-5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},$$

再合并成矩阵乘积的行列式(*)式是解决此类问题的关键.

三、余子式和代数余子式的线性组合的计算

由
$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\begin{vmatrix} & & * & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & * & \end{vmatrix}, \quad ①$$

则
$$k_1A_{i1}+k_2A_{i2}+\cdots+k_nA_{in}=\begin{vmatrix} & & * & \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ & & * & \end{vmatrix}, \quad ②$$

其中 * 处表示元素不变，①，②的区别仅仅在于第 i 行的元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 换成了 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，这样，给出不同的系数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，即得到了不同的行列式. 而若要求 $k_1M_{i1}+k_2M_{i2}+\cdots+k_nM_{in}$，只需用 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$ 化为关于 A_{ij} 的线性组合即可.

例 1.13 设 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}+M_{34}=($ $)$.

(A)8 (B)6 (C)4 (D)2

解 应选(B).

本题即计算 $A_{31}+A_{32}+A_{33}-A_{34}$，结果是将组合系数置换行列式中第 3 行元素后的行列式的值.

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+M_{34}=A_{31}+A_{32}+A_{33}-A_{34}$$
$$=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[④-③]{①-2③} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6,$$

故选(B).

【注】 与余子式、代数余子式相关的问题主要有两个角度：一是余子式与代数余子式之间的转换，注意符号上的变换；二是计算某行(列)的余子式或代数余子式的线性组合，关键查看其组合系数与其他行(列)的元素是否一致，若一致，则取值为零，否则，将代数余子式的线性组合系数置换行列式中对应行(列)的元素后计算行列式的值.

基础习题精练

习题

1.1 行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}4&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\\1&2&3&4\end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_.$$

1.2 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}a&b&0&\cdots&0&0\\0&a&b&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&b\\b&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}_{n\times n}=\_\_\_\_\_\_.$

1.3 行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\-1&2-a&b&0\\0&-2&3-b&c\\0&0&-3&4-c\end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_.$$

1.4 计算：

$$D_n=\begin{vmatrix}2&-1&0&\cdots&0&0\\-1&2&-1&\cdots&0&0\\0&-1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&-1\\0&0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}_{n\times n}.$$

1.5 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1&-1&0&\cdots&0&0\\a_2&x&-1&\cdots&0&0\\a_3&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n-1}&0&0&\cdots&x&-1\\a_n&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}.$

1.6 已知 $\begin{vmatrix}\lambda&2&2\\-2&\lambda-2&2\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=0$，则 $\lambda=\_\_\_\_\_\_.$

1.7 一元二次方程 $\begin{vmatrix} x & 1 & a \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 有二重根，求参数 a 的值及该二重根.

1.8 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 均为 4 维列向量，且

$$|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n,\quad |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=m,$$

则 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\beta}|=$__________.

1.9 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维列向量，且 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq 0$，$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

则 $|\boldsymbol{A}|=$__________.

1.10 设

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

计算：(1) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$，其中 A_{4j} 是元素 $a_{4j}(j=1,2,3,4)$ 的代数余子式；

(2) $M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}$，其中 M_{3j} 是元素 $a_{3j}(j=1,2,3,4)$ 的余子式.

解答

1.1 160 **解** $D_4=10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=160.$

1.2 $a^n+(-1)^{n+1}b^n$ **解** 按第 1 列展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$=a\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}+(-1)^{n-1}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

1.3 24 **解** 从第 1 行开始，依次把每行加到下一行（逐行相加），则

$$D_4=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&2&b&0\\0&-2&3-b&c\\0&0&-3&4-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&2&b&0\\0&0&3&c\\0&0&-3&4-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&2&b&0\\0&0&3&c\\0&0&0&4\end{vmatrix}=24.$$

1.4 解 将 D_n 中的第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第 1 列，再按第 1 列展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\0&2&-1&\cdots&0&0\\0&-1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&-1\\1&0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$=D_{n-1}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0&0\\2&-1&0&\cdots&0&0\\-1&2&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&0\\0&0&0&\cdots&2&-1\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=D_{n-1}+(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}=D_{n-1}+1,$$

得递推关系 $D_n=D_{n-1}+1$，则

$$D_n=D_{n-1}+1=D_{n-2}+1+1=D_{n-2}+2=\cdots,$$

因此可得

$$D_n=D_1+n-1=2+n-1=n+1.$$

1.5 解 按第 n 行展开，得

$$D_n=a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\x&-1&0&\cdots&0\\0&x&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}+x(-1)^{n+n}D_{n-1}$$

$$=a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}+xD_{n-1}=a_n+xD_{n-1},$$

于是按递推关系 $D_n=a_n+xD_{n-1}$，有

$$D_{n-1}=a_{n-1}+xD_{n-2},\quad D_{n-2}=a_{n-2}+xD_{n-3},\quad \cdots,\quad D_2=a_2+a_1x,$$

分别用 $x,x^2,\cdots,x^{n-2}$ 乘上述各等式，然后代入 D_n 的表达式中，则

$$D_n=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_1x^{n-1}.$$

【注】 对元素有一定规律（如，某行或某列只有两个元素不是 0，而其余元素都是 0）的行列式可考虑利用展开公式建立递推关系来处理.

1.6 0 或 4 解 $\begin{vmatrix}\lambda&2&2\\-2&\lambda-2&2\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&2&2\\0&\lambda&\lambda\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\0&1&1\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-4)=0,$

故 $\lambda=0$ 或 4.

1.7 解 $\begin{vmatrix} x & 1 & a \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 1-x & a-x \\ 1 & x-2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-(x-2)(a-x)$,

故当 $a=2$ 时,$x=2$ 是二重根.

1.8 $3(m+n)$ **解** 因为

$$\begin{aligned} m&=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| \\ &=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|-|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| \\ &=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|-n, \end{aligned}$$

则

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=m+n,$$

故

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\beta}|=3|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=3(m+n).$$

【注】 利用行列式的性质将未知行列式化成已知行列式是解决此类问题的关键.

1.9 -2 **解** $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2]$,

等式两边取行列式,有

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|&=|\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2| \\ &=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

因 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq 0$,故

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-2.$$

1.10 解 (1)**方法一** 将 $|\boldsymbol{A}|$ 中第 4 行元素依次改为 1,1,1,1,得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

方法二 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中第 3 行元素全为 1,故

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=a_{31}A_{41}+a_{32}A_{42}+a_{33}A_{43}+a_{34}A_{44},$$

由行列式展开公式知,第 3 行元素与第 4 行元素对应的代数余子式乘积之和为零,故有

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0.$$

(2)余子式和代数余子式有如下关系:$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. 两边同乘 $(-1)^{i+j}$,因 $(-1)^{i+j}\cdot(-1)^{i+j}=(-1)^{2i+2j}=1$,故

$$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n),$$

从而有

$$M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}=A_{31}-A_{32}+A_{33}-A_{34}.$$

将$|A|$中第3行元素依次换成$1,-1,1,-1$,得

$$M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}=A_{31}-A_{32}+A_{33}-A_{34}=\begin{vmatrix}-2&2&-2&2\\1&2&3&4\\1&-1&1&-1\\2&-1&3&5\end{vmatrix}=0.$$

第2讲 矩　阵

基础知识结构

- 矩阵的定义及其基本运算
  - 定义
  - 基本运算
    - 相等
    - 加法
    - 数乘矩阵
    - 矩阵的乘法
    - 转置矩阵
    - 向量的内积与正交
    - 施密特正交化
    - 矩阵的幂
    - 方阵乘积的行列式
- 矩阵的逆
  - 定义
  - 性质与公式
  - 用定义求逆矩阵
- 伴随矩阵
  - 定义
  - 性质与公式
  - 用伴随矩阵求逆矩阵
- 初等变换与初等矩阵
  - 初等变换
  - 初等矩阵
    - 定义
    - 性质与公式
    - 用初等变换（初等矩阵）求逆矩阵
- 矩阵方程
  - $AX=B$
  - $XA=B$
  - $AXB=C$
- 矩阵的秩与等价矩阵
  - 秩
    - 定义
    - 初等变换不改变矩阵的秩
    - 几个重要式子
  - 等价矩阵

基础内容精讲

一、矩阵的本质

假如英语系有 98 个女生，2 个男生；机械系有 95 个男生，5 个女生. 你能把这个系统信息表达出来吗？这个问题的回答是显然而且简单的：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{英语系} & \text{机械系}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{男生人数} \\ \text{女生人数}\end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 95 \\ 98 & 5 \end{bmatrix}\end{array}.$$

在这个数表中，我们可以看到：第一列表达了英语系的男、女生人数，第二列表达了机械系的男、女生人数，而第一行表达了不同系的男生人数，第二行表达了不同系的女生人数.

这就是读者对**矩阵的初步认识——表达系统信息.**

但读者不可对矩阵的认识止步于此. 再看一个矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

事实上，我们不必再给这个矩阵赋予具体背景了，总之，可以抽象认为这是一个系统信息的表达即可.

我给读者提供两个重要观点，供你在学习相关知识后参考.

重要观点 1　矩阵也是由若干行(列)向量拼成的——上面那个矩阵可以看作由三个行向量$[1,2,3]$，$[6,7,9]$与$[2,4,6]$组成，也可以看作由三个列向量$[1,6,2]^{\mathrm{T}}$，$[2,7,4]^{\mathrm{T}}$与$[3,9,6]^{\mathrm{T}}$组成.

重要观点 2　矩阵不能运算，但是其若干行(列)向量之间可能存在着某种关系——你是否看到：$[1,2,3]$与$[2,4,6]$这两个向量是平行的(存在线性关系)，而$[1,2,3]$与$[6,7,9]$，$[2,4,6]$与$[6,7,9]$之间却不存在这种线性关系. **这种关系反映了矩阵的本质——矩阵的秩**——这个秩是 2.

下面给出矩阵的秩的定义.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 中最高阶非零子式的阶数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记为 $r(\boldsymbol{A})$.

也可以这样定义：若存在 k 阶子式不为零，而任意 $k+1$ 阶子式(如果有的话)全为零，则 $r(\boldsymbol{A})=k$，且

$$r(\boldsymbol{A}_{n\times n})=n\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\text{ 可逆}.$$

从此定义可以看出，矩阵秩的本质就是组成该矩阵的线性无关的向量的个数.

二、矩阵的定义及其基本运算

1. 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的 m 行 n 列的矩形表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵，简记为 $\boldsymbol{A}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$. 当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵.

两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times k}$. 若 $m=s,n=k$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵.

2. 矩阵的基本运算

(1)**相等** $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times k}\Leftrightarrow m=s,n=k$，且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，且对应元素相等.

(2)**加法** 两个矩阵是同型矩阵时，可以相加，即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中，$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，即对应元素相加.

(3)**数乘矩阵** 设 k 是一个数，$\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵. 数 k 和 $\boldsymbol{A}$ 的乘积称为数乘矩阵，即

$$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=(ka_{ij})_{m\times n},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都乘以 k.

加法运算和数乘运算统称为矩阵的线性运算，满足下列运算规律：

①**交换律** $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

②**结合律** $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

③**分配律** $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$，$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

④**数和矩阵相乘的结合律** $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}=l(k\boldsymbol{A})$.

其中，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 是同型矩阵，k，l 是任意常数.

当用 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 计算行列式时，记成 $|\boldsymbol{A}|$.

【注】 (1) $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|\neq k|\boldsymbol{A}|(n\geqslant 2,k\neq 0,1)$；

(2)一般地，$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$；

(3)$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}\not\Rightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$；

(4)$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}\not\Rightarrow|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$.

(4)**矩阵的乘法** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $s\times n$ 矩阵(矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数必须与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等)，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可以相乘，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是 $m\times n$ 矩阵，记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$. $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的 s 个元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的 s 个对应元素两两乘积之和，即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

矩阵乘法满足下列运算规律：

①**结合律** $(\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times r})\boldsymbol{C}_{r\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times s}(\boldsymbol{B}_{s\times r}\boldsymbol{C}_{r\times n})$；

②分配律 $A_{m\times s}(B_{s\times n}+C_{s\times n})=A_{m\times s}B_{s\times n}+A_{m\times s}C_{s\times n}$,

$(A_{m\times s}+B_{m\times s})C_{s\times n}=A_{m\times s}C_{s\times n}+B_{m\times s}C_{s\times n}$;

③数乘与矩阵乘积的结合律

$$(kA_{m\times s})B_{s\times n}=A_{m\times s}(kB_{s\times n})=k(A_{m\times s}B_{s\times n}).$$

【注】(1)矩阵的乘法一般情况下不满足交换律,即 $AB\neq BA$.

例如
$$A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix},$$
则
$$AB=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$
$$BA=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix},\quad AB\neq BA.$$

(2)由上面的例子知,存在 $A\neq O,B\neq O$,而 $AB=O$ 的情况,故 $AB=O\not\Rightarrow A=O$ 或 $B=O$.

(3)$AB=AC\Rightarrow A(B-C)=O$,此时即使有 $A\neq O$,一般也得不出 $B=C$.

(5)**转置矩阵** 将 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行与列互换得到的 $n\times m$ 矩阵,称为矩阵 A 的转置矩阵,记为 $A^{\mathrm T}$,即

$$A^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

转置矩阵满足下列运算规律:

①$(A^{\mathrm T})^{\mathrm T}=A$;②$(kA)^{\mathrm T}=kA^{\mathrm T}$;③$(A+B)^{\mathrm T}=A^{\mathrm T}+B^{\mathrm T}$;④$(AB)^{\mathrm T}=B^{\mathrm T}A^{\mathrm T}$;⑤当 $m=n$ 时,$|A^{\mathrm T}|=|A|$.

(6)**向量的内积与正交**

内积 设 $\boldsymbol\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm T},\boldsymbol\beta=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm T}$,则称

$$\boldsymbol\alpha^{\mathrm T}\boldsymbol\beta=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

为向量 $\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta$ 的内积,记作 $(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta)$,即 $(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta)=\boldsymbol\alpha^{\mathrm T}\boldsymbol\beta$.

正交 当 $\boldsymbol\alpha^{\mathrm T}\boldsymbol\beta=0$ 时,称向量 $\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta$ 是正交向量.

模 $\|\boldsymbol\alpha\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$ 称为向量 $\boldsymbol\alpha$ 的模(长度).

$\|\boldsymbol\alpha\|=1$ 时,称 $\boldsymbol\alpha$ 为**单位向量**.

标准正交向量组 若列向量组 $\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s$ 满足

$$\boldsymbol\alpha_i^{\mathrm T}\boldsymbol\alpha_j=\begin{cases}0, & i\neq j,\\1, & i=j,\end{cases}$$

则称 $\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s$ 为标准或单位正交向量组.

(7)**施密特正交化(又称正交规范化)过程**

线性无关向量组 $\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2$ 的标准正交化(又称正交规范化)公式为

$$\boldsymbol\beta_1=\boldsymbol\alpha_1,$$
$$\boldsymbol\beta_2=\boldsymbol\alpha_2-\frac{(\boldsymbol\alpha_2,\boldsymbol\beta_1)}{(\boldsymbol\beta_1,\boldsymbol\beta_1)}\boldsymbol\beta_1,$$

得到的 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是正交向量组.

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是标准正交向量组.

(8)**矩阵的幂** $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵,$\boldsymbol{A}^m=\overbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}^{m个}$称为 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次幂.

【注】 (1)因矩阵乘法不满足交换律,故一般地,

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2,$$

$$(\boldsymbol{AB})^m=\overbrace{(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})}^{m个}\neq\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m.$$

(2)若 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$,则

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m.$$

(9)**方阵乘积的行列式** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵,则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

【注】 几种重要矩阵.

(1)**零矩阵** 每个元素均为零的矩阵,记为 $\boldsymbol{O}$.

(2)**单位矩阵** 主对角元素均为1,其余元素全为零的 n 阶方阵,称为 n 阶单位矩阵,记成 $\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{I}$).

(3)**数量矩阵** 数 k 和单位矩阵的乘积称为数量矩阵.

(4)**对角矩阵** 非主对角元素均为零的矩阵称为对角矩阵.

(5)**上(下)三角矩阵** 当 $i>(<)j$ 时,$a_{ij}=0$ 的矩阵称为上(下)三角矩阵.

(6)**对称矩阵** 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为对称矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$.

(7)**反对称矩阵** 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为反对称矩阵,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{ij}=-a_{ji},i\neq j,\\ a_{ii}=0.\end{cases}$$

(8)**正交矩阵** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量组是标准正交向量组.

分析 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$,且记

$$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,b_3]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}=[c_1,c_2,c_3]^{\mathrm{T}}.$$

则由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

可得

$$\begin{cases} a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 \Rightarrow \|\boldsymbol{\alpha}\|=1, \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=1 \Rightarrow \|\boldsymbol{\beta}\|=1, \\ c_1^2+c_2^2+c_3^2=1 \Rightarrow \|\boldsymbol{\gamma}\|=1, \\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \Rightarrow (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0, \text{即 } \boldsymbol{\alpha} \text{ 与 } \boldsymbol{\beta} \text{ 正交}, \\ a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0 \Rightarrow (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=0, \text{即 } \boldsymbol{\alpha} \text{ 与 } \boldsymbol{\gamma} \text{ 正交}, \\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0 \Rightarrow (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=0, \text{即 } \boldsymbol{\beta} \text{ 与 } \boldsymbol{\gamma} \text{ 正交}, \end{cases}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是由两两正交的单位向量组(称为规范正交基)组成.

(9)**分块矩阵**

①矩阵的分块.

用几条纵线和横线把一个矩阵分成若干小块,每一小块称为原矩阵的子块. 把子块看作原矩阵的一个元素,就得到了分块矩阵.

如 $\boldsymbol{A}$ 按行分块:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix},$$

其中,$\boldsymbol{A}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}](i=1,2,\cdots,m)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个子块.

$\boldsymbol{B}$ 按列分块:

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{c:c:c:c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{array}\right]=[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n],$$

其中,$\boldsymbol{B}_j=[b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{mj}]^{\mathrm{T}}(j=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的一个子块.

②分块矩阵的基本运算(以 2×2 型分块矩阵为例).

加法:同型,且分法一致,则 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_4+\boldsymbol{B}_4 \end{bmatrix}$.

数乘:$k\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k\boldsymbol{A} & k\boldsymbol{B} \\ k\boldsymbol{C} & k\boldsymbol{D} \end{bmatrix}$.

乘法:$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BZ} & \boldsymbol{AY}+\boldsymbol{BW} \\ \boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DZ} & \boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DW} \end{bmatrix}$,要可乘、可加.

注意 对于乘法的运算要注意,分块相乘后,左边的矩阵仍在左边,右边的矩阵仍在右边.

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m,n 阶方阵,则分块对角矩阵的幂为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^n \end{bmatrix}.$$

三、矩阵的逆

1. 逆矩阵的定义

(1)定义 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,且逆矩阵是唯一的,记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2)$\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,$\boldsymbol{A}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}.$$

2. 逆矩阵的性质与重要公式

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶可逆矩阵,则

(1)$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(2)若 $k\neq 0$,则 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(3)$\boldsymbol{AB}$ 也可逆,且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(4)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆,且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;

【注】 此处可称为“穿脱”原则,即穿衣时先内后外,脱衣时先外后内.

(5)$|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

【注】 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不一定可逆,且 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

3. 用定义求逆矩阵的方法

方法一 依定义,即求一个矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

方法二 将 $\boldsymbol{A}$ 分解成若干个可逆矩阵的乘积. 因两个可逆矩阵的积仍是可逆矩阵,即若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$,其中,$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均可逆,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{BC})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}.$$

方法三 一些简单分块矩阵的逆. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是可逆方阵,则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

四、伴随矩阵

1. 伴随矩阵的定义

伴随矩阵 将行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的 n^2 个元素的代数余子式按如下形式排成的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,记作 $\boldsymbol{A}^{*}$,即

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix},$$

且有
$$AA^*=A^*A=|A|E.$$

2. 伴随矩阵的性质与重要公式

(1)对任意 n 阶方阵 A,都有伴随矩阵 A^*,且有公式
$$AA^*=A^*A=|A|E,\quad |A^*|=|A|^{n-1}.$$

当 $|A|\neq 0$ 时,有
$$A^*=|A|A^{-1},\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*,\quad A=|A|(A^*)^{-1};$$
$$(kA)(kA)^*=|kA|E;$$
$$A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^*=|A^{\mathrm{T}}|E;$$
$$A^{-1}(A^{-1})^*=|A^{-1}|E;$$
$$A^*(A^*)^*=|A^*|E.$$

(2) $(A^{\mathrm{T}})^*=(A^*)^{\mathrm{T}},(A^{-1})^*=(A^*)^{-1},(AB)^*=B^*A^*,(A^*)^*=|A|^{n-2}A.$

【注】 $(A+B)^*\neq A^*+B^*.$

3. 用伴随矩阵求逆矩阵的方法

若 $|A|\neq 0$,则 A 可逆,且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*.$

五、初等变换与初等矩阵

1. 初等变换

(1)一个非零常数乘矩阵的某一行(列);

(2)互换矩阵中某两行(列)的位置;

(3)将矩阵的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列).

以上三种变换称为**矩阵的初等行(列)变换**,且分别称为倍乘、互换、倍加初等行(列)变换.

2. 初等矩阵的定义

由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**. 以 3 阶矩阵为例.

(1) $E_2(k)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, E 的第 2 行(或第 2 列)乘 k 倍,称为倍乘初等矩阵.

定义: $E_i(k)(k\neq 0)$ 表示单位矩阵 E 的第 i 行(或第 i 列)乘以非零常数 k 所得的初等矩阵.

(2) $E_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, E 的第 1,2 行(或第 1,2 列)互换,称为互换初等矩阵.

定义: E_{ij} 表示单位矩阵 E 交换第 i 行与第 j 行(或交换第 i 列与第 j 列)所得的初等矩阵.

(3) $E_{31}(k)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{bmatrix}$, E 的第 1 行的 k 倍加到第 3 行(或第 3 列的 k 倍加到第 1 列),称为倍加初等矩阵.

定义:$E_{ij}(k)$表示单位矩阵E的第j行的k倍加到第i行(或第i列的k倍加到第j列)所得的初等矩阵.

3. 初等矩阵的性质与重要公式

(1)初等矩阵的转置仍是初等矩阵.

(2)因

$$|E_i(k)|=k\neq 0,\quad |E_{ij}|=-1\neq 0,\quad |E_{ij}(k)|=1\neq 0,$$

故初等矩阵都是可逆矩阵,且

$$[E_i(k)]^{-1}=E_i\left(\frac{1}{k}\right),\quad E_{ij}^{-1}=E_{ij},\quad [E_{ij}(k)]^{-1}=E_{ij}(-k),$$

其逆矩阵仍是同一类型的初等矩阵.

(3)若A是可逆矩阵,则A可以表示成有限个初等矩阵的乘积,即$A=P_1P_2\cdots P_s$,其中$P_1,P_2,\cdots,P_s$是初等矩阵.

(4)对n阶矩阵A进行初等行变换,相当于矩阵A左乘相应的初等矩阵.同样,对A进行初等列变换,相当于矩阵A右乘相应的初等矩阵.

4. 用初等变换求逆矩阵的方法

$$[A\ \vdots\ E]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[E\ \vdots\ A^{-1}],$$

$$\begin{bmatrix}A\\ \cdots\\ E\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix}E\\ \cdots\\ A^{-1}\end{bmatrix}.$$

六、等价矩阵和矩阵的等价标准形

设A,B均是$m\times n$矩阵,若存在可逆矩阵$P_{m\times m},Q_{n\times n}$,使得$PAQ=B$,则称$A,B$是等价矩阵,记作$A\cong B$.

A是一个$m\times n$矩阵,则A等价于形如$\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$的矩阵($E_r$中的$r$恰是$r(A)$),后者称为$A$的等价标准形.等价标准形是唯一的,即若$r(A)=r$,则存在可逆矩阵$P,Q$,使得

$$PAQ=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}.$$

七、矩阵的秩

1. 定义

设A是$m\times n$矩阵,若存在k阶子式不为零,而任意$k+1$阶子式(如果有的话)全为零,则$r(A)=k$,且若A为$n\times n$矩阵,则

$$r(A_{n\times n})=n\Leftrightarrow |A|\neq 0\Leftrightarrow A\text{ 可逆}.$$

2. 初等变换不改变矩阵的秩

性质 设A是$m\times n$矩阵,P,Q分别是m阶、n阶可逆矩阵,则

$$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ).$$

3. 有关秩的几个重要式子

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是满足有关矩阵运算要求的矩阵，则

①$0\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$（由定义）；

②$r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})(k\neq0)$（由定义）；

③$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$（见例 3.10）；

④$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$（见例 3.11）；

⑤$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1,\end{cases}$ 其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵（见例 3.12）.

基础例题精解

一、矩阵的基本运算

例 2.1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$.

解 本题涉及矩阵的乘法运算，需严格按照相关的运算律进行，尤其要注意相乘时矩阵的左右位置.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2&=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}5 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 5\\ -4 & -1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=\left(\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}\right)\\ &=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\ -4 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 8 & 10\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【注】 本题的结果表明 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2\neq(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$，这是因为，由乘法的分配律，

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2.$$

由于矩阵乘法无交换律，即在一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，故有上面不等式. 类似地，一般情况下，对于任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，

$$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2\pm2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,$$

$$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^3\neq\boldsymbol{A}^3\pm3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{AB}^2\pm\boldsymbol{B}^3.$$

但任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 可交换，故总有

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}),$$

$$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2\pm2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E},$$

$$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{E})^3=\boldsymbol{A}^3\pm3\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{E}.$$

可见当且仅当矩阵乘积可交换时，我们学习过的代数公式才可扩展到矩阵的情况.

例 2.2 设 $f(x)=x^2-5x+3, A=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&3\end{bmatrix}$,定义 $f(A)=A^2-5A+3E$,称其为矩阵 A 的多项式,则 $f(A)=($ $)$.

(A) $\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}2&0\\3&3\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}2&3\\-1&0\end{bmatrix}$

解 应选(C).

矩阵 A 的多项式是将多项式 $f(x)$ 中变量 x 用矩阵 A 置换得到,注意,其中常数项改为 $3A^0=3E$,计算要严格按照先做幂和数乘运算,再做加法运算的顺序.

$$\begin{aligned}f(A)&=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-3&3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}2&-1\\-3&3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}7&-5\\-15&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10&-5\\-15&15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\end{aligned}$$

故选(C).

例 2.3 设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm T}, \boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,b_3]^{\mathrm T}, A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}$,则 $A^n=$________.

解 应填 $\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right)^{n-1}A$.

$$\begin{aligned}A^n&=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\\&=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}=\left([b_1,b_2,b_3]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\right)^{n-1}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}[b_1,b_2,b_3]=\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right)^{n-1}A.\end{aligned}$$

【注】(1)矩阵乘法没有交换律,但结合律、分配律是成立的,要充分运用.利用结合律是本题简化运算的关键,因 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}$ 是数(一阶矩阵),可提到前面.

(2)本题显然具有代表性.

若 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3]^{\mathrm T}, \boldsymbol{\beta}=\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]^{\mathrm T}$,则 $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T})^n=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}=3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$.

若 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm T}$,则 $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T})^n=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}=\left(\sum_{i=1}^{3}a_i^2\right)^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}$.

(3)$r(A)=r\left(\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{bmatrix}\right)=1$,行向量(或列向量)成比例,列向量与 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm T}$ 成比例,比例系数为 b_1,b_2,b_3,提出比例系数,有

$$A=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}[b_1,b_2,b_3].$$

> 上式从右到左是做乘法，从左到右是将 $\boldsymbol{A}$ 分解. 当 $r(\boldsymbol{A})=1$ 时，都可作这种分解. 以后可以看到，众多题目用到这种分解方法，读者需牢记.

例 2.4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{10}$.

解 一般情况下，计算方阵的高次幂，应从矩阵的二次幂开始，逐步增加幂次，在这个过程中，注意找出规律，如有规律可循，应由公式推出结果，如无特定规律，应充分利用性质，尽可能减少运算次数.

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^{10}=\left(\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^{2}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^{2}\right)^{2}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^{2},$$

其中
$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^{2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^{2}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^{2}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

因此
$$\boldsymbol{A}^{10}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

> **【注】** 由本题可以看出，非零方阵的幂未必非零. 一般地，对于非零方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在正整数 k，使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵.

例 2.5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^9=$__________.

解 应填 $256\boldsymbol{A}$.

因为

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}=4\boldsymbol{E},$$

故有 $\boldsymbol{A}^9=(\boldsymbol{A}^2)^4\boldsymbol{A}=4^4\boldsymbol{A}=256\boldsymbol{A}$.

例 2.6 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B},$$

则 $$A^n=(E+B)^n=E^n+nE^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2!}E^{n-2}B^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}E^{n-3}B^3+\cdots+B^n,$$

因 E 和任何矩阵可交换，故展开式和初等代数中的展开式一样. 因

$$B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad B^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B^3=B^2B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

故 $B^k=O,k\geqslant 3$，所以

$$A^n=E+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&n&0\\0&0&n\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&\frac{n(n-1)}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

【注】 因单位矩阵和任何同阶方阵可交换，故本题将 A 分解成 $A=E+B$，再利用主对角元素为零的上三角矩阵 B，有 $B^n=O\ (n\geqslant 3)$ 的特性，来求解 A^n 是非常方便的.

例 2.7 与向量 $\alpha_1=[2,-1,-3]$，$\alpha_2=[-3,1,5]$ 都正交的单位向量 $\beta^\circ=$________.

解 应填 $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}[2,1,1]$.

设向量 $\beta=[x_1,x_2,x_3]$ 与 α_1,α_2 都正交，则有

$$\begin{cases}(\alpha_1,\beta)=2x_1-x_2-3x_3=0,\\(\alpha_2,\beta)=-3x_1+x_2+5x_3=0.\end{cases}\qquad (*)$$

解方程组(*)，由

$$\begin{bmatrix}2&-1&-3\\-3&1&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&0&2\\-3&1&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix},$$

解得 $\beta=k[2,1,1]$，k 是任意常数.

取 $\beta^\circ=\frac{\pm\beta}{\|\beta\|}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}[2,1,1]$，则 β° 为所求的与 α_1,α_2 都正交的单位向量.

【注】 与 α_1,α_2 都正交的单位向量有两个，即 $\beta^\circ=\pm\frac{\beta}{\|\beta\|}$.

例 2.8 设向量组 $\alpha_1=[1,1,1]^T$，$\alpha_2=[0,1,1]^T$，用施密特正交化方法将向量组 α_1,α_2 化成标准正交向量组.

解 取 $\beta_1=\alpha_1=[1,1,1]^T$；

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 即为所求的标准正交向量组.

例 2.9 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\xi}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$. 证明：

(1)$\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵；

(2)$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$；

(3)$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

证明 (1)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-2(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，故 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

(2)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

(3)由(1),(2)知，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

二、证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆及求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的方法

1. 求数值矩阵的逆矩阵

方法一 利用下述公式求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix},$$

注意 A_{ij} 的位置及正、负号.

例 2.10 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，写出 $\boldsymbol{A}$ 可逆的一个充要条件，当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 $\boldsymbol{A}$ 可逆$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc\neq0$，且当 $ad-bc\neq0$ 时，

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}.$$

【注】 利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 时，应注意：

(1)不要忘记 $\boldsymbol{A}^*$ 要除以 $|\boldsymbol{A}|$；

(2)$\boldsymbol{A}^*$ 的元素是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素的代数余子式，注意正、负号；

(3)A_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 中相对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ji} 的位置上.

对于 2 阶矩阵求 $\boldsymbol{A}^*$，只需将 a_{11},a_{22} 互换，a_{12},a_{21} 上添加负号.

例 2.11 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解 由 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{vmatrix}=2\neq0$,知 A 可逆.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&0\\2&-5\end{vmatrix}=-5,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&0\\-3&-5\end{vmatrix}=10,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\-3&2\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0&1\\2&-5\end{vmatrix}=2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\-3&-5\end{vmatrix}=-2,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&0\\-3&2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}=2,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=1,$$

因此

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-5&2&-1\\10&-2&2\\7&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\5&-1&1\\\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

【注】 (1)$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,注意正、负号.

(2)注意 A_{ij} 在 A^* 中的位置:A_{11},A_{22},A_{33} 是主对角线元素,A 的上三角元素的代数余子式 A_{12},A_{13},A_{23} 放在 A^* 的下三角对称的位置上,同样,A_{21},A_{31},A_{32} 放在 A^* 的上三角对称的位置上.

方法二 用初等行变换求矩阵的逆矩阵:

$$[A \mid E]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[E \mid A^{-1}].$$

例 2.12 设 $A=\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$,求 A^{-1}.

解

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&2&-1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{①\leftrightarrow②}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{③+①}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[②+③]{①-2③}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&0&-1&-2\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}②}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&0&-1&-2\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{①-②}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right],$$

故
$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

【注】(1)关于用公式求数值矩阵的逆矩阵，由于求解 A^* 要计算 n^2 个 $n-1$ 阶行列式，同时还要计算 $|A|$，计算量较大，一般只适用于一些特殊的或阶数较低的矩阵. 但公式本身及矩阵可逆的充要条件在理论上很重要，要充分重视，且无论 $|A|$ 是否为零，$AA^*=|A|E$ 总是成立的. 用初等行变换求逆矩阵则是一种更方便且实用的方法，应熟练掌握. 注意运算正确，每年的试卷中这类数值运算的出错率是很高的.

(2)为了保证计算正确，求出的逆矩阵应予以验证：$AA^{-1}=E$ 或 $A^{-1}A=E$.

2. 求抽象矩阵的逆矩阵

方法一 利用定义求逆矩阵.

根据题设条件，找出一个矩阵 B，使 $AB=E$，则 A 可逆，且 $A^{-1}=B$.

例 2.13 设 A,B 均是 n 阶矩阵，且 $AB=A+B$，则(　　).

(A)$A-E$ 为可逆矩阵　　(B)$A+E$ 为可逆矩阵

(C)$A-2E$ 为可逆矩阵　　(D)$B+E$ 为可逆矩阵

解 应选(A).

因 $AB=A+B$，即
$$AB-A-B=O,\quad AB-A-B+E=E,$$
$$A(B-E)-(B-E)=E,$$
即
$$(A-E)(B-E)=E, \qquad (*)$$
故 $A-E$ 可逆，且
$$(A-E)^{-1}=B-E.$$

【注】(1)利用定义求逆矩阵，要求将矩阵满足的关系式 $AB=A+B$ 作恒等变形，化成"左端为待求逆矩阵与另一个矩阵的乘积，右端为单位矩阵"的形式.

(2)把矩阵的和、差关系化成乘积的一种方法是提取公因子，提公因子时，左边的矩阵(如 A)往左边提，右边的矩阵(如 $B-E$)往右边提.

(3)本题中式(*)成立已经说明 $A-E$ 可逆，当然也可在式(*)两边取行列式，说明 $|A-E|\neq 0$，从而先证 $A-E$ 可逆，再求 $(A-E)^{-1}$.

方法二 将 A 分解成若干个可逆矩阵的乘积.

若 $A=BC$，其中 B,C 均是可逆矩阵，则 A 可逆，且 $A^{-1}=C^{-1}B^{-1}$.

例 2.14 设 A,B 是同阶可逆方阵，且 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，证明 $A+B$ 是可逆矩阵，并求 $(A+B)^{-1}$.

证明 因 A,B 是可逆矩阵，故

$$A+B=A(E+A^{-1}B)=A(B^{-1}+A^{-1})B.$$

又因 $A,A^{-1}+B^{-1},B$ 可逆，故 $A+B$ 可逆，且

$$(A+B)^{-1}=[A(B^{-1}+A^{-1})B]^{-1}=B^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

【注】(1)要证 $A+B$ 可逆，并求 $(A+B)^{-1}$，应设法将 $A+B$ 化成已知可逆矩阵 $A,B,A^{-1}+B^{-1}$ 的乘积. 这里表面上 $A+B$ 没有公因子，但由于 A 可逆，故有

$$A+B=A+EB=A+AA^{-1}B=A(E+A^{-1}B).$$

同理，B 可逆，有

$$A(E+A^{-1}B)=A(B^{-1}B+A^{-1}B)=A(B^{-1}+A^{-1})B,$$

从而将 $A+B$ 化成了已知可逆矩阵的乘积. 提公因子是和、差化积的一个好办法.

(2)由 A,B 均可逆，并不能得出 $A+B$ 可逆，在增加条件 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆时，才能保证 $A+B$ 可逆.

3. 分块矩阵的逆

例 2.15 设

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\\1&3&0&0&0\\-1&2&0&0&0\end{bmatrix},$$

求 A^{-1}.

解 将 A 分块如下，

$$A=\left[\begin{array}{cc:ccc}0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\\\hdashline 1&3&0&0&0\\-1&2&0&0&0\end{array}\right]\xlongequal{记}\begin{bmatrix}O&B\\C&O\end{bmatrix},$$

其中，

$$B=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix}.$$

因

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad C^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix},$$

故

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

【注】 副对角线分块矩阵的逆,可推广如下,

$$A=\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix},$$

其中 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可逆,则 A 可逆,且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}.$$

例 2.16 已知 $A=\begin{bmatrix} B & O \\ D & C \end{bmatrix}$,其中 B 是 $r\times r$ 可逆矩阵,C 是 $s\times s$ 可逆矩阵.证明 A 可逆,并求 A^{-1}.

证明 因 $|A|=\begin{vmatrix} B & O \\ D & C \end{vmatrix}=|B||C|\neq 0$,故 A 可逆.设 $A^{-1}=\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$,由定义,有

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} B & O \\ D & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} BX & BY \\ DX+CZ & DY+CW \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix},$$

得

$$BX=E\Rightarrow X=B^{-1},\quad BY=O\Rightarrow Y=O(B\text{ 可逆}),$$

$$DX+CZ=O\Rightarrow Z=-C^{-1}DB^{-1}(X=B^{-1}),\quad DY+CW=E\Rightarrow W=C^{-1}(Y=O),$$

故

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

【注】 若

$$A_1=\begin{bmatrix} B & D \\ O & C \end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix} D & B \\ C & O \end{bmatrix},$$

其中 B,C 可逆,则有

$$A_1^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix},\quad A_2^{-1}=\begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix},\quad A_3^{-1}=\begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \end{bmatrix}.$$

请读者用本题的方法推得此类求逆公式,不必记忆,但应理解推导方法,要用时,临时推导即可.

三、伴随矩阵及其运算

例 2.17 设$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&2&0\\3&4&5\end{bmatrix}$，$A^*$是$A$的伴随矩阵，则$(A^*)^{-1}=$________.

分析 利用公式$AA^*=|A|E$. 当$|A|\neq 0$时，有$\frac{A}{|A|}A^*=E$，故$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$，这样不需要先求出A^*，再求$(A^*)^{-1}$.

解 应填$-\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&2&0\\2&2&0\\3&4&5\end{bmatrix}$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&2&0\\3&4&5\end{vmatrix}=-10\neq 0,$$

由公式$AA^*=|A|E$，得$\frac{A}{|A|}A^*=E$，故A^*可逆，且$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}=-\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&2&0\\2&2&0\\3&4&5\end{bmatrix}$.

例 2.18 设A是3阶矩阵，已知$A^{-1}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$，则$|A^*|=$________.

解 应填$\frac{1}{16}$.

由$AA^*=|A|E$，当A可逆时，有 $A^*=|A|A^{-1}$.

两边取行列式，得

$$|A^*|=\left||A|A^{-1}\right|=|A|^n\cdot|A^{-1}|=\frac{|A|^n}{|A|}=|A|^{n-1}=\frac{1}{|A^{-1}|^{n-1}},$$

其中$n=3$，

$$|A^{-1}|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-3&-1\\1&2&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=4,$$

故$|A^*|=\frac{1}{4^{3-1}}=\frac{1}{16}$.

例 2.19 设A,B是n阶方阵，$|A|=2$，$|B|=-4$，则$|2B^*A^{-1}|=$________.

解 应填$(-8)^{n-1}$.

因$|kA|=k^n|A|$，$|AB|=|A||B|$，$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$，$|B^*|=|B|^{n-1}$，故

$$|2B^*A^{-1}|=2^n|B^*||A^{-1}|=2^n|B|^{n-1}\cdot\frac{1}{|A|}=(-8)^{n-1}.$$

四、初等变换与初等矩阵

例 2.20 设 A 是 3 阶可逆矩阵，将 A 的第 1 行和第 2 行互换后得到矩阵 B，其中 $A^{-1}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，则 B 可逆，且 $B^{-1}=$__________.

解 应填 $\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$.

因

$$B=E_{12}A,$$

其中 $E_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，故 $B^{-1}=(E_{12}A)^{-1}=A^{-1}E_{12}^{-1}=A^{-1}E_{12}=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$.

例 2.21 设 A 是 3 阶矩阵，将 A 的第 1 列与第 2 列互换得到 B，再将 B 的第 2 列加到第 3 列得到 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为(   ).

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

解 应选(D).

将 A 的第 1 列与第 2 列互换得到 B，即

$$AE_{12}=A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=B.$$

再将 B 的第 2 列加到第 3 列得到 C，即

$$BE_{23}(1)=B\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=C,$$

从而有

$$(AE_{12})E_{23}(1)=AE_{12}E_{23}(1)=A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=AQ=C,$$

其中 $Q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，故应选(D).

五、矩阵方程

含有未知矩阵的方程称为**矩阵方程**.

解矩阵方程,应先根据题设条件和矩阵的运算规则,将方程进行恒等变形,使方程化成 $AX=B$, $XA=B$ 或 $AXB=C$ 的形式.

若 A,或 A 且 B 可逆,则分别可得解为 $X=A^{-1}B$, $X=BA^{-1}$, $X=A^{-1}CB^{-1}$.

例 2.22 设 3 阶方阵 A,B 满足 $A^{-1}BA=6A+BA$,且

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{bmatrix},$$

求 B.

解 显然 A 可逆,方程两边右乘 A^{-1},得

$$A^{-1}B=6E+B,$$

即

$$(A^{-1}-E)B=6E,\quad B=6(A^{-1}-E)^{-1}.$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{bmatrix},\quad A^{-1}-E=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix},\quad (A^{-1}-E)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

得

$$B=6(A^{-1}-E)^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

例 2.23 设矩阵 A 的伴随矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix},$$

且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$,其中 E 是 4 阶单位矩阵,求矩阵 B.

解 由题设条件得

$$(A-E)BA^{-1}=3E,$$

$$B=3(A-E)^{-1}A \qquad ①$$

$$=3(A-E)^{-1}(A^{-1})^{-1}$$

$$=3[A^{-1}(A-E)]^{-1}=3(E-A^{-1})^{-1} \qquad ②$$

$$=3\left(E-\frac{A^*}{|A|}\right)^{-1},$$

其中由 $AA^*=|A|E$，$|A^*|=|A|^{n-1}$，得 $|A|^3=|A^*|=8$，即 $|A|=2$，故 $B=3\left(E-\dfrac{A^*}{|A|}\right)^{-1}=6(2E-A^*)^{-1}$.

由 $$2E-A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix},\quad (2E-A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix},$$

可得 $$B=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}.$$

【注】 化简到表达式①或②，即可直接计算 B，但要先求出 A 或 A^{-1}，此时还必须利用 $AA^*=|A|E$ 及 $|A|^3=|A^*|$ 求出 $|A|$，并由 A^* 求出 A 或 A^{-1}.

六、矩阵的秩和等价矩阵

例 2.24 若矩阵 $\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&0&t&0\\0&-4&5&-2\end{bmatrix}$ 的秩为 2，则 $t=($ $)$.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

解 应选(D).

已知该矩阵的秩为 2，因此，它的所有 3 阶子式都为零，于是只要计算出其中含待定常数 t 的一个 3 阶子式即可求出 t 的值.

方法一 由 $\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&0&t\\0&-4&5\end{vmatrix}=-12+4t=0$，得 $t=3$.

方法二 对该矩阵作初等变换，有

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&0&t&0\\0&-4&5&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{②-2①}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&t+2&-2\\0&-4&5&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{③-②}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&t+2&-2\\0&0&3-t&0\end{bmatrix},$$

知当 $t=3$ 时，该矩阵的秩为 2. 故本题应选择(D).

例 2.25 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&a\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

(1)当 a 为何值时，矩阵 A 和 B 等价；

(2)当 A 和 B 等价时，求一个可逆矩阵 P，使得 $PA=B$.

解 (1)A,B 同型，A 等价于 $B\Leftrightarrow r(A)=r(B)$.

对于 $\boldsymbol{B}$，显然有 $r(\boldsymbol{B})=2$.

对于 $\boldsymbol{A}$，因 $\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}\neq 0$，要求 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$，故应有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & a+4\end{vmatrix}=-(a+4)=0,$$

解得 $a=-4$.

因此，当 $a=-4$ 时，有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 等价.

(2)当 $a=-4$ 时，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -4\end{bmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，消 a_{21},a_{32} 为零. 因

$$\boldsymbol{E}_{21}(1)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -4\end{bmatrix}=\boldsymbol{C},$$

$$\boldsymbol{E}_{32}(2)\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},$$

故有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{32}(2)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}_{32}(2)\boldsymbol{E}_{21}(1)\boldsymbol{A}.$$

取

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}_{32}(2)\boldsymbol{E}_{21}(1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix},$$

使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.

【注】 本题(2)若改为求满足条件的全部矩阵 $\boldsymbol{P}$，可用下述方法.

解 考虑 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，将 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 按列分块为 $[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]$.

$$[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\mid\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -4 & 1 & 2 & 0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

解得

$$\boldsymbol{\xi}_1=k_1\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=k_2\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=k_3\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix},$$

则有

$$P^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2k_1+1 & 2k_2+1 & 2k_3\\ 2k_1 & 2k_2+1 & 2k_3\\ k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix},$$

此时，

$$P=\begin{bmatrix}2k_1+1 & 2k_1 & k_1\\ 2k_2+1 & 2k_2+1 & k_2\\ 2k_3 & 2k_3 & k_3\end{bmatrix},$$

其中，因为 P 可逆，则 $k_3\neq0$，即 k_1,k_2 为任意常数，k_3 为任意非零常数.

基础习题精练

习 题

2.1 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -4 & 2\\ 3 & 6 & -3\end{bmatrix}$，则 $A^n=$________.

2.2 设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$，计算 $A^n(n\geqslant2)$.

2.3 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $(ABC)^{-1}=$________.

2.4 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$.

(1)证明 $A,A+2E$ 可逆，并求 A^{-1} 及 $(A+2E)^{-1}$；

(2)当 $A\neq E$ 时，判别 $A-2E$ 是否可逆，并说明理由.

2.5 设 $n(n\geqslant2)$ 阶矩阵 A 可逆，A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，则(　　).

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$　　(B) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$

(C) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$　　(D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$

2.6 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$________.

2.7 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得到 B，再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得到 C，记

$$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

则( ).

(A)$C=P^{-1}AP$ (B)$C=PAP^{-1}$

(C)$C=P^{T}AP$ (D)$C=PAP^{T}$

2.8 设4阶矩阵

$$B=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix},$$

且矩阵A满足关系式$A(E-C^{-1}B)^{T}C^{T}=E+A$,求矩阵$A$.

2.9 设3阶矩阵$A=\begin{bmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{bmatrix}$,其中$b\neq0$,已知$A$的伴随矩阵$A^*$的秩为$r(A^*)=1$,则$a,b$应满足关系( ).

(A)$a=b$ (B)$a=-2b$ (C)$a=0$ (D)$a=2b$

2.10 设A是4×3矩阵,B是3×4的非零矩阵,且满足$AB=O$,其中

$$A=\begin{bmatrix}1&2&t\\3&t&18\\2&4&2t\\1&8-t&4t-18\end{bmatrix},$$

则( ).

(A)当$t\neq6$时,必有$r(B)=1$ (B)当$t=6$时,必有$r(B)=2$

(C)当$t\neq6$时,必有$r(B)=2$ (D)当$t=6$时,必有$r(B)=1$

解答

2.1 $(-6)^{n-1}\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-4&2\\3&6&-3\end{bmatrix}$ 解

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-4&2\\3&6&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}[1,2,-1]\overset{\text{记}}{=\!=}\alpha\beta^{T},$$

则 $$A^n=(\alpha\beta^{T})^n=(\alpha\beta^{T})(\alpha\beta^{T})\cdots(\alpha\beta^{T})=\alpha(\beta^{T}\alpha)\cdots(\beta^{T}\alpha)\beta^{T}=(\beta^{T}\alpha)^{n-1}\alpha\beta^{T},$$

其中$\beta^{T}\alpha=[1,2,-1]\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}=-6$,故$A^n=(-6)^{n-1}\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-4&2\\3&6&-3\end{bmatrix}$.

2.2 解 因为

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&0\\2&0&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}=2A,$$

$$A^4=A^3A=2AA=2A^2,$$

故
$$A^n=\begin{cases}2^{k-1}A^2, & n=2k,\\ 2^kA, & n=2k+1,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots.$$

2.3 $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}&1&0\end{bmatrix}$ 解

$$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}&1&0\end{bmatrix}.$$

2.4 (1)证明 因 $A^2-3A+2E=O$,故 $A(A-3E)=-2E$,即

$$A\left[-\frac{1}{2}(A-3E)\right]=E,$$

故 A 可逆,且 $A^{-1}=-\frac{1}{2}(A-3E)$.

又 $$A^2-3A+2E=(A+2E)(A-5E)+10E+2E=(A+2E)(A-5E)+12E=O,$$

故 $A+2E$ 可逆,且 $(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{12}(A-5E)$.

(2)解 因 $A^2-3A+2E=(A-2E)(A-E)=O$,当 $A\neq E$ 时,$A-E\neq O$,则 $(A-2E)x=0$ 有非零解,故 $A-2E$ 不可逆.

2.5 (C) 解 由 $A^*=|A|A^{-1}$,得 $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}$,又 $|A^*|=|A|^{n-1}$,故

$$(A^*)^*=|A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A.$$

2.6 $-\frac{1}{16}A$ 解 由 $(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$,又

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&-2\\0&-2&0&-2\\0&-2&-2&0\end{vmatrix}=-16,$$

所以
$$(A^*)^{-1}=-\frac{1}{16}A.$$

2.7 (B) **解** 将 A 的第 2 行加到第 1 行得到 B,即

$$B=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}A=PA.$$

将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得到 C,即

$$C=B\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记}}BQ.$$

因

$$PQ=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E,$$

故 $Q=P^{-1}$,从而有 $C=BQ=BP^{-1}=PAP^{-1}$,故应选(B).

2.8 **解** 因 $(E-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}=[C(E-C^{-1}B)]^{\mathrm{T}}=(C-B)^{\mathrm{T}}$,故

$$A(E-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}=A(C-B)^{\mathrm{T}},$$

从而
$$A(C-B)^{\mathrm{T}}-A=E,$$

则
$$A[(C-B)^{\mathrm{T}}-E]=A(C-B-E)^{\mathrm{T}}=E.$$

显然 $(C-B-E)^{\mathrm{T}}$ 可逆,则

$$A=[(C-B-E)^{\mathrm{T}}]^{-1},$$

将 C,B,E 代入上式,得

$$A=\left[\left(\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1}$$

$$=\left(\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.$$

【注】 再次提醒读者:解这类矩阵方程,应先将方程变形,再化简,最后代入具体数值矩阵进行运算.因为通过化简可使步骤清晰,并减少计算量.评分标准也是化简有化简的分数,计算有计算的分数,按步骤给分.

2.9 (B) **解** $r(A^*)=1\Rightarrow r(A)=2$.对 A 作初等变换,有

$$A=\begin{bmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-\text{①}}\begin{bmatrix}a&b&b\\b-a&a-b&0\\b-a&0&a-b\end{bmatrix}\xrightarrow{[1]+[2]+[3]}\begin{bmatrix}a+2b&b&b\\0&a-b&0\\0&0&a-b\end{bmatrix}.$$

$r(\boldsymbol{A})=2 \Leftrightarrow a\neq b$ 且 $a=-2b$,因 $b\neq 0$,故 $a=-2b(a\neq 0)$.

2.10 (A) **解** 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$,$\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵,故 $r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$.

因

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & t\\ 3 & t & 18\\ 2 & 4 & 2t\\ 1 & 8-t & 4t-18\end{bmatrix}\xrightarrow[④-①]{\substack{②-3①\\③-2①}}\begin{bmatrix}1 & 2 & t\\ 0 & t-6 & 18-3t\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 6-t & 3t-18\end{bmatrix}\xrightarrow{④+②}\begin{bmatrix}1 & 2 & t\\ 0 & t-6 & 18-3t\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

当 $t\neq 6$ 时,$r(\boldsymbol{A})=2\Rightarrow r(\boldsymbol{B})=1$,故(A) 成立,(C)不成立;

当 $t=6$ 时,$r(\boldsymbol{A})=1\Rightarrow r(\boldsymbol{B})=1$ 或 $r(\boldsymbol{B})=2$,故(B),(D)不成立.

第3讲 向量组

基础知识结构

- 向量与向量组的线性相关性
  - 向量定义
  - 线性组合
  - 线性表出
    - 能表出
    - 不能表出
  - 线性相关性
    - 相关
    - 无关
  - 判别线性相关性的七大定理
- 极大线性无关组与向量组的秩
  - 极大线性无关组
    - 定义
    - 求法
  - 向量组的秩
    - 定义
    - 重要定理和公式
- 等价向量组
  - 定义
  - 判别
  - 与等价矩阵的区别
- 向量空间（仅数学一要求）
  - 概念
    - 基
    - 坐标
    - 维数
  - 基变换与坐标变换
    - 变换公式
    - 过渡矩阵

基础内容精讲

一、线性代数中的一号人物——向量

有了前面行列式和矩阵这两个话题的铺垫，可以让**线性代数的主人翁——向量**出场了. 前面指出，矩阵中的若干个行(列)都是向量，它们之间存在着某种联系，这种联系说到底就是**线性无关的向量个数(独立信息的个数)的问题**，也就是若干个向量组成的向量组中，其中某几个就足够代表这个向量组了，其他的向量都可以由这几个向量线性表示出来. 比如，向量组[1,2,3]，[6,7,9]与[2,4,6]，有三个成员，可是[2,4,6]这个向量可以由[1,2,3]这个向量的2倍来表示，于是[2,4,6]这个向量就是"多余"的，不是独立的信息.

进一步地，我们可以通过仔细排查，找到在一个向量组中，能够代表该向量组中所有成员的一组向量，比如上面这个向量组的[1,2,3]和[6,7,9]，把它们组成的向量组叫作原向量组的**极大线性无关组，这个组就是原向量组的"代表"**. 今后会发现，这个"代表"中的向量的个数对于同一个向量组来说，是唯一的，事实上，**"代表"中向量的个数就是独立信息的个数，这个个数就叫作向量组的秩**. 秩就是独立信息的个数，就是"代表"中有这几个独立信息就足够表示其他所有的信息了.

极大线性无关组是向量组的"代表"，而矩阵就是由向量组拼成的，所以**矩阵的秩、向量组的秩都反映了"代表"中向量的个数，本质完全相同.**

读者研读完这一部分就会得出下面这个**重要结论**：我们致力于搞清楚的就是**向量与向量之间的关系——这种关系"非白即黑"——要么线性无关("独立")，要么线性相关("多余")**. 在充斥着诸多抽象理论和方法的向量组问题上，只有把握住上述重要结论，才不会迷失方向.

二、向量及向量组的线性相关性

1. 向量的概念和运算

n维向量　n个数构成的一个有序数组$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$称为一个n维向量，记成$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，并称$\boldsymbol{\alpha}$为$n$维行向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$称为$n$维列向量，其中$a_i$称为向量$\boldsymbol{\alpha}$(或$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$)的第$i$个分量.

相等　若$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]$都是$n$维向量，则当且仅当$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

加法　$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\xlongequal{def}[a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]$($\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$同上).

数乘　$k\boldsymbol{\alpha}\xlongequal{def}[ka_1,ka_2,\cdots,ka_n]$($\boldsymbol{\alpha}$同上，$k$为实数).

2. 向量组的线性表出与线性相关的概念

线性组合　设有m个n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$及$m$个数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，则向量

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

称为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的线性组合.

线性表出　若向量$\boldsymbol{\beta}$能表示成向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的线性组合，即存在$m$个数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称向量$\boldsymbol{\beta}$能被向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表出.

线性相关 对 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

含有零向量或有成比例的向量的向量组必线性相关.

线性无关 若不存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 成立，就称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关；亦即只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

单个非零向量，两个不成比例的向量均线性无关.

向量组或线性相关或线性无关，二者必居其一且仅居其一.

3. 判别线性相关性的七大定理

定理 1 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n(n\geqslant 2)$线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量可由其余的$n-1$个向量线性表出.

【注】 **证明** 先证必要性. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n(n\geqslant 2)$ 线性相关，则存在 n 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}.$$

不妨设 $k_1\neq 0$，于是由向量的线性运算规则得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3-\cdots-\frac{k_n}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_n.$$

再证充分性. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1=l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

于是有

$$1\boldsymbol{\alpha}_1-l_2\boldsymbol{\alpha}_2-l_3\boldsymbol{\alpha}_3-\cdots-l_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}.$$

显然 $1,-l_2,-l_3,\cdots,-l_n$ 不全为零，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

其逆否命题：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n(n\geqslant 2)$线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中任一向量都不能由其余的 $n-1$ 个向量线性表出.

定理 2 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示法唯一.

【注】 **证明** 因为 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，所以存在不全为零的数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

其中 $k\neq 0$(如果 $k=0$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，得 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 必须全为零，这与 $k,k_1,k_2,\cdots,k_n$ 不全为零矛盾)，于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_n}{k}\boldsymbol{\alpha}_n.$$

再证表示法唯一，设有两种不同的表示法，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n\\&=h_1\boldsymbol{\alpha}_1+h_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+h_n\boldsymbol{\alpha}_n,\end{aligned}$$

于是

$$(l_1-h_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2-h_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(l_n-h_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,所以必有

$$l_i-h_i=0,\text{即 } l_i=h_i,i=1,2,\cdots,n,$$

与假设矛盾,故 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示的表示法唯一.

定理3 如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,且 $t>s$,则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关(以少表多,多的相关).

【注】 以 $t=3,s=2$ 来证明,便于读者理解.

证明 设 $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{21}\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_2=k_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_3=k_{13}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{23}\boldsymbol{\alpha}_2,\end{cases}$ 欲证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关,只需证存在不全为零的数 l_1,l_2,l_3,使得

$$l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2+l_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0},$$

即

$$l_1(k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{21}\boldsymbol{\alpha}_2)+l_2(k_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2)+l_3(k_{13}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{23}\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0},$$

整理得

$$(k_{11}l_1+k_{12}l_2+k_{13}l_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_{21}l_1+k_{22}l_2+k_{23}l_3)\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}. \quad (*)$$

当 $\begin{cases}k_{11}l_1+k_{12}l_2+k_{13}l_3=0,\\ k_{21}l_1+k_{22}l_2+k_{23}l_3=0\end{cases}$ 时,显然(*)式成立,而这个方程组是3个未知数 l_1,l_2,l_3,2个方程的情形,未知数个数大于方程个数,必有非零解,即存在不全为零的数 l_1,l_2,l_3,故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

其等价命题:如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关,则 $t\leqslant s$.

定理4 设 m 个 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$,其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2}]^{\mathrm{T}},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{\alpha}_m=[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm}]^{\mathrm{T}}.$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \quad (*)$$

有非零解,其中

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{bmatrix}.$$

【注】 证明　设
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},\tag{$**$}$$
即
$$x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix}+\cdots+x_m\begin{bmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}.\tag{$***$}$$

将($***$)式左端写成矩阵形式,即得线性方程组($*$).因此如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关,就必有不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_m$使($**$)式成立,即齐次线性方程组($*$)有非零解;反之,如果线性方程组($*$)有非零解,也就是有不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_m$使($**$)式成立,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.定理得证.

其等价命题:m个n维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的充分必要条件是齐次线性方程组($*$)只有零解.

【注1】 如果$n<m$,即方程个数小于未知数个数,线性方程组($*$)求解时必有自由未知量,即必有非零解.因此任何$n+1$个n维向量都是线性相关的.所以在n维向量空间中,任何一个线性无关的向量组最多只能含n个向量.

【注2】 n个n维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性相关$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解.反之则有,

n个n维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$仅有零解.

定理5　仿定理4的研究方法,便有

向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出

$$\Leftrightarrow\text{非齐次线性方程组}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_sx_s=\boldsymbol{\beta}\text{有解}$$

$$\Leftrightarrow r([\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s])=r([\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}]).$$

反之则有,向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出$\Leftrightarrow[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_sx_s=\boldsymbol{\beta}$无解$\Leftrightarrow r([\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s])\neq r([\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}])$.

定理6　如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中有一部分向量线性相关,则整个向量组也线性相关.

【注】 证明　不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j(j<m)$线性相关,于是有不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_j$,使
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_j\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{0}.$$
从而有不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_j,0,\cdots,0$,使
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_j\boldsymbol{\alpha}_j+0\boldsymbol{\alpha}_{j+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$
故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$也线性相关.

其逆否命题：如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则其任一部分向量组都线性无关.

总之，向量组部分线性相关，则整体也线性相关；整体线性无关，则任一部分都线性无关.

定理 7 如果一组 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，那么把这些向量各任意添加 m 个分量所得到的新向量($n+m$ 维)组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s^*$ 也是线性无关的；如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，那么它们各去掉相同的若干个分量所得到的新向量组也是线性相关的.

【注】 事实上，对于

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s],\quad \boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s^*],$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s^*$ 是分别在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 后面任加 m 个分量得到的. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，即齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 显然也只有零解(即 $\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s^*$ 也线性无关)；反之，如果 $\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s^*$ 线性相关，即 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 也有非零解(即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性相关).

三、极大线性无关组、等价向量组、向量组的秩

1. 极大线性无关组

在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中，若存在部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足：

①$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关；

②向量组中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出.

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是原向量组的极大线性无关组.

向量组的极大线性无关组一般不唯一，只由一个零向量组成的向量组不存在极大线性无关组，一个线性无关向量组的极大线性无关组就是该向量组本身.

2. 等价向量组

设两个向量组：(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$. 若(Ⅰ)中每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 均可由(Ⅱ)中向量线性表出，则称向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表出；若向量组(Ⅰ)，(Ⅱ)可以相互线性表出，则称向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)是等价向量组，记作(Ⅰ)$\cong$(Ⅱ).

等价向量组满足：

①(Ⅰ)$\cong$(Ⅰ)(反身性)；

②若(Ⅰ)$\cong$(Ⅱ)，则(Ⅱ)$\cong$(Ⅰ)(对称性)；

③若(Ⅰ)$\cong$(Ⅱ)，(Ⅱ)$\cong$(Ⅲ)，则(Ⅰ)$\cong$(Ⅲ)(传递性).

向量组和它的极大线性无关组是等价向量组.

【注】 读者应注意等价矩阵和等价向量组概念的区别.

3. 向量组的秩

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组的秩，记作

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r \text{ 或 } r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r.$$

等价向量组具有相等的秩，反之未必成立.

无水印版由【公众号：小盆学长】免费提供

4. 有关向量组的秩的重要定理和公式

(1)三秩相等.

$r(\boldsymbol{A})$(矩阵的秩)$=\boldsymbol{A}$ 的行秩($\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩)$=\boldsymbol{A}$ 的列秩($\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩).

(2)若 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}$,则

①$\boldsymbol{A}$ 的行向量组和 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组是等价向量组;

②$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的任何相应的部分列向量组具有相同的线性相关性.

(3)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$. 若 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,则

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s).$$

四、向量空间(仅数学一要求)

1. 基本概念

若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的线性无关的有序向量组,则任一向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$ 均可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性表出,记表出式为

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n.$$

称有序向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基,基向量的个数 n 称为向量空间的维数,而$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$($[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$)称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 下的坐标,或称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标行(列)向量.

2. 基变换、坐标变换

定理 8　若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 和 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个基,且有关系

$$[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n]=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\boldsymbol{C},\tag{$*$}$$

则($*$)式称为由基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的基变换公式,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为由基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵,$\boldsymbol{C}$ 的第 i 列即是 $\boldsymbol{\eta}_i$ 在基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 下的坐标,且过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵.

定理 9　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下的坐标分别是 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}$,即

$$\boldsymbol{\alpha}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n]\boldsymbol{y}.$$

又基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$,即

$$[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n]=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\boldsymbol{C},$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n]\boldsymbol{y}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

得

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}\text{ 或 }\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}.\tag{$**$}$$

($**$)式称为坐标变换公式.

基础例题精解

一、向量组的线性表出与线性相关

其理论依据是本讲"基础内容精讲"中的"二"的"2. 向量组的线性表出与线性相关的概念"与"3. 判别线性相关性的七大定理".

例 3.1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 s 个 n 维向量,下列论断正确的是( ).

(A)若 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

(B)已知存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_{s-1}$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+0\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出

(C)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则任一向量均可由其余向量线性表出

(D)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关

解 应选(D).

(A)不正确.因 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出,并不能排除别的向量能由其余向量线性表出,如 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,0]$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,2]$,虽然 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出,但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(B)不正确.因使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的线性组合系数不唯一(特别是 $\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 时,显然 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 仍可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出).当存在另一组不全为零的数 $l_1,l_2,\cdots,l_s(l_s\neq0)$,使等式

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

成立时,$\boldsymbol{\alpha}_s$ 仍可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出.例如:$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,2]$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[3,3]$,有 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,但又有 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

(C)不正确.例如 $\boldsymbol{\alpha}_1=[0,0]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0]$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出,但 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表出.

(D)正确.因若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性无关,而已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,故由定理 2 知,$\boldsymbol{\alpha}_s$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出(且表出法唯一),这和已知矛盾,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关.

例 3.2 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$ 线性无关,问:

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出?证明你的结论;

(2)$\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出?证明你的结论.

解 (1)$\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

方法一 由已知 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$ 线性无关,得 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出(且表出法唯一).

方法二 因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,故存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

其中,$k_1\neq0$.若 $k_1=0$,则 $k_2,k_3,\cdots,k_s$ 不全为零,则 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,从而 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$ 线性相关,这和已知矛盾,故 $k_1\neq0$,故有

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{1}{k_1}(k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)\xlongequal{\text{记}}l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s. \qquad (*)$$

(2)$\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出.用反证法.设$\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出,

$$\boldsymbol{\alpha}_{s+1}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

由(1),将(*)式$\boldsymbol{\alpha}_1=l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s$代入上式,得

$$\boldsymbol{\alpha}_{s+1}=(\lambda_1l_2+\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_1l_3+\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+(\lambda_1l_s+\lambda_s)\boldsymbol{\alpha}_s,$$

则$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$线性相关,这和已知矛盾,故$\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出.

【注】 考研真题"设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.问:(1)$\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出?证明你的结论;(2)$\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出?证明你的结论."是由本题改编而得,由本书作者之一在当年命题时编制,而考生做得并不理想.

例 3.3 已知4维列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,则下列向量组中线性无关的是( ).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

解 应选(D).

方法一 排除法.

(A)$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$;

(B)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$;

(C)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$.

故(A),(B),(C)均是线性相关的向量组,由排除法,应选(D).

方法二

$$[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},$$

两边取行列式,因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,则$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|\neq0$.又

$$\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0,$$

故$|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1|\neq0$,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关,应选(D).

例 3.4 设$a_1,a_2,\cdots,a_s$是s个互不相同的数,试讨论s个n维列向量$\boldsymbol{\alpha}_i=[1,a_i,a_i^2,\cdots,a_i^{n-1}]^{\mathrm{T}}$$(i=1,2,\cdots,s)$的线性相关性.

解 若$s>n$,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关(向量个数超过向量维数时,向量组必线性相关).

若$s=n$,则由范德蒙德行列式,

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq 0$$

知，方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$ 有唯一零解，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

若 $s<n$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关(整体)知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s<n)$ 线性无关(部分).

综上，当 $s>n$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关；当 $s\leqslant n$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

例 3.5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 都是 $n(n\geqslant 3)$ 维向量，且 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

分析 只要找到不全为零的数 k_1,k_2,k_3，使

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$$

即可.

证明 设有数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0},$$

代入题设条件，得

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0},$$

整理得

$$(k_1+k_2+3k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1-2k_2+2k_3)\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}.$$

要使上式成立，不论 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是否线性相关，只需

$$\begin{cases}k_1+k_2+3k_3=0,\\k_1-2k_2+2k_3=0\end{cases}\qquad①$$

即可. 由方程组①求得一个解为 $k_1=8,k_2=1,k_3=-3$，故

$$8\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0},$$

从而得证：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

【注】 本题中3个向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 由2个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，由定理3知“以少表多，多的相关”，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，本题的证明思路即是定理3的证明思路.

例 3.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$，且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证明 设有一组常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\qquad①$$

式①两端左乘 $\boldsymbol{A}^{k-1}$，得

$$\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

由题设条件 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，知 $\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{k+2}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=\boldsymbol{A}^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，从而得 $\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

由于 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，故 $\lambda_1=0$，代入式①得

$$\lambda_2\boldsymbol{A\alpha}+\lambda_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.\qquad②$$

将式②两端左乘 A^{k-2},同上可证 $\lambda_2=0$. 同理可证 $\lambda_3=\lambda_4=\cdots=\lambda_k=0$,从而得证 $\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

二、极大线性无关组及向量组秩的求法

在掌握了向量组线性相关与线性无关的基本概念后,需要进一步确定某向量组的极大线性无关组,并确定该向量组的秩.

例 3.7 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 $r(r<s)$,则下列说法错误的是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个由 r 个向量组成的部分组线性无关

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何 r 个线性无关向量组成的部分组与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是等价向量组

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何 r 个向量的部分组都线性无关

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何 $r+1$ 个向量的部分组都线性相关

解 应选(C).

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$,由定义,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中最大的线性无关的部分向量组中的向量个数是 r,故至少有一个包含 r 个向量的部分组线性无关,(A)成立. 向量组的极大无关组不一定是唯一的,任何包含 r 个向量的线性无关部分组均是极大线性无关组,均与原向量组等价,故(B)成立. 因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中最大的线性无关部分组的向量个数为 r,所以任何 $r+1$ 个向量的部分组都线性相关,因此(D)成立. 故由排除法知应选(C).

事实上,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$,并非 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何 r 个向量都线性无关,如 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1]^{\mathrm{T}},r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$,但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性相关的. 故选项(C)不成立,应选(C).

例 3.8 设向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,2,4]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=[0,3,1,2]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=[3,0,7,14]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_4=[1,-2,2,0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_5=[2,1,5,10]^{\mathrm{T}}$,则该向量组的极大线性无关组是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$

解 应选(B).

将向量组合并成矩阵 A,并作初等行变换,化成阶梯形矩阵.

$$A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5]=B.$$

B 的极大线性无关组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 或 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 或 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5$ 或 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 或 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5$ 或 $\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 对应的极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$. 对照选项可知,应选(B).

【注】 列向量组经初等行变换,化成新的列向量组,即

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s],$$

因$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$和$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$是同解方程组,故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$有相同的线性相关性.同样,任何对应的部分向量组

$$[\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}],$$

因$[\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$和$[\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解,故$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$和$\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$有相同的线性相关性.

例 3.9 求向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=[1,2,1,3]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=[1,1,-1,1]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_3=[1,3,3,5]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_4=[4,5,-3,6]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_5=[-3,-5,-2,-7]^{\mathrm{T}}$$

的秩、极大线性无关组,并将其余的向量用极大线性无关组线性表出.

解 用列向量组作初等行变换,因初等行变换将方程组变成同解方程组,故变换前后的任何相应的部分(或全部)列向量组成的方程组仍同解,即它们具有相同的线性相关性.

$$\begin{bmatrix}1&1&1&4&-3\\2&1&3&5&-5\\1&-1&3&-3&-2\\3&1&5&6&-7\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{③-① \\ ④-3①}]{②-2①}\begin{bmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-7&1\\0&-2&2&-6&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[④-2②]{③-2②}\begin{bmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&0&0&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{(-1)② \\ (-1)③}]{①+②}\begin{bmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\boldsymbol{\beta}_3',\boldsymbol{\beta}_4',\boldsymbol{\beta}_5'].$$

由右端阶梯形矩阵知$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)=3$,由$\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\boldsymbol{\beta}_4'$线性无关(由第1,2,4列组成的齐次线性方程组有唯一零解推得)知,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$线性无关,是原向量组的极大线性无关组,$\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_5$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$线性表出,由方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1'x_1+\boldsymbol{\beta}_2'x_2+\boldsymbol{\beta}_4'x_3=\boldsymbol{\beta}_3',\\ \boldsymbol{\beta}_1'y_1+\boldsymbol{\beta}_2'y_2+\boldsymbol{\beta}_4'y_3=\boldsymbol{\beta}_5',\end{cases}$$

可解得

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_3'=2\boldsymbol{\beta}_1'-\boldsymbol{\beta}_2'+0\boldsymbol{\beta}_4',\\ \boldsymbol{\beta}_5'=-3\boldsymbol{\beta}_1'-4\boldsymbol{\beta}_2'+\boldsymbol{\beta}_4',\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_5=-3\boldsymbol{\beta}_1-4\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_4.\end{cases}$$

【注】(1)将向量组处理成行向量并作初等列变换,其效果和将向量组处理成列向量并作初等行变换是一样的.

(2)向量组(或矩阵)的秩是唯一的,其极大线性无关组可以是不唯一的. 本题中除 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 外,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4;\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_5;\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_5$ 等均是向量组的极大线性无关组,其余向量由极大线性无关组表出时,表出法唯一.

(3)求向量组的极大线性无关组时,只能都作初等行变换(或都作初等列变换),不能既作初等行变换又作初等列变换.

三、有关秩的证明题

例 3.10 证明:$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

分析 对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$,若任一 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,则 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$. 这是本题证明的关键依据.

证明 不妨设 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times s}$. 将 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}$ 按行分块为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\gamma}_m\end{bmatrix}$,于是

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\boldsymbol{\beta}_1+a_{12}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\beta}_n\\ a_{21}\boldsymbol{\beta}_1+a_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{\beta}_n\\ \vdots\\ a_{m1}\boldsymbol{\beta}_1+a_{m2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\beta}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\gamma}_m\end{bmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量 $\boldsymbol{\gamma}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 均可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量线性表出,故

$$r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B}).$$

同理可证 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})$,故有 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

例 3.11 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均是 $m\times s$ 矩阵,证明:$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}])\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

证明 设 $r(\boldsymbol{A})=p,r(\boldsymbol{B})=q$,将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 按列分块为

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s],\quad \boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s],$$

于是

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s],$$
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s].$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 均可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出,故

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]).$$

不妨设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大线性无关组分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q$,将 $\boldsymbol{A}$ 的极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 扩充成$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$的极大线性无关组,不妨设为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_w$,显然 $w\leqslant q$,故有

$$r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}])=p+w\leqslant p+q=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}),$$

故 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}])\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

例 3.12 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geqslant2)$ 阶方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 证明:

$$r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n,\\ 1, & r(A)=n-1,\\ 0, & r(A)<n-1.\end{cases}$$

分析 证明前，①应先研究已知条件及其等价条件是什么. 例如，已知 $r(A)=n$（应联想到）$\Leftrightarrow|A|\neq 0\Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow A$ 的列向量组、行向量组线性无关 $\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解等.

$r(A)=n-1$，应想到 $|A|=0$，但存在 $n-1$ 阶子式不为零，故至少有一个 $|A|$ 中元素的余子式和代数余子式不为零.

$r(A)<n-1$，则 $|A|$ 中全部元素的代数余子式都为零.

②再研究要证什么. 要证 $r(A^*)=n$，可证 $|A^*|\neq 0$，证 A^* 可逆，证 $A^*x=0$ 只有零解，且应想到 A^* 是什么样的矩阵.

③已知条件和要证结论之间有何种联系：$AA^*=A^*A=|A|E$.

证明 当 $r(A)=n$ 时，A 可逆，$|A|\neq 0$，由 $AA^*=|A|E$ 知，A 和 A^* 均是可逆矩阵，故 $r(A^*)=n$.（或两边取行列式，得 $|AA^*|=|A||A^*|=||A|E|=|A|^n$，$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，$r(A^*)=n$.）

当 $r(A)=n-1$ 时，由矩阵的秩的定义知，$|A|$ 中存在 $n-1$ 阶子式不等于零，而 A^* 由 $|A|$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 组成，故 $r(A^*)\geqslant 1$. 又 $r(A)=n-1$，$|A|=0$，$AA^*=|A|E=O$，得 $r(A)+r(A^*)\leqslant n$，而 $r(A)=n-1$，故 $r(A^*)\leqslant 1$（或 A^* 的每一列均是 $Ax=0$ 的解向量，因 $r(A)=n-1$，故 $r(A^*)\leqslant 1$），所以 $r(A^*)=1$.

当 $r(A)<n-1$ 时，由 A 的秩的定义知，$|A|$ 的代数余子式全部为零，即 A^* 的全部元素为零，$A^*=O$，故 $r(A^*)=0$.

【注】 (1) 上述过程是可逆的，即 $r(A)=n\Leftrightarrow r(A^*)=n$，$r(A)=n-1\Leftrightarrow r(A^*)=1$，$r(A)<n-1\Leftrightarrow r(A^*)=0$. 考题也考过这些.

(2) 由本题可知，A^* 的秩只有三种情况：$n,1,0$. 对 A^* 行（列）向量组而言，只有三种情况：n 行（列）线性无关；n 行（列）两两成比例；行（列）向量全部是零向量.

四、等价矩阵和等价向量组

(1) 向量组等价和矩阵等价是两个不同的概念. 矩阵等价要同型，当然行数、列数都要相等；向量组等价要同维，但向量个数可以不等.

(2) A,B 同型时，$A\cong B\Leftrightarrow r(A)=r(B)\Leftrightarrow PAQ=B$（$P,Q$ 是可逆矩阵）.

(3) $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j\,(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$ 同维，则

$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$

$\Leftrightarrow\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 与 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 可以相互表出

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$，且可单方向表出，即只知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 这两个向量组中的某一个向量组可由另一个向量组线性表出

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$（三秩相同）.

例 3.13 设 n 维向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，记

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s],\quad \boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t].$$

则下列结论正确的是（　　）.

(A)若 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$，则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$

(B)若（Ⅰ）可由（Ⅱ）线性表出，则（Ⅰ）$\cong$（Ⅱ）

(C)若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，且（Ⅱ）可由（Ⅰ）线性表出，则（Ⅰ）$\cong$（Ⅱ）

(D)若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，则（Ⅰ）$\cong$（Ⅱ）

解 应选(C).

$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 有一个大前提，要求同型. 尽管 $r(\boldsymbol{A})=r(\text{Ⅰ})$，$r(\boldsymbol{B})=r(\text{Ⅱ})$，由 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$ 可知 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，但$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$未必同型，所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 无等价可言，故(A)不成立.

（Ⅰ）$\cong$（Ⅱ）$\Leftrightarrow$（Ⅰ），（Ⅱ）可以相互线性表出. 仅由（Ⅰ）可由（Ⅱ）线性表出不能说明（Ⅰ）$\cong$（Ⅱ），故(B)不成立.

取 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 之间不能相互表出，故(D)不成立.

由排除法可知，应选(C).

对于(C)，因由 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，知 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$，并设其秩为 r，且设（Ⅰ），（Ⅱ）的极大线性无关组分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$；$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$.

记向量组（Ⅲ）为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$. 由于（Ⅱ）可由（Ⅰ）线性表出，故（Ⅰ）的极大线性无关组也是（Ⅲ）的极大线性无关组，$r(\text{Ⅲ})=r$，又任意 r 个线性无关的向量为向量组（Ⅲ）的一个极大线性无关组，则（Ⅱ）的极大线性无关组也是（Ⅲ）的极大线性无关组，故（Ⅰ）中任一向量均可由（Ⅱ）的极大线性无关组线性表出，故（Ⅰ），（Ⅱ）可相互表出，（Ⅰ）$\cong$（Ⅱ）得证.

例 3.14 设向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[2,-1,a+4]^{\mathrm{T}}$，向量组（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1=[1,2,4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[1,-1,a+2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=[3,3,10]^{\mathrm{T}}$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\2&1&a+4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&3\\2&-1&3\\4&a+2&10\end{bmatrix}$.

问：(1)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否等价？说明理由；

(2)向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是否等价？说明理由.

解 将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合并，一起作初等行变换.

$$[\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&1&3\\0&1&-1&2&-1&3\\2&1&a+4&4&a+2&10\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&1&3\\0&1&-1&2&-1&3\\0&1&a&2&a&4\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&1&3\\0&1&-1&2&-1&3\\0&0&a+1&0&a+1&1\end{array}\right],$$

$$[\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{A}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&2\\2&-1&3&0&1&-1\\4&a+2&10&2&1&a+4\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&2\\0&-3&-3&-2&1&-5\\0&a-2&-2&-2&1&a-4\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&2\\0&1&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\\0&a&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&a-\frac{2}{3}\end{array}\right].$$

(1)当 $a\neq-1$ 且 $a\neq0$ 时,$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$;

当 $a=-1$ 时,$r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\boldsymbol{B})=3$,$\boldsymbol{A}$ 不等价于 $\boldsymbol{B}$;

当 $a=0$ 时,$r(\boldsymbol{A})=3\neq r(\boldsymbol{B})=2$,$\boldsymbol{A}$ 不等价于 $\boldsymbol{B}$.

(2)当 $a\neq-1$ 且 $a\neq0$ 时,$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3$,故由克拉默法则知$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3)$,以及$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,3)$均有解,故(Ⅰ),(Ⅱ)可相互表出,即(Ⅰ)≅(Ⅱ);

当 $a=-1$ 时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=3$,$\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价;

当 $a=0$ 时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$,$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$,$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_j)=3(j=1,2,3)$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表出,故(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价.

五、向量空间(仅数学一要求)

> 考研数学对向量空间这一内容要求不高,但所考知识都很重要,读者仍需认真研究并掌握.

例 3.15 设 $\mathbf{R}^3$ 中两个基(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$,(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$.

(1)求基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵;

(2)已知 $\boldsymbol{\xi}$ 在基(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为$[1,0,2]^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{\xi}$ 在基(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

解 (1)设$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{C}$ 是过渡矩阵,则

$$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]^{-1}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

(2)设 $\boldsymbol{\xi}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$,则

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix},$$

得 $\boldsymbol{\xi}$ 在基(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为$\left[\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]^{\mathrm{T}}$.

基础习题精练

习题

3.1 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,4,0,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,7,1,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,-1,a]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[3,10,b,4]^{\mathrm{T}}$,问:

(1)a,b 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?

(2)a,b 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?并写出此表达式.

3.2 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,-1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,-1,-2,6]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,1,t,4]^{\mathrm{T}}$ 线性无关,则参数 t 满足__________.

3.3 设 $n(n\geqslant 3)$维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,若向量组 $l\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,m\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,则 m,l 应满足条件__________.

3.4 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,-5]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=[2,-1,2]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=[4,3,-8]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=[7,-1,1]^{\mathrm{T}}$$

的秩、极大线性无关组,并将其余向量由极大线性无关组线性表出.

3.5 设向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r_1,向量组(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的秩为 r_2,向量组(Ⅲ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的秩为 r_3,则下列结论不正确的是(　　).

(A)若(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示,则 $r_2=r_3$

(B)若(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示,则 $r_1=r_3$

(C)若 $r_1=r_3$,则 $r_2>r_1$

(D)若 $r_2=r_3$,则 $r_1\leqslant r_2$

3.6(仅数学一) 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$与 $\boldsymbol{\beta}_1=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=[-1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=[1,2,1]^{\mathrm{T}}$.

(1)求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵;

(2)求 $\boldsymbol{\gamma}=[9,6,5]^{\mathrm{T}}$在这两个基下的坐标;

(3)求向量 $\boldsymbol{\delta}$,使它在这两个基下有相同的坐标.

解答

3.1 解 因为

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right],$$

所以

(1)当 $b\neq 2$ 时,线性方程组 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解,此时 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2)当 $b=2,a\neq 1$ 时,线性方程组 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解:

$$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=[-1,2,0]^{\mathrm{T}},$$

于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可唯一表示为 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$;

当 $b=2,a=1$ 时,线性方程组 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解:

$$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=k[-2,1,1]^{\mathrm{T}}+[-1,2,0]^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意常数,这时 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}=-(2k+1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k+2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3.$$

3.2 $t\neq -3$ **解** $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&1\\-1&-2&t\\2&6&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\0&0&t+3\\0&0&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow t\neq -3$.

3.3 $lm=6$ **解** $[l\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,m\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}-1&0&1\\l&-2&0\\0&m&-3\end{bmatrix}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,所以 $r([\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3])=3$,则

$$r([l\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,m\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_3])=r\left(\begin{bmatrix}-1&0&1\\l&-2&0\\0&m&-3\end{bmatrix}\right)<3(\text{相关}),$$

所以 $\begin{vmatrix}-1&0&1\\l&-2&0\\0&m&-3\end{vmatrix}=0$,则 $lm=6$.

【注】 本题与例 3.3 的方法二很相似,但这里 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $n(n\geqslant 3)$ 维列向量,故使用 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$ 是不妥的,这里用到一个更一般的秩的结论:

若 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=n$(列满秩),则 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s})=r(\boldsymbol{B}_{n\times s})$.

3.4 解 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]=\begin{bmatrix}1&2&4&7\\2&-1&3&-1\\-5&2&-8&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&4&7\\0&-5&-5&-15\\0&12&12&36\end{bmatrix}$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&4&7\\0&1&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3',\boldsymbol{\alpha}_4'].$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3',\boldsymbol{\alpha}_4'$ 知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$,极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$(不唯一). 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$.

3.5 (C) **解** 这里(Ⅰ)显然可由(Ⅲ)线性表示,若再有 $r_1=r_3$,则(Ⅰ)和(Ⅲ)等价,此时(Ⅲ)便可由(Ⅰ)线性表示,即此时(Ⅱ)便可由(Ⅰ)线性表示,则 $r_2\leqslant r_1$,故(C)错误,同理可知(D)正确,而(A)和(B)显然是正确的.

3.6 解 (1)设从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{C}$,则

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{C},$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}&=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\\&=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(2)设 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下坐标是 $[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}$,即 $y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+y_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\gamma}$,亦即

$$\begin{cases}-y_2+y_3=9,\\y_1+y_2+2y_3=6,\Rightarrow y_1=0,y_2=-4,y_3=5.\\y_1+y_3=5\end{cases}$$

设 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标是 $[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$,按坐标变换公式 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,有

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},$$

可见 $\boldsymbol{\gamma}$ 在这两个基下的坐标分别是 $[1,2,4]^{\mathrm{T}}$ 和 $[0,-4,5]^{\mathrm{T}}$.

(3)设 $\boldsymbol{\delta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3$,即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\beta}_3)=\boldsymbol{0},$$

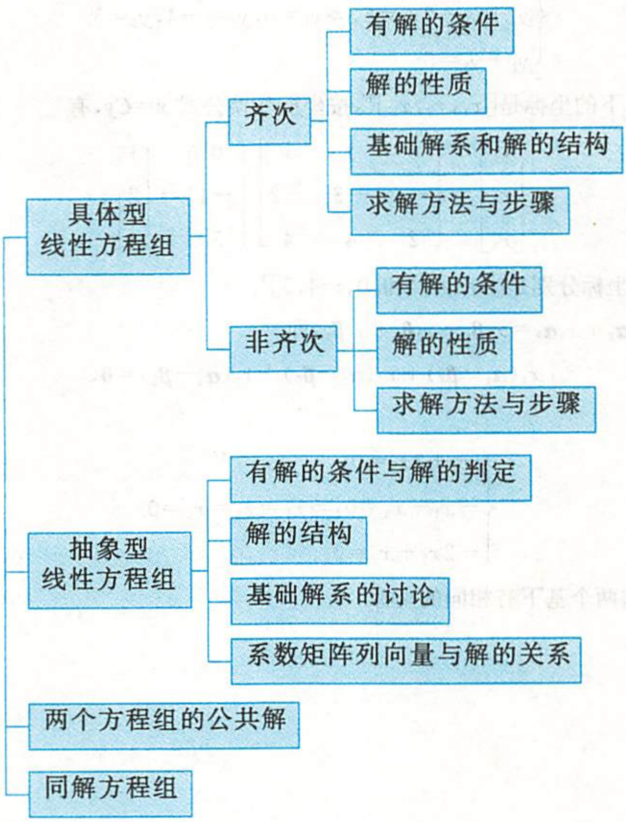
亦即

$$\begin{cases}x_1+3x_2=0,\\-x_1-x_3=0,\Rightarrow x_1=x_2=x_3=0.\\-2x_1+x_2=0\end{cases}$$

所以,仅零向量在这两个基下有相同的坐标.

第4讲 线性方程组

基础知识结构



基础内容精讲

一、线性方程组与向量组其实是一回事

我们来看一般的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

该方程组的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

就是若干个列向量拼成的，且其增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

就是系数矩阵再添加一个列向量拼成的.

仔细观察，把上述方程组写成向量的形式便不难看出，**该方程组的未知数就是向量组中各成员的系数：**

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta},$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},j=1,2,\cdots,n,\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

所以从本质上说，**方程组问题就是向量组问题，方程组和向量组是同一个问题的两种表现形式，其本质一样，所以解决方法也一样.**

求解线性方程组，就是对增广矩阵作初等行变换，化成行阶梯形矩阵，然后求解. 这个基本方法贯穿这门课程始终.

接下来，该方程组有无穷多解时，如何表示出所有的解？这又是某个（无穷）向量组用什么“代表”来表示的问题. **这个“代表”就是基础解系.** 于是，解线性方程组便成了这一部分的关键. 只是希望读者发现：解方程组所得到的解 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，不就是描述向量与向量之间关系的表示系数吗？

二、齐次线性方程组

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

称为 m 个方程，n 个未知量的齐次线性方程组.

其向量形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix},j=1,2,\cdots,n.$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

1. 有解的条件

当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时($\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关),方程组(Ⅰ)有唯一零解;

当 $r(\boldsymbol{A})=r<n$ 时($\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关),方程组(Ⅰ)有非零解,且有 $n-r$ 个线性无关解.

2. 解的性质

若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{0}$,其中 k_1,k_2 是任意常数.

3. 基础解系和解的结构

(1)基础解系:设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 满足

①是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解;

②线性无关;

③方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任一解均可由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出,

则称 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

(2)通解:设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,则 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.

4. 求解方法与步骤

①将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化成阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$(或最简阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$),初等行变换将方程组化为同解方程组,故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解,只需解 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 即可. 设 $r(\boldsymbol{A})=r$,

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1r}&\cdots&c_{1n}\\0&c_{22}&\cdots&c_{2r}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&c_{rr}&\cdots&c_{rn}\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}_{m\times n},$$

其中,m 是原方程组中方程个数,n 是未知量个数.

②按列找出一个秩为 r 的子矩阵,剩余列位置的未知数设为自由变量.

③按基础解系定义求出 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$,并写出通解.

三、非齐次线性方程组

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (\text{Ⅱ})$$

称为 m 个方程，n 个未知量的非齐次线性方程组.

其向量形式为 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j=1,2,\cdots,n, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

其矩阵形式为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

矩阵 $\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的增广矩阵，简记成 $[\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}]$.

1. 有解的条件

若 $r(\boldsymbol{A})\neq r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])$（$\boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出），则方程组（Ⅱ）无解；

若 $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])=n$（即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 线性相关），则方程组（Ⅱ）有唯一解；

若 $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])=r<n$，则方程组（Ⅱ）有无穷多解.

2. 解的性质

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\xi}$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则：①$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解；②$k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

3. 求解方法与步骤

将增广矩阵作初等行变换化成阶梯形（或最简阶梯形）矩阵，求出对应齐次线性方程组的通解，再加上一个非齐次线性方程组的特解即是非齐次线性方程组的通解.

①写出 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，并求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$.

②求出 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解 $\boldsymbol{\eta}$.

③则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

基础例题精解

一、具体型线性方程组

线性方程组是线性代数课程的核心内容之一，几乎每年的考研数学大题，均对线性方程组的求解提出了较高要求，读者要给予高度重视.

本部分例题均为"系数矩阵为具体数字"的方程组. 只不过有些系数矩阵全是已知数，而有些系数矩阵含有未知参数. 读者应认真研究这些例题，掌握求解方法，规范解题步骤.

例 4.1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$$

的通解.

解　将系数矩阵作初等行变换，化成阶梯形矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[④-2①]{\substack{②-① \\ ③-4①}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[④+②]{③-3②}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}③]{④-\frac{4}{3}③}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\boldsymbol{B},$$

则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 是同解方程组，且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3$.

按列找出一个秩为 3 的子矩阵，可取第一、二、四列，则剩余第三、五列位置的元素 x_3, x_5 即设为自由未知量.

取自由未知量 $x_3=k_1, x_5=3k_2$，代入方程得

$$x_4=k_2,$$
$$x_2=x_3+x_4+\frac{1}{2}x_5=k_1+\frac{5}{2}k_2,$$
$$x_1=-x_2+3x_4+x_5=-k_1+\frac{7}{2}k_2.$$

由此得通解

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1+\frac{7}{2}k_2\\k_1+\frac{5}{2}k_2\\k_1+0\\0+k_2\\0+3k_2\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{5}{2}\\0\\1\\3\end{bmatrix},\text{其中 } k_1,k_2 \text{ 是任意常数.}$$

【注】 (1)由阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 知,未知量 x_2,x_3 地位等同,同样 x_4,x_5 的地位也等同,自由未知量也可以取为 x_2,x_4 或 x_2,x_5 或 x_3,x_4.

(2)方程组求解的回代过程也可以用初等行变换来实现,即对阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 继续作初等行变换,化成行最简阶梯形矩阵.

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&0&0&3&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{3}③]{-\frac{1}{2}②}\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&1&-1&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{①-②}\begin{bmatrix}1&0&1&-2&-\frac{1}{2}\\0&1&-1&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[①+2③]{②+③}\begin{bmatrix}1&0&1&0&-\frac{7}{6}\\0&1&-1&0&-\frac{5}{6}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}.$$

取自由未知量 $x_3=k_1,x_5=3k_2$,则

$$x_4=k_2,\quad x_2=\frac{5}{2}k_2+k_1,\quad x_1=\frac{7}{2}k_2-k_1,$$

故通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{2}k_2-k_1\\\frac{5}{2}k_2+k_1\\k_1\\k_2\\3k_2\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{5}{2}\\0\\1\\3\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\text{其中 } k_1,k_2 \text{ 是任意常数.}$$

或者取自由未知量 $x_3=1,x_5=0$ 及 $x_3=0,x_5=3$ 分别代入，求得基础解系

$$\xi_1=[-1,1,1,0,0]^{\mathrm T},\quad \xi_2=\left[\frac{7}{2},\frac{5}{2},0,1,3\right]^{\mathrm T},$$

故通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$，其中 k_1,k_2 是任意常数.

例 4.2 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3-x_4=-1,\\x_1-2x_2+x_3+3x_4=3,\\3x_1+8x_2-x_3+x_4=1,\\x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7,\end{cases}$$

并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示通解.

解 对增广矩阵作初等行变换化成阶梯形矩阵.

$$[\boldsymbol A\vdots\boldsymbol b]=\left[\begin{array}{cccc:c}1&5&-1&-1&-1\\1&-2&1&3&3\\3&8&-1&1&1\\1&-9&3&7&7\end{array}\right]\xrightarrow[④-①]{\substack{②-①\\③-3①}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&5&-1&-1&-1\\0&-7&2&4&4\\0&-7&2&4&4\\0&-14&4&8&8\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[④-2②]{③-②}\left[\begin{array}{cccc:c}1&5&-1&-1&-1\\0&-7&2&4&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

令自由未知量 $x_3=k_1,x_4=k_2$，代入得

$$x_2=-\frac{1}{7}(4-2k_1-4k_2)=-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}k_1+\frac{4}{7}k_2,$$

$$x_1=-1+k_1+k_2-5\left(-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}k_1+\frac{4}{7}k_2\right)=\frac{13}{7}-\frac{3}{7}k_1-\frac{13}{7}k_2.$$

得通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{7}-\frac{3}{7}k_1-\frac{13}{7}k_2\\-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}k_1+\frac{4}{7}k_2\\k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{7}\\-\frac{4}{7}\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-\frac{3}{7}\\\frac{2}{7}\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-\frac{13}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{bmatrix},$$

其中 k_1,k_2 是任意常数，$\left[-\frac{3}{7},\frac{2}{7},1,0\right]^{\mathrm T}$，$\left[-\frac{13}{7},\frac{4}{7},0,1\right]^{\mathrm T}$ 为对应的齐次线性方程组的基础解系.

例 4.3 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\3x_1+2x_2+x_3+x_4=a,\\x_2+2x_3+2x_4=3,\\5x_1+4x_2+3x_3+4x_4=b.\end{cases}$$

则 a,b 为何值时，方程组无解？a,b 为何值时，方程组有解？方程组有解时，求其全部解.

解　对方程组的增广矩阵$[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}]$作初等行变换.

$$[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&a\\0&1&2&2&3\\5&4&3&4&b\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&a-3\\0&1&2&2&3\\0&-1&-2&-1&b-5\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&2&2&3\\0&0&0&0&a\\0&0&0&1&b-2\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&2&2&3\\0&0&0&1&b-2\\0&0&0&0&a\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-1&-2\\0&1&2&2&3\\0&0&0&1&b-2\\0&0&0&0&a\end{array}\right].$$

当$a\neq0$,b任意时,$r(\boldsymbol{A})=3\neq r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])=4$,方程组无解;

当$a=0$,b任意时,$r(\boldsymbol{A})=3=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])<4$,方程组有无穷多解.

取自由未知量$x_3=k$,代入方程,解得

$$x_4=b-2,\quad x_2=3-2(b-2)-2k=-2k+7-2b,\quad x_1=-2+k+(b-2)=k+b-4,$$

故通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+b-4\\-2k+7-2b\\k\\b-2\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b-4\\7-2b\\0\\b-2\end{bmatrix},$$

其中k是任意常数.

二、抽象型线性方程组

"系数矩阵为抽象矩阵"的方程组,要把握以下四种基本问题.

1. 方程组有解的条件及解的判别

这里的理论主要有以下三条.

(1)$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$:　总有解,至少有零解.

(2)$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$:　$r(\boldsymbol{A})=n$,只有零解;

$r(\boldsymbol{A})<n$,有无穷多解.

(3)$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$:　$r(\boldsymbol{A})\neq r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])$,无解;

$r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])=n$,有唯一解;

$r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])=r<n$,有无穷多解.

例 4.4　设非齐次线性方程组为$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$,则(　　).

(A)当$r(\boldsymbol{A})=m$时,方程组有解　　(B)当$r(\boldsymbol{A})=n$时,方程组有唯一解

(C)当$m=n$时,方程组有唯一解　　(D)当$r(\boldsymbol{A})<n$时,方程组有无穷多解

分析 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解(无解)$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])(r(\boldsymbol{A})\neq r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]))$.

题设条件未提及 $r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])$,这正是要求读者考虑的问题.

解 应选(A).

因 $r(\boldsymbol{A})=m$ 时,$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关,增广矩阵在 $\boldsymbol{A}$ 的基础上增加一列,即行向量增加一个分量,仍线性无关,故有 $r(\boldsymbol{A})=m=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])$,方程组有解,应选(A).

(B)$r(\boldsymbol{A})=n$ 时可能无解;(C)可能无解或有无穷多解;(D)可能无解,均可排除.

例 4.5 设线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+\lambda x_3=\mu+1,\\ x_1-4x_3=\mu-1,\\ x_1+2x_2-2x_3=0\end{cases}$ 无解,则 λ,μ 应满足条件是( ).

(A)$\lambda=-2$,但 $\mu\neq-1$ (B)$\mu=0$,但 $\lambda\neq0$

(C)$\lambda=0$,但 $\mu\neq1$ (D)$\lambda=0$,但 $\mu\neq-1$

解 应选(A).

对方程组的增广矩阵施以初等行变换,在此基础上依据 $r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])\neq r(\boldsymbol{A})$ 确定 λ,μ 应满足的条件.

对方程组的增广矩阵施以初等行变换,有

$$[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&\lambda&\mu+1\\1&0&-4&\mu-1\\1&2&-2&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&\lambda&\mu+1\\0&1&\frac{\lambda}{2}+2&1\\0&0&2+\lambda&\mu+1\end{array}\right].$$

若方程组无解,则 $r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])\neq r(\boldsymbol{A})$,故有 $\lambda=-2$,但 $\mu\neq-1$,故本题应选(A).

2. 解的结构

这里的理论依据:

(1)若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$,则通解为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数;

(2)若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有特解 $\boldsymbol{\eta}$,对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.

例 4.6 设 $r(\boldsymbol{A}_{4\times4})=2$,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个解向量,其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,3,-4]^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=[3,2,1,-2]^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{\eta}_3+2\boldsymbol{\eta}_2=[5,1,0,3]^{\mathrm{T}},\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是________.

解 应填 $k_1[-1,0,3,-4]^{\mathrm{T}}+k_2[-1,4,3,-12]^{\mathrm{T}}+\left[\frac{3}{2},1,\frac{1}{2},-1\right]^{\mathrm{T}}$,其中 k_1,k_2 是任意常数.

由题设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,$r(\boldsymbol{A})=2$,$n=4$,知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解结构为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta},$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解.

因 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}[3(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-2(\boldsymbol{\eta}_3+2\boldsymbol{\eta}_2)]=6\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$,$3(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-2(\boldsymbol{\eta}_3+$

$2\eta_2$)为 $Ax=0$ 的解向量,因此可取

$$\xi_1=\eta_1-\eta_2=[-1,0,3,-4]^T,$$

$$\xi_2=3(\eta_1+\eta_2)-2(\eta_3+2\eta_2)=[9,6,3,-6]^T-[10,2,0,6]^T=[-1,4,3,-12]^T,$$

显然 ξ_1,ξ_2 线性无关.

又因 $A\left[\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\right]=\frac{1}{2}(b+b)=b$,故$\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)$为 $Ax=b$ 的一个特解,因此可取

$$\eta=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)=\left[\frac{3}{2},1,\frac{1}{2},-1\right]^T,$$

故 $Ax=b$ 的通解为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=k_1[-1,0,3,-4]^T+k_2[-1,4,3,-12]^T+\left[\frac{3}{2},1,\frac{1}{2},-1\right]^T,$$

其中 k_1,k_2 是任意常数.

【注】 读者还可以尝试使用如下方法解答:

因$[\eta_1-\eta_2,\eta_1+\eta_2,\eta_3+2\eta_2]=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$,故

$$[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=[\eta_1-\eta_2,\eta_1+\eta_2,\eta_3+2\eta_2]\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1},$$

由此可以直接求出 η_1,η_2,η_3,从而得到通解为 $k_1(\eta_1-\eta_2)+k_2(\eta_2-\eta_3)+\eta_3$,其中 k_1,k_2 是任意常数.

3. 方程组 $Ax=0$ 的基础解系的讨论

基础解系是一个十分重要的知识点,给出

$$A_{m\times n}x=0,\quad r(A)=r,$$

若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 满足:①$A\alpha_i=0,i=1,2,\cdots,s$;②$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关;③$s=n-r$,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为 $Ax=0$ 的基础解系.读者要验证上述①②③是否都成立,缺一不可.

例 4.7 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{bmatrix}$,若 $AB=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$,则齐次线性方程组 $Ax=0,By=0$ 线性无关解的个数分别是(　　).

(A)0,1　　(B)1,0　　(C)2,1　　(D)2,0

解 应选(B).

齐次线性方程组线性无关解的个数取决于其系数矩阵的秩.

由 $AB=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$,知 $r(AB)=2$,即有

$$2=r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}\leqslant\min\{2,3\}.$$

因此 $r(A)=r(B)=2$,所以齐次线性方程组 $Ax=0,By=0$ 线性无关解的个数分别为 $3-r(A)=1,2-r(B)=0$,故本题应选(B).

例 4.8 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$ 是 4 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $[1,0,1,0]^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可以为（　）.

(A)α_1,α_3　　(B)α_1,α_2　　(C)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(D)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

解 应选(D).

依题设，知 $r(A)=4-1=3$，$|A|=0$，且 $r(A^*)=1$.

又由 $A^*A=|A|E=O$，知 A 的列向量都为方程组 $A^*x=0$ 的解，由 $r(A^*)=1$，知 $A^*x=0$ 的基础解系由三个线性无关解构成. 又因 $[1,0,1,0]^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个解，有 $1\alpha_1+0\alpha_2+1\alpha_3+0\alpha_4=0$，知 α_1,α_3 线性相关，从而知 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 或 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是 $A^*x=0$ 的一个基础解系，故选择(D).

例 4.9 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则下列向量组中也是方程组 $Ax=0$ 的基础解系的是（　）.

(A)$\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$　　(B)$\xi_1+\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3+\xi_1$

(C)$\xi_1+\xi_2-\xi_3,\xi_1+2\xi_2+\xi_3,2\xi_1+3\xi_2$　　(D)$\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$

分析 本题基础解系应由三个线性无关的解向量组成，题设的四个选项，均是三个向量，且由解的性质知，三个向量均是解向量，故关键是看哪个选项是线性无关向量组.

解 应选(D).

$$(\xi_1-\xi_2)+(\xi_2-\xi_3)+(\xi_3-\xi_1)=0;$$

$$-(\xi_1+\xi_2)+(\xi_2-\xi_3)+(\xi_3+\xi_1)=0;$$

$$2\xi_1+3\xi_2=(\xi_1+\xi_2-\xi_3)+(\xi_1+2\xi_2+\xi_3).$$

故(A),(B),(C)中向量组都是线性相关的，由排除法，应选(D).

对于(D)，
$$[\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1]=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},$$

其中 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，又

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0,$$

因此 $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$ 是线性无关的，故应选(D).

4. 线性方程组系数矩阵列向量和解的关系

(1)齐次线性方程组

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0$$

的解是使 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合为零向量时的线性组合的系数.

(2)非齐次线性方程组

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\beta$$

的解是 β 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出的表出系数.

简而言之，"方程组的解就是描述列向量组中各向量之间数量关系的系数."这个观点对于解题也很有用处.

例 4.10 已知 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 4 维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$r(\boldsymbol{A})=3$. 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解是________.

解 应填 $k[1,-2,-1,0]^{\mathrm{T}}+[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$，其中 k 是任意常数.

因 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{\xi}=[1,-2,-1,0]^{\mathrm{T}}$ 是对应齐次线性方程组的非零解，又 $\boldsymbol{\eta}=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的特解，$r(\boldsymbol{A})=3$，故线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$，其中 k 是任意常数.

例 4.11 已知线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\boldsymbol{\alpha}_3x_3+\boldsymbol{\alpha}_4x_4=\boldsymbol{\alpha}_5$$

有通解 $[2,0,0,1]^{\mathrm{T}}+k[1,-1,2,0]^{\mathrm{T}}$，则下列说法正确的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出

(C) $\boldsymbol{\alpha}_5$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性表出

解 应选(B).

由题设条件知

$$\boldsymbol{\alpha}_5=(k+2)\boldsymbol{\alpha}_1-k\boldsymbol{\alpha}_2+2k\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4.$$

$\boldsymbol{\alpha}_5$ 的表出式中必定有 $\boldsymbol{\alpha}_4$，故 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表出，排除(A)；

$\boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 表出，取 $k=-2$，即有 $\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，排除(C)；

$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$ 表出，取 $k=0$，即有 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_5-2\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2$，排除(D).

由排除法，应选(B).

对于(B)，由题设条件知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$. 若 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，因 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\leqslant 2$，这和 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$ 矛盾，故(B)成立.

三、两个方程组的公共解

(1)齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的公共解是满足方程组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，即联立求解. 同理，可求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的公共解. 这里对读者的计算能力要求较高，理论上没有什么难点.

(2)求出 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$，代入 $\boldsymbol{B}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求出 $k_i(i=1,2,\cdots,s)$ 之间的关系，代回 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解，即得公共解.

(3)若给出 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 与 $\boldsymbol{B}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$，则公共解 $\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s=l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t$，即

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s-l_1\boldsymbol{\eta}_1-l_2\boldsymbol{\eta}_2-\cdots-l_t\boldsymbol{\eta}_t=\boldsymbol{0},$$

解此式，求出 k_i 或 l_j，$i=1,2,\cdots,s$，$j=1,2,\cdots,t$，即可求出 $\boldsymbol{\gamma}$.

例 4.12 已知线性方程组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-x_4=0,\end{cases}\quad(\text{Ⅱ})\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ x_2-x_3+x_4=0.\end{cases}$$

(1)分别求方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)的基础解系；

(2)求方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)的公共解.

解 (1)由方程组(Ⅰ)得其系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix},$$

解得其基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=[0,0,1,0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=[-1,1,0,1]^{\mathrm{T}}.$$

同理，方程组(Ⅱ)的系数矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix},$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=[0,1,1,0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=[-1,-1,0,1]^{\mathrm{T}}.$

(2)方法一　直接解(Ⅰ)，(Ⅱ)的联立方程组，即求解 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}x=\mathbf{0}$. 因

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&-2&1&0\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

故得方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)的公共解为 $k[-1,1,2,1]^{\mathrm{T}}$，其中 k 是任意常数.

方法二　在方程组(Ⅰ)的通解中找出满足方程组(Ⅱ)的解(或在(Ⅱ)的通解中找出满足(Ⅰ)的解)，即是(Ⅰ)，(Ⅱ)的公共解.

方程组(Ⅰ)的通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=[-k_2,k_2,k_1,k_2]^{\mathrm{T}}$，代入方程组(Ⅱ)，得

$$\begin{cases}-k_2-k_2+k_1=0,\\k_2-k_1+k_2=0.\end{cases}$$

解得 $k_1=2k_2$，代入方程组(Ⅰ)的通解，得方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)的公共解是

$$[-k_2,k_2,2k_2,k_2]^{\mathrm{T}}=k_2[-1,1,2,1]^{\mathrm{T}},$$

其中 k_2 是任意常数.

方法三　从方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)的通解中找出公共解.

(Ⅰ)的通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，(Ⅱ)的通解为 $l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2$，则公共解应满足 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2$，即

$$k_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}=l_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+l_2\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

由上式可得 $k_2=l_2,k_2=l_1-l_2,k_1=l_1$. 故

$$k_2=l_1-l_2=k_1-k_2\Rightarrow k_1=2k_2,$$

或

$$k_2=l_2=l_1-l_2\Rightarrow l_1=2l_2.$$

因此，公共解为

$$2k_2\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=k_2(2\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=k_2[-1,1,2,1]^{\mathrm{T}},$$

其中 k_2 是任意常数；

或
$$2l_2\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2=l_2(2\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=l_2[-1,1,2,1]^{\mathrm{T}},$$
其中 l_2 是任意常数.

【注】 两个方程组的公共解问题，除了直接给出两个方程组求其公共解之外，还可以给出一个方程组和另一个方程组的通解(或基础解系)，然后求公共解，或者给出两个方程组的通解(或基础解系)，然后求公共解. 对于上述三种形式，本题均已给出了求解方法.

当然，也可将一个方程组改成满足某个(或某些)条件(满足另一个方程组就是满足某些条件)的方程组，再求解.

四、同解方程组

若两个方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}_{s\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有完全相同的解，则称它们为同解方程组.

于是，　$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组

$\Leftrightarrow\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解满足 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解满足 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$(互相把解代入求出结果即可)

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解满足 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$(或 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解满足 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$)

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)$(三秩相同较方便).

例 4.13 设线性方程组
$$(\mathrm{I})\begin{cases}x_1+3x_3+5x_4=0,\\x_1-x_2-2x_3+2x_4=0,\\2x_1-x_2+x_3+3x_4=0,\end{cases}$$

在(Ⅰ)的基础上，添加一个方程 $4x_1+ax_2+bx_3+13x_4=0$，得
$$(\mathrm{II})\begin{cases}x_1+3x_3+5x_4=0,\\x_1-x_2-2x_3+2x_4=0,\\2x_1-x_2+x_3+3x_4=0,\\4x_1+ax_2+bx_3+13x_4=0.\end{cases}$$
(1)求方程组(Ⅰ)的通解；

(2)a,b 满足什么条件时，方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)是同解方程组？

解 (1)对方程组(Ⅰ)的系数矩阵作初等行变换，即
$$\begin{bmatrix}1&0&3&5\\1&-1&-2&2\\2&-1&1&3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&5\\0&-1&-5&-3\\0&-1&-5&-7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&5\\0&-1&-5&-3\\0&0&0&-4\end{bmatrix}.$$
将自由未知量 x_3 赋值为 1，代回方程组，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}=[-3,-5,1,0]^{\mathrm{T}}$，故方程组(Ⅰ)的通解为 $k[-3,-5,1,0]^{\mathrm{T}}$，$k$ 是任意常数.

(2)由方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)同解，知(Ⅰ)的解应满足(Ⅱ). 因(Ⅰ)，(Ⅱ)前 3 个方程相同，故只需满足第 4 个方程即可，将(Ⅰ)的通解代入(Ⅱ)的第 4 个方程，得

$$4(-3k)+a(-5k)+bk+13(0k)=0,$$

即$(-12-5a+b)k=0$，k是任意常数. 故a,b满足

$$b-5a=12.$$

当$b-5a=12$时，(Ⅰ)的解满足(Ⅱ)，又(Ⅱ)的前3个方程即是(Ⅰ)，所以(Ⅱ)的解也满足(Ⅰ)，方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)是同解方程组.

例 4.14 设方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解，证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$和$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$是同解方程组.

证明 ①显然$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解必满足$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

②因$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解，故$r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])$，得$r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\right)=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$. 故$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$和$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系中所含解向量个数相等.

由①，②知，方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$和$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$是同解方程组.

基础习题精练

习 题

4.1 对于n元方程组，下列结论成立的是( ).

(A)若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解

(B)$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解的充要条件是$|\boldsymbol{A}|=0$

(C)$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解的充要条件是$r(\boldsymbol{A})=n$

(D)若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有两个不同的解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有无穷多解

4.2 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是( ).

(A)若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解

(B)若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解

(C)若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解

(D)若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解

4.3 已知线性方程组$\boldsymbol{A}_{4\times 4}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=[1,2,-3,0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=[2,-1,0,1]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_3=[1,0,-2,1]^{\mathrm{T}},$$

则下列向量是该方程组的解的是( ).

(A)$[-1,5,3,7]^{\mathrm{T}}$　　(B)$[0,4,-9,1]^{\mathrm{T}}$

(C)$[1,2,-3,1]^{\mathrm{T}}$　　(D)$[2,-1,-2,0]^{\mathrm{T}}$

4.4 设$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，则该方程组的基础解系还可以表示成( ).

(A)ξ_1,ξ_2,ξ_3 的一个等价向量组 (B)ξ_1,ξ_2,ξ_3 的一个等秩向量组

(C)$\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$ (D)$\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$

4.5 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,2,a,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,1,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[4,-1,6,b]^{\mathrm{T}}$,问 a,b 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出?取何值时能够线性表出?当 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出时,写出其表出式.

4.6 已知 $\xi_1=[-9,1,2,11]^{\mathrm{T}},\xi_2=[1,-5,13,0]^{\mathrm{T}},\xi_3=[-7,-9,24,11]^{\mathrm{T}}$是方程组

$$\begin{cases}2x_1+a_2x_2+3x_3+a_4x_4=d_1,\\3x_1+b_2x_2+2x_3+b_4x_4=4,\\9x_1+4x_2+x_3+c_4x_4=d_3\end{cases}$$

的三个解,求此方程组的通解.

4.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 证明:方程组(Ⅰ)$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和(Ⅱ)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$是同解方程组.

解答

4.1 (D) **解** 注意审题,"对于 n 元方程组"这里只指出方程组未知量个数为 n,未指出方程的个数,故 $\boldsymbol{A}$ 不一定是方阵,所以,若"$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解$\Rightarrow\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解"不一定成立,方程组可能无解,(A)不正确;"$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是$|\boldsymbol{A}|=0$"不一定成立,因 $\boldsymbol{A}$ 不一定是方阵,(B)不正确;"$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=n$",同样由于 $\boldsymbol{A}$ 不一定是方阵,因此(C)不正确. 对于(D),若 $\boldsymbol{A}\xi_1=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\xi_2=\boldsymbol{b}$,则必有 $\boldsymbol{A}k(\xi_1-\xi_2)=\boldsymbol{0}$,$k$ 是任意常数,故选(D).

4.2 (D) **解** $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解,则 $r(\boldsymbol{A})=n$,此时 $r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])$可能是 n,也可能是 $n+1$,故(A)不成立;

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,则 $r(\boldsymbol{A})<n$,此时 $r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])$可能等于 $r(\boldsymbol{A})$,也可能不等于 $r(\boldsymbol{A})$,故(B)不成立;

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解,则 $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])<n$,故此时 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解,即有非零解,故(C)不成立. 应选(D).

【注】 (1)若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,则 $r(\boldsymbol{A})=n$(列满秩)$\not\Rightarrow r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])=n$,故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可能有解,可能无解.

(2)若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解(有非零解),则 $r(\boldsymbol{A})<n$(列不满秩)$\not\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])$,故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可能有解,可能无解.

(3)若 $\boldsymbol{A}$ 行满秩,则 $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])$,故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有解.

(4)若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解,则 $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])=\boldsymbol{A}$ 的列数,故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

(5)若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解,则 $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])<\boldsymbol{A}$ 的列数,故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

由(1),(2)可知,(4),(5)不能倒推.

4.3 (B) **解** $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量可由基础解系线性表出,选项中的向量分别记为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$. 对于 $\boldsymbol{\beta}_i$ $(i=1,2,3,4)$,若存在 x_1,x_2,x_3,使得

$$x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3=\boldsymbol{\beta}_i,$$

则 $\boldsymbol{\beta}_i$ 可由 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表出，即是解向量. 因

$$[\xi_1,\xi_2,\xi_3 \mid \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4]=\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&2&1&-1&0&1&2\\2&-1&0&5&4&2&-1\\-3&0&-2&3&-9&-3&-2\\0&1&1&7&1&1&0\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&2&1&-1&0&1&2\\0&-5&-2&7&4&0&-5\\0&6&1&0&-9&0&4\\0&1&1&7&1&1&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&2&1&-1&0&1&2\\0&-5&-2&7&4&0&-5\\0&1&-1&7&-5&0&-1\\0&0&2&0&6&1&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&2&1&-1&0&1&2\\0&1&-1&7&-5&0&-1\\0&0&-7&42&-21&0&-10\\0&0&2&0&6&1&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&2&1&-1&0&1&2\\0&1&-1&7&-5&0&-1\\0&0&2&0&6&1&1\\0&0&-1&42&-3&3&-7\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&2&1&-1&0&1&2\\0&1&-1&7&-5&0&-1\\0&0&-1&42&-3&3&-7\\0&0&0&84&0&7&-13\end{array}\right],$$

故 $[\xi_1,\xi_2,\xi_3]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}_2$ 有解，其他无解，应选(B).

4.4 (C) **解** 和 ξ_1,ξ_2,ξ_3 等价的向量组不一定线性无关(此时向量个数大于秩)，和 ξ_1,ξ_2,ξ_3 等秩的向量组中的向量不一定是解向量，由 $(\xi_1-\xi_2)+(\xi_2-\xi_3)+(\xi_3-\xi_1)=\mathbf{0}$，知 $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$ 线性相关，故(A),(B),(D)均应排除. 而

$$[\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1]=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

又 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，则 $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$ 线性无关，且均是解向量，故选(C).

4.5 **解** 设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，对该非齐次方程组的增广矩阵作初等行变换，有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \mid \boldsymbol{\beta}]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&2&1&-1\\1&a&1&6\\0&2&1&b\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&2&1&-1\\0&a-2&-2&2\\0&2&1&b\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&2&1&-1\\0&a+2&0&0\\0&0&0&b+1\end{array}\right].$$

当 $b\neq-1$，a 任意时，$r(\boldsymbol{A})<r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}])$，方程组无解，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

当 $b=-1$，$a\neq-2$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}])=3$，方程组有唯一解，解得 $x_1=7,x_2=0,x_3=-1$，故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，其表出式为 $\boldsymbol{\beta}=7\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=7\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$.

当 $b=-1$，$a=-2$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}])=2$，方程组有无穷多解. 取自由未知量 $x_2=k$(也可取 x_3 为自

无水印版由【公众号：小盆学长】免费提供

由未知量),解得 $x_1=4k+7,x_3=-2k-1$,此时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,且表出法有无穷多种,其表出式为

$$\boldsymbol{\beta}=(4k+7)\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2-(2k+1)\boldsymbol{\alpha}_3,$$

其中 k 是任意常数.

4.6 分析 求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解关键是求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3$ 都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,关键是要求出 $r(\boldsymbol{A})$,以确定基础解系中解向量的个数.

解 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 矩阵,$r(\boldsymbol{A})\leqslant 3$,由于 $\boldsymbol{A}$ 中第 2,3 行不成比例,故 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,又因

$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2=[-10,6,-11,11]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3=[8,4,-11,-11]^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解,于是 $4-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,因此 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以 $\boldsymbol{\xi}_1+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$ 是此方程组的通解,其中 k_1,k_2 为任意常数.

4.7 证明 ①若存在 $\boldsymbol{x}$,使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,则两端左乘 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,故方程组(Ⅰ)的解必是方程组(Ⅱ)的解.

②若存在 $\boldsymbol{x}$,使 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,则两端左乘 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$,得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$.

因 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵,故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是实向量.设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$,则$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=0$,得 $a_i=0(i=1,2,\cdots,n)$,故$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,从而知方程组(Ⅱ)的解必是方程组(Ⅰ)的解.

由①,②知,方程组(Ⅰ),(Ⅱ)是同解方程组.

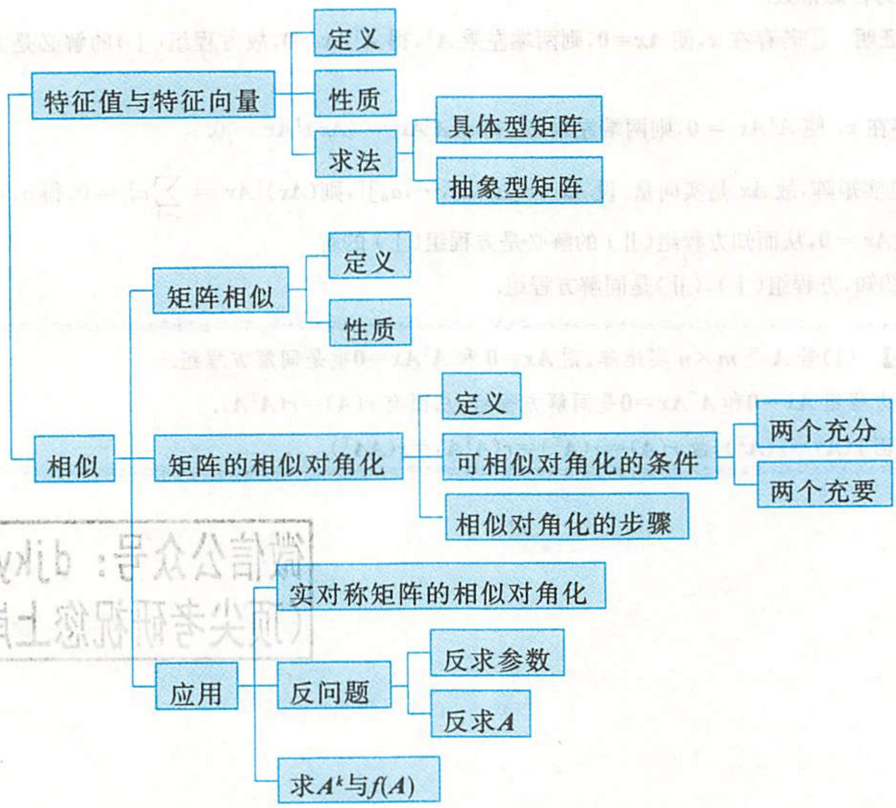
【注】 (1)若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$也是同解方程组.

(2)方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$是同解方程组,从而有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

(3)因 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$,故 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

第5讲 特征值与特征向量

基础知识结构



基础内容精讲

一、基本概念

设A是n阶矩阵，λ是一个数，若存在n维非零列向量ξ，使得

$$A\xi=\lambda\xi, \tag{①}$$

则称λ是A的特征值，ξ是A的对应于特征值λ的特征向量.

【注】 由①式，得

$$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0},$$

因 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，故

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0. \qquad ②$$

②式称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程，是未知量 λ 的 n 次方程，有 n 个根（重根按照重数计），$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 称为特征矩阵，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 称为特征多项式.

具体型矩阵的特征值与特征向量的求法见“基础例题精解”的“一”. 抽象型矩阵的特征值与特征向量的求法见“基础例题精解”的“二”.

二、基本性质

1. 特征值的性质

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

① $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$；

② $\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$.

【注】 以 3 阶矩阵为例，做个证明.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$，则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}$ 是 λ 的一元三次多项式，则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & 0-a_{12} & 0-a_{13}\\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23}\\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix},$$

将上述行列式全部拆开，得

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=&\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -a_{13}\\ 0 & \lambda & -a_{23}\\ 0 & 0 & -a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda & -a_{12} & 0\\ 0 & -a_{22} & 0\\ 0 & -a_{32} & \lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-a_{11} & 0 & 0\\ -a_{21} & \lambda & 0\\ -a_{31} & 0 & \lambda\end{vmatrix}+\\ &\begin{vmatrix}\lambda & -a_{12} & -a_{13}\\ 0 & -a_{22} & -a_{23}\\ 0 & -a_{32} & -a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-a_{11} & 0 & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda & -a_{23}\\ -a_{31} & 0 & -a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-a_{11} & -a_{12} & 0\\ -a_{21} & -a_{22} & 0\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33}\end{vmatrix}\\ =&\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+(A_{11}+A_{22}+A_{33})\lambda-|\boldsymbol{A}|. \qquad ①\end{aligned}$$

设 $$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$

$$=\lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)\lambda-\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \quad ②$$

比较①,②两式,得

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i,$$

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

在求$|A|$及A的特征值时会经常用到这两个性质.

2. 特征向量的性质

(1)k重特征值λ至多只有k个线性无关的特征向量(直接使用,不用证明).

(2)若ξ_1,ξ_2是A的属于不同特征值λ_1,λ_2的特征向量,则ξ_1,ξ_2线性无关(见例5.5).

(3)若ξ_1,ξ_2是A的属于同一特征值λ的特征向量,则$k_1\xi_1+k_2\xi_2$(k_1,k_2是不同时为零的任意常数)仍是A的属于特征值λ的特征向量(见例5.7).

三、矩阵的相似

1. 定义

设A,B是两个n阶方阵,若存在n阶可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP=B$,则称A相似于B,记成$A\sim B$.

【注】 (1)$A\sim A$;(反身性)

(2)若$A\sim B$,则$B\sim A$;(对称性)

(3)若$A\sim B,B\sim C$,则$A\sim C$.(传递性)这个性质以后常用.

2. 相似矩阵的性质

(1)若$A\sim B$,则有:①$r(A)=r(B)$;②$|A|=|B|$;③$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$;④$A,B$有相同的特征值.

【注】 以上结论,反之不成立.例如:若取$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$,则①$r(A)=r(B)=2$;②$|A|=|B|=1$;③$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=(\lambda-1)^2$;④$\lambda_A=\lambda_B=1$(二重根),但对任意可逆矩阵$P$,$P^{-1}AP=P^{-1}EP=E\neq B$,故$A,B$不相似.

(2)若$A\sim B$,则$A^m\sim B^m$,$f(A)\sim f(B)$(其中$f(x)$是多项式)(见例5.13).

(3)若$A\sim B$,且A可逆,则$A^{-1}\sim B^{-1}$,$f(A^{-1})\sim f(B^{-1})$(其中$f(x)$是多项式).

【注】 证明 $A\sim B$,则存在可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP=B$,两边取逆,有$P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$,故$A^{-1}\sim B^{-1}$,由(2)知$f(A^{-1})\sim f(B^{-1})$.

(4)若$A\sim B$,则$A^{\mathrm T}\sim B^{\mathrm T}$.

【注】 证明 $A\sim B$,则存在可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP=B$,两边取转置,有$P^{\mathrm T}A^{\mathrm T}(P^{-1})^{\mathrm T}=B^{\mathrm T}$,即$P^{\mathrm T}A^{\mathrm T}(P^{\mathrm T})^{-1}=B^{\mathrm T}$,故$A^{\mathrm T}\sim B^{\mathrm T}$.

(5)若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,且 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$.

【注】 证明 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,两边取伴随运算,有 $\boldsymbol{P}^*\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{P}^{-1})^*=\boldsymbol{B}^*$,即 $\boldsymbol{P}^*\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{P}^*)^{-1}=\boldsymbol{B}^*$,故 $\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$.

四、矩阵的相似对角化

1. 定义

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,若存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$,其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵,则称 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化,记 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形.

2. 矩阵可相似对角化的条件

由定义可知,若 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化,即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$,其中 $\boldsymbol{P}$ 可逆,等式两边同时左乘 $\boldsymbol{P}$,有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$,记

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n],\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n]=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix},$$

即
$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_n]=[\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{\xi}_n],$$

也即
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i,i=1,2,\cdots,n.$$

由 $\boldsymbol{P}$ 可逆,则 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 线性无关.上述过程可逆,于是

①n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

由第 5 讲"基础内容精讲""二"中"2"的"(1)",k 重特征值 λ 至多只有 k 个线性无关的特征向量,得

②n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 对应于每个 k_i 重特征值都有 k_i 个线性无关的特征向量.

由第 5 讲"基础内容精讲""二"中"2"的"(2)",对应于不同特征值的特征向量线性无关,得

③n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值$\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

由下面的"五"可知:

④n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵$\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

以上①,②为 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充要条件;③,④为 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分条件.

五、实对称矩阵必可相似于对角矩阵

在第 2 讲中已经学过,若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,进一步,若组成 $\boldsymbol{A}$ 的元素都是实数,则 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵.

(1)$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是实数,特征向量是实向量(不用证明).

(2)实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量相互正交(证明见例 5.16).

(3)实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必相似于对角矩阵,即必有 n 个线性无关的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$,即必有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$,且存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.故 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于 $\boldsymbol{\Lambda}$(不用证明,熟练掌握方法与步骤即可,见"基础例题精解"的"六").

基础例题精解

一、具体型矩阵的特征值与特征向量

求解具体型矩阵的特征值与特征向量,一般用"特征方程法",即先用特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求出 λ,再解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,求出特征向量.

例 5.1 求下列矩阵的特征值和特征向量.

(1)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$;　　(2)$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

解 (1) $$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\0&\lambda-2&-2\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0,$$

解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$.

当 $\lambda_1=1$ 时,由

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\0&-1&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

解得基础解系为 $\xi_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$,$k_1\xi_1$($k_1$ 是不为零的任意常数)为对应于 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2=2$ 时,由

$$(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

解得基础解系为 $\xi_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$,$k_2\xi_2$($k_2$ 是不为零的任意常数)为对应于 $\lambda_2=2$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_3=3$ 时,由

$$(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_3=[3,4,2]^{\mathrm{T}}$，$k_3\boldsymbol{\xi}_3$（$k_3$ 是不为零的任意常数）为对应于 $\lambda_3=3$ 的全部特征向量.

(2)由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0,$$

解得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda=1$（三重根）.

当 $\lambda=1$ 时，由

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

解得线性无关的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=[0,1,0]^{\mathrm{T}}$，$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$（$k_1,k_2$ 是不同时为零的任意常数）为 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 $\lambda=1$（三重根）的全部特征向量.

【注1】 (1)上、下三角矩阵与对角矩阵的特征值就是对角线元素.

(2)题中 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\lambda=1$ 是三重根，但对应的线性无关的特征向量只有两个.

【注2】 用 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求出全部的 λ 是起步，也是关键. 上面的例子都是用行列式的性质写成了 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$，但如果有些技巧想不到，而直接展开成了 λ 的 n 次多项式 $f(\lambda)$，那又该如何求特征根呢？

例如，设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 及 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

解

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2&2&0\\2(\lambda+2)&\lambda-1&2\\2(\lambda+2)&2&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&2&0\\2&\lambda-1&2\\2&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&0&0\\2&\lambda-5&2\\2&-2&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda-5&2\\-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda^2-5\lambda+4)$$

$$=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-2,1,4$.

但以上过程可能有的读者一时想不到，而直接用展开做：

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-4(\lambda-2)-4\lambda$$

$$=\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8.$$

矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 求出来了，但 $f(\lambda)$ 是 λ 的三次多项式，求特征根有些困难. 为此介绍三个简单而有效的 k 次多项式方程

$$f(\lambda)=a_k\lambda^k+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

的求根方法：

①若 $a_0=0$，则 $f(0)=0$，所以此时 0 是 $f(\lambda)=0$ 的根.

②若 $a_k+a_{k-1}+\cdots+a_1+a_0=0$，则 $f(1)=0$，所以此时 1 是 $f(\lambda)=0$ 的根.

③若 $f(\lambda)$ 的偶次项(包括 a_0)系数之和等于奇次项系数之和，则 $f(-1)=0$，所以此时 -1 是 $f(\lambda)=0$ 的根.

据此，在本例中 $f(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8$，因 $1+(-3)+(-6)+8=0$，所以 1 是 $f(\lambda)=0$ 的根. 从而 $\lambda-1$ 是 $f(\lambda)$ 的一个因式，进一步分解 $f(\lambda)$，可用多项式的带余除法

$$\begin{array}{r}
\lambda^2-2\lambda-8 \\
\lambda-1\;\big)\;\overline{\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8} \\
\underline{\lambda^3-\lambda^2\qquad\qquad} \\
-2\lambda^2-6\lambda\quad \\
\underline{-2\lambda^2+2\lambda\quad} \\
-8\lambda+8 \\
\underline{-8\lambda+8} \\
0
\end{array}$$

则 $f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-8)$. 而 $\lambda^2-2\lambda-8$ 作为二次三项式的因式分解读者是熟悉的，故有

$$f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4),$$

所以 A 的 3 个特征值为 $-2,1,4$.

这里所说的三个求根方法常称为**试根法**. 多项式的带余除法和常数的带余除法形式上基本相同. 上述这些原理浅显易懂，很容易掌握，且很实用，再看一题.

例如，设

$$A=\begin{bmatrix}5&6&-10\\-6&1&6\\-2&3&0\end{bmatrix},$$

求矩阵 A 的特征多项式和全部特征值.

解

$$\begin{aligned}
|\lambda E-A|&=\begin{vmatrix}\lambda-5&-6&10\\6&\lambda-1&-6\\2&-3&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5&-6&\lambda+5\\6&\lambda-1&0\\2&-3&\lambda+2\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}\lambda-9&0&-\lambda+1\\6&\lambda-1&0\\2&-3&\lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-9&0&-\lambda+1\\6&\lambda-1&0\\0&-\frac{\lambda}{3}-\frac{8}{3}&\lambda+2\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-9)(\lambda-1)(\lambda+2)+6(-\lambda+1)\left(-\frac{\lambda}{3}-\frac{8}{3}\right)\\
&\overset{(*)}{=\!=\!=}(\lambda-1)[(\lambda-9)(\lambda+2)+(2\lambda+16)]\\
&=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda-2)
\end{aligned}$$

$$=(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(\lambda-\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right).$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 $1,\frac{5+\sqrt{33}}{2},\frac{5-\sqrt{33}}{2}$.

(*)处提出公因子 $\lambda-1$ 是重要的，有了这一步下面就能将特征多项式完全分解，从而求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值. 如有读者忽略了提出公因子，或在计算 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 时用其他方法得出

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-6\lambda^2+3\lambda+2,$$

可利用上例介绍的试根法求根. 因

$$1+(-6)+3+2=0,$$

故 1 是 $f(\lambda)=0$ 的一个根，从而 $\lambda-1$ 是 $f(\lambda)$ 的一个因式. 再用多项式的带余除法

$$\begin{array}{r|l}
 & \lambda^2-5\lambda-2 \\
\lambda-1 & \lambda^3-6\lambda^2+3\lambda+2 \\
 & \underline{\lambda^3-\lambda^2} \\
 & -5\lambda^2+3\lambda \\
 & \underline{-5\lambda^2+5\lambda} \\
 & -2\lambda+2 \\
 & \underline{-2\lambda+2} \\
 & 0
\end{array}$$

可得

$$f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda-2),$$

同样可求得 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 $1,\frac{5+\sqrt{33}}{2},\frac{5-\sqrt{33}}{2}$.

其实，还有一个定理可供读者试根：

定理　设

$$f(x)=1\cdot x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是系数 $a_i(i=0,1,2,\cdots,k-1)$ 都是整数的多项式，则 $f(x)=0$ 的有理根都是整数，且均是 a_0 的因子.

例如，设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda+2,$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

解　据上述定理，$f(\lambda)=0$ 的有理根只可能是 $\pm1,\pm2$. 计算得

$$f(1)=2\neq0,\quad f(-1)=-6\neq0,$$
$$f(2)=0,\quad f(-2)=-28\neq0,$$

故 $f(\lambda)=0$ 的有理根只有一个，即 $\lambda_1=2$. 从而 $\lambda-2$ 是 $f(\lambda)$ 的一个因式. 用多项式的带余除法可得

$$f(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-1).$$

对二次多项式方程 $\lambda^2-2\lambda-1=0$ 用求根公式得出两个根为

$$\lambda_2=1+\sqrt{2},\quad \lambda_3=1-\sqrt{2}.$$

综上可知，$\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 $2,1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}$.

二、抽象型矩阵的特征值与特征向量

抽象型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的问题主要有四点.

(1)利用定义,即若满足关系式

$$\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0},$$

则 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量.

(2)由定义推导得出 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程,即若 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 成立,则 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,且若有 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0})$,则 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量. 这与上一部分例题的理论一样.

(3) $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

(4)特征向量的性质.

例 5.2 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}$. 求 $k\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^k,f(\boldsymbol{A})$ 的特征值和特征向量,其中 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$.

解 利用定义,由题设条件,有 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$,

$$\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}. \tag{①}$$

式①两端乘 k,得

$$k\boldsymbol{A\xi}=k\lambda\boldsymbol{\xi},\quad (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}=(k\lambda)\boldsymbol{\xi}, \tag{②}$$

故由式②知,$k\boldsymbol{A}$ 有特征值 $k\lambda$,对应的特征向量仍是 $\boldsymbol{\xi}$.

式①两端左乘 $\boldsymbol{A}$,并代入式①,得

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{A\xi}=\lambda^2\boldsymbol{\xi}, \tag{③}$$

由式③知,$\boldsymbol{A}^2$ 有特征值 λ^2,对应的特征向量仍是 $\boldsymbol{\xi}$.

式①两端连着左乘 $k-1$ 个 $\boldsymbol{A}$,并逐个代入式①,得

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi}=\lambda^2\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{\xi}=\cdots=\lambda^k\boldsymbol{\xi}, \tag{④}$$

由式④知,$\boldsymbol{A}^k$ 有特征值 λ^k,对应的特征向量仍是 $\boldsymbol{\xi}$.

由式①,②,③,④得

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}&=(a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n)\boldsymbol{\xi}\\&=a_0\boldsymbol{\xi}+a_1\boldsymbol{A\xi}+a_2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}\\&=a_0\boldsymbol{\xi}+a_1\lambda\boldsymbol{\xi}+a_2\lambda^2\boldsymbol{\xi}+\cdots+a_n\lambda^n\boldsymbol{\xi}=f(\lambda)\boldsymbol{\xi},\end{aligned} \tag{⑤}$$

由式⑤知,$f(\boldsymbol{A})$ 有特征值 $f(\lambda)$,对应的特征向量仍是 $\boldsymbol{\xi}$.

例 5.3 设 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}$.

(1)证明 $\lambda\neq0$;

(2)求 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值和特征向量.

(1)**证明** 若 $\lambda=0$,则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{A}|=0$,得 $|\boldsymbol{A}|=0$,这与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆矛盾,故 $\lambda\neq0$.

(2)**解** 由题设条件知,

$$\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}. \tag{①}$$

式①两端左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,且知 $\lambda\neq0$,得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\xi},$$

$$A^{-1}\xi=\frac{1}{\lambda}\xi,\qquad ②$$

故 A^{-1} 有特征值 $\frac{1}{\lambda}$，对应的特征向量仍是 ξ.

式①两端左乘 A^*，得

$$A^*A\xi=|A|E\xi=\lambda A^*\xi,$$

$$A^*\xi=\frac{|A|}{\lambda}\xi,\qquad ③$$

故 A^* 有特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$，对应的特征向量仍是 ξ.（若 A 有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，因 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$，故 A^* 的特征值为 $\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n,\lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n,\cdots,\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$）

同理，

$$(E-A^{-1})\xi=\xi-A^{-1}\xi=\xi-\frac{1}{\lambda}\xi=\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\xi,\qquad ④$$

故 $E-A^{-1}$ 有特征值 $1-\frac{1}{\lambda}$，对应的特征向量仍是 ξ.

【注】（1）A 以及与 A 有关的常用矩阵的特征值和特征向量，总结如下：

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ
对应的特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$

表中 λ 在分母上，设 $\lambda\neq0$.

（2）$f(x)$ 为多项式，若矩阵 A 满足 $f(A)=O$，λ 是 A 的任一特征值，则 λ 满足 $f(\lambda)=0$.

（3）A^T 的特征值与 A 相同，但特征向量不再是 ξ，要单独计算才能得出.

例 5.4 设 A 是 n 阶矩阵，且满足 $A^2=A$（此时 A 称为幂等矩阵）.

（1）求 A 的特征值可能的取值；

（2）证明：$E+A$ 是可逆矩阵.

（1）**解 方法一** 用定义法. 设 A 有特征值 λ，其对应的特征向量是 $\xi(\xi\neq0)$，则

$$A\xi=\lambda\xi,$$

上式两端左乘 A，得 $A^2\xi=\lambda A\xi=\lambda^2\xi$. 又 $A^2\xi=A\xi=\lambda\xi$，有 $\lambda^2\xi=\lambda\xi$，即 $(\lambda^2-\lambda)\xi=\mathbf{0}$，而 $\xi\neq\mathbf{0}$，故 $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$，得 A 的特征值可能的取值是 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

方法二 由题设条件 $A^2=A$，有 $A^2-A=O$. 设 A 有特征值为 λ，则由例 5.3 的“注”知 A^2-A 有特征值 $\lambda^2-\lambda$. 但 $A^2-A=O$ 是零矩阵，其特征值为零，故有

$$\lambda^2-\lambda=0,\text{得 }\lambda=0\text{ 或 }\lambda=1.$$

（2）**证明** 由（1）知，满足 $A^2=A$ 的矩阵 A 的特征值可能的取值是 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$，则 $E+A$ 的特征值可能的取值是 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$，均不为 0，故 $|E+A|\neq0$（或假设 $|E+A|=0$，则 -1 是 A 的特征值，这与（1）中结论矛盾），故 $E+A$ 是可逆矩阵.

【注】 满足条件 $A^2=A$ 的矩阵有很多，例如，$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，均有 $A^2=A$，而它们的特征值分别是 1,1;1,0;0,0.

例 5.5 证明：n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意两个不同特征值 λ_1,λ_2 对应的两个特征向量线性无关.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$ 对应的特征向量分别是 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2(\boldsymbol{\xi}_i\neq\boldsymbol{0},i=1,2)$，即

$$\boldsymbol{A\xi}_1=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\quad \boldsymbol{A\xi}_2=\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2.$$

考查

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}. \quad ①$$

式①两端左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2)=k_1\boldsymbol{A\xi}_1+k_2\boldsymbol{A\xi}_2=k_1\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}. \quad ②$$

式①两边乘 λ_1，得

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\lambda_1\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}. \quad ③$$

式③减式②，得 $k_2(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}$. 因 $\lambda_1\neq\lambda_2,\boldsymbol{\xi}_2\neq\boldsymbol{0}$，故得 $k_2=0$.

将 $k_2=0$ 代入式①，因 $\boldsymbol{\xi}_1\neq\boldsymbol{0}$，得 $k_1=0$，故不同特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量线性无关.

例 5.6 设 λ_1,λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\xi}$ 是对应于 λ_1 的特征向量，证明：$\boldsymbol{\xi}$ 不是 λ_2 的特征向量(即一个特征向量不能属于两个不同的特征值).

证明 用反证法. 由题设知 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda_1\boldsymbol{\xi}$. 若 $\boldsymbol{\xi}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_2 的特征向量，则有 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda_2\boldsymbol{\xi}$，即得 $\lambda_1\boldsymbol{\xi}=\lambda_2\boldsymbol{\xi}$，即 $(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda_1=\lambda_2$，这与已知 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾，故一个特征向量不能属于两个不同的特征值.

例 5.7 已知 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量，问 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2(k_1,k_2$ 是任意常数)是否属于 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量?

解 当 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}$ 时，$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量(特征向量是非零向量).

当 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2\neq\boldsymbol{0}$ 时，$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量. 由题设知，

$$\boldsymbol{A\xi}_1=\lambda\boldsymbol{\xi}_1,\quad \boldsymbol{A\xi}_2=\lambda\boldsymbol{\xi}_2,$$

则

$$\boldsymbol{A}k_1\boldsymbol{\xi}_1=\lambda k_1\boldsymbol{\xi}_1,\quad \boldsymbol{A}k_2\boldsymbol{\xi}_2=\lambda k_2\boldsymbol{\xi}_2,$$

$$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2)=\lambda(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2),$$

故 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$ 仍是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量.

或由题设知，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 均是齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，故 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$ 仍是上述方程组的解，即当 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2\neq\boldsymbol{0}$ 时，$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$ 仍是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量.

例 5.8 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，特征值为 1,2,3，则 $|\boldsymbol{A}|$ 的元素 a_{11},a_{22},a_{33} 的代数余子式 A_{11},A_{22},A_{33} 的和 $\sum\limits_{i=1}^{3}A_{ii}=$__________.

解 应填 11.

3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=1,2,3$，故 $|\boldsymbol{A}|=6$. 由于代数余子式 $A_{ii}(i=1,2,3)$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 有关，是 $\boldsymbol{A}^*$ 的对角线元素，即 $\sum\limits_{i=1}^{3}A_{ii}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^*)$，又 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\lambda^*=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$，即 6,3,2，故

$$\sum_{i=1}^{3}A_{ii}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^*)=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^*=6+3+2=11.$$

例 5.9 设 $\boldsymbol{A}$ 是 5 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{O}$. 则 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=$__________.

解 应填 3^5.

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，$\boldsymbol{A}^5$ 的特征值为 λ^5，由已知 $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{O}$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=0$(五重根). $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda=3$(五重根)，故 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=3^5$.

三、矩阵能否相似对角化的判别与证明

用好上面讲的矩阵可相似对角化的两个充要条件与两个充分条件.

例 5.10 下列矩阵中,不能相似于对角矩阵的是( ).

(A)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ (B)$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$ (C)$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\1&-2&1\end{bmatrix}$ (D)$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$

解 应选(D).

$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,必相似于对角矩阵. $\boldsymbol{B}$ 有 3 个不同的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,能相似于对角矩阵. $r(\boldsymbol{C})=1,\lambda=0$ 是二重特征值,有 2 个线性无关的特征向量,另一个特征值 $\lambda_3=-2$,故 $\boldsymbol{C}$ 能相似于对角矩阵. 由排除法,应选(D).

对(D),$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}\xrightarrow{[1]+[2]-[3]}\begin{vmatrix}\lambda+1&1&-2\\\lambda+1&\lambda+3&-3\\-\lambda-1&0&\lambda+2\end{vmatrix}$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&1&-2\\0&\lambda+2&-1\\0&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3=0.$$

知 $\lambda=-1$ 是三重特征值,但 $-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}\neq\boldsymbol{O}$,线性无关的特征向量最多有 2 个(实际上只有一个),故 $\boldsymbol{D}$ 不能相似于对角矩阵.

【注】 判别一个矩阵是否相似于对角矩阵的步骤如下.

(1)是否是实对称矩阵,实对称矩阵必相似于对角矩阵(如(A)).

(2)特征值是否都是实单根,若是,则相似于对角矩阵(如(B)).

(3)特征值是 r 重根,若对应有 r 个线性无关的特征向量,则相似于对角矩阵(如(C));若对应的线性无关的特征向量少于 r 个(不可能多于 r 个),则不能相似于对角矩阵(如(D)).

例 5.11 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,已知 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0,(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,$\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}$ 不可逆,问 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵,说明理由.

解 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵.

由题意,知 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A},3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}$ 均不可逆,即

$$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0,\quad |3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,\quad |\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}|=0,$$

改写成 $(-1)^3|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,3^3\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=0$,因此可知,$\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值:$-1,3,\frac{1}{3}$. 从而 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量,故 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵,即

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}-1&&\\&3&\\&&\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

【注】 $|E+A|=0$,$(3E-A)x=0$ 有非零解,$E-3A$ 不可逆,都在告诉你 A 的特征值.

四、两个矩阵是否相似的判别与证明

(1)**定义法** 若存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=B$,则 $A\sim B$.

(2)**性质** 若 $A\sim B$,则 $r(A)=r(B)$,$|A|=|B|$,$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$,$\lambda_A=\lambda_B$.

(3)**传递性** 若 $A\sim \Lambda$,$\Lambda\sim B$,则 $A\sim B$.

例 5.12 设 $W=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$,则与 W 相似的矩阵是( ).

(A)$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ (B)$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&3&0\end{bmatrix}$ (C)$C=\begin{bmatrix}1&1&1\\a&a&a\\-a&-a&-a\end{bmatrix}$ (D)$D=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}$

解 应选(D).

$r(W)=1\neq r(A)=2$,W 与 A 不相似,排除(A);

$|W|=0\neq|B|=-6$,W 与 B 不相似,排除(B);

$\mathrm{tr}(W)=6\neq\mathrm{tr}(C)=1$,$W$ 与 C 不相似,排除(C).

由排除法,应选(D).

对于(D),$r(W)=r(D)=1$,$\lambda=0$ 均为二重特征值,且均有 2 个线性无关的特征向量,且 $\lambda_3=\sum_{i=1}^{3}w_{ii}=\sum_{i=1}^{3}d_{ii}=6$,故 $W\sim D$,即

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix},$$

应选(D).

【注】 选项(A),(B),(C)均不满足与 W 相似的必要条件,应排除,利用必要条件来排除不成立的结论是选择题常用的方法.

例 5.13 设 n 阶方阵 A 与 B 相似,证明:

(1)对任意的正整数 k,都有 A^k 与 B^k 相似;

(2)对任意一个多项式 $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$,矩阵多项式 $f(A)$ 和 $f(B)$ 相似;

(3)当 A,B 都是可逆矩阵时,A^* 和 B^* 相似.

证明 (1)因 A,B 相似,故有可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=B$.

由
$$B^k=\overbrace{BB\cdots B}^{k个}=\overbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}^{k个}$$

$$=P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots AP=P^{-1}A^kP,$$

知 $A^k\sim B^k$.

(2)由于

$$P^{-1}(a_0E)P=a_0E,$$

并且由(1)可知

$$P^{-1}(a_1A)P=a_1B,\quad \cdots,\quad P^{-1}(a_kA^k)P=a_kB^k.$$

等式两边全部相加,得

$$P^{-1}(a_kA^k+\cdots+a_1A+a_0E)P=a_kB^k+\cdots+a_1B+a_0E,$$

即 $P^{-1}f(A)P=f(B)$,故 $f(A)\sim f(B)$.

(3)因 A,B 相似,故有可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=B$,且 $|A|=|B|$,两边求逆,得

$$P^{-1}A^{-1}P=B^{-1},$$

上式两边乘 $|A|$,得

$$P^{-1}(|A|A^{-1})P=|A|B^{-1}=|B|B^{-1}.$$

因 $|A|A^{-1}=A^*$,$|B|B^{-1}=B^*$,故 $P^{-1}A^*P=B^*$,于是 $A^*\sim B^*$.

【注】 若 $A\sim B$,则 $kA\sim kB$,$A^k\sim B^k$,$f(A)\sim f(B)$,又 A,B 可逆时,$A^{-1}\sim B^{-1}$,$A^*\sim B^*$,且 $f(A^{-1})\sim f(B^{-1})$,$f(A^*)\sim f(B^*)$.

例 5.14 (1)A,B 是 n 阶方阵,且 A 是实对称矩阵.证明 A 相似于 B 的充分必要条件是 A,B 相似于同一个对角矩阵 Λ;

(2)设 $A=\begin{bmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}5&0&0\\-5&-1&3\\4&3&-1\end{bmatrix}$,问 A,B 是否相似,说明理由.

(1)**证明** 必要性.因 A 是实对称矩阵,所以存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=\Lambda$,Λ 是对角矩阵,即 $A\sim\Lambda$.若 A 相似于 B,则由相似的传递性知,$B\sim\Lambda$.故 A,B 相似于同一个对角矩阵 Λ.

充分性.若 A,B 相似于同一个对角矩阵,设为 $A\sim\Lambda$,$B\sim\Lambda$,即 $A\sim\Lambda\sim B$.故 $A\sim B$.

(2)**解** 因

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{bmatrix},$$

有

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+4&1&-4\\0&\lambda-3&1\\-\lambda-4&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+4&1&-4\\0&\lambda-3&1\\0&2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+4)(\lambda^2-7\lambda+10)=(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-5)=0.$$

故 A 有 3 个不同的特征值 $\lambda_1=-4,\lambda_2=2,\lambda_3=5$,故 $A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}-4&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}$.

又

$$B=\begin{bmatrix}5&0&0\\-5&-1&3\\4&3&-1\end{bmatrix},$$

有

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-5&0&0\\5&\lambda+1&-3\\-4&-3&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda^2+2\lambda-8)=(\lambda-5)(\lambda+4)(\lambda-2)=0.$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 有 3 个不同的特征值 $\lambda_1=-4,\lambda_2=2,\lambda_3=5$,故

$$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}-4&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}.$$

综上知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

【注】 特征值相同是两个矩阵相似的必要条件,如 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ 的特征值不同肯定不相似,但特征值相同的矩阵也不一定相似,如 $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 的特征值相同,但并不相似;当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是实对称矩阵时,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

五、求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$

在已知 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的条件下,其基本步骤如下.

(1)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

(2)求 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$.

(3)令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n]$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$.

例 5.15 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量,且满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1)求矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{B}$;

(2)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(3)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解 (1)将题设条件合并成矩阵形式有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]&=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3]\\&=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix},\end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}.$$

(2)因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,故 $\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$是可逆矩阵,且有 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似,相似矩阵有

相同的特征值. 因

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -2\\ -1 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+4)=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0,$$

故 B 的特征值为 1,1,4,所以 A 的特征值也为 1,1,4.

(3)对于矩阵 B,当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,由 $(E-B)x=0$,即

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -2\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\xi_1=[1,-1,0]^T$,$\xi_2=[-2,0,1]^T$;

当 $\lambda_3=4$ 时,由 $(4E-B)x=0$,即

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\xi_3=[0,1,1]^T$.

令 $Q=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$,有 $Q^{-1}BQ=\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$,故有

$$Q^{-1}BQ=Q^{-1}C^{-1}ACQ=\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

取 $P=CQ=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=[\alpha_1-\alpha_2,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3]$,则有

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

六、实对称矩阵的相似对角化

若 A 为实对称矩阵,则其用正交矩阵 Q 相似对角化的基本步骤如下.

(1)求 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

(2)求 A 的对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$.

(3)将 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 正交化(若需要的话)、单位化为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$.

(4)令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$,则 Q 为正交矩阵,且 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$.

例 5.16 证明:实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

证明 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{x}_i\neq\boldsymbol{0},i=1,2)$,$\lambda_1\neq\lambda_2$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则

$$\begin{aligned}\lambda_1\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1&=\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1\\&=(\lambda_2\boldsymbol{x}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1=\lambda_2\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1.\end{aligned}$$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$,因此$\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1=0$,即$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=0$,故当$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量时,$\boldsymbol{x}_1$ 与$\boldsymbol{x}_2$ 正交.

例 5.17 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix},$$

求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

解
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-4\\0&\lambda-2&0\\-2&-4&\lambda+6\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)(\lambda^2+5\lambda-14)$$
$$=(\lambda-2)^2(\lambda+7),$$

令$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$,由$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得线性无关的特征向量$\boldsymbol{\xi}_1=[2,-1,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=[2,0,1]^{\mathrm{T}}$.用施密特正交化方法,先正交化,得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1,$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$
$$=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{4}{5}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix},$$

再将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left[\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5},0\right]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_2=\left[\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3}\right]^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\lambda_3=-7$,由$(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得特征向量$\boldsymbol{\xi}_3=[1,2,-2]^{\mathrm{T}}$,单位化得$\boldsymbol{\eta}_3=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right]^{\mathrm{T}}$,取正交矩阵

$$Q=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=\begin{bmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3}\\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

则$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -7\end{bmatrix}$.

七、反求参数

常用方法如下.

(1)若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$,$\lambda_A=\lambda_B$. 这些等式可求参数.

(2)若 $\boldsymbol{\xi}_0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量,则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_0=\lambda_0\boldsymbol{\xi}_0$,这便建立了若干等式(方程组),可求参数.

(3)若 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则有 $|\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,此等式可求参数.

例 5.18 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&&\\&y&\\&&-1\end{bmatrix},$$

且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则参数 $x=$________,$y=$________.

解 应填 0;1.

因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则有 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$,得

$$|\boldsymbol{A}|=-2=|\boldsymbol{B}|=-2y,\quad y=1.$$

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=2+x=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})=1+y,\quad x=0.$$

例 5.19 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵,则 x,y 应满足________.

解 应填 $x+y=0$.

$\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵,对角矩阵的对角元素是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,且应存在 3 个线性无关的特征向量. 因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

故无论 x,y 为何值,均有 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

对于二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$,应有 2 个线性无关的特征向量,即方程组

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

应有 2 个线性无关的解向量. 因

$$E-A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\-1&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&-x-y\\0&0&0\end{bmatrix},$$

故当 $x+y=0$ 时，有 $r(E-A)=1$，从而 $(E-A)x=0$ 有 2 个线性无关的解向量，此时 A 相似于对角矩阵.

例 5.20 已知 $\alpha=[1,k,1]^{\mathrm{T}}$ 是 A^{-1} 的特征向量，其中 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$，求 k 及 α 所对应的 A^{-1} 的特征值.

解 由题设 $A^{-1}\alpha=\lambda\alpha$，$\lambda$ 是 A^{-1} 的对应于 α 的特征值，两端左乘 A，得 $\alpha=\lambda A\alpha$.

因 $\alpha\neq 0$，故 $\lambda\neq0$，$A\alpha=\dfrac{1}{\lambda}\alpha\overset{\text{记}}{=\!=}\mu\alpha$，即

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}.$$

由对应分量相等，得 $\begin{cases}3+k=\mu,\\2+2k=k\mu,\\3+k=\mu,\end{cases}$

得 $2+2k=k(3+k)$，$k^2+k-2=0$，故 $k=1$ 或 $k=-2$.

当 $k=1$ 时，$\alpha=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\mu=4$，$\lambda=\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{1}{4}$；

当 $k=-2$ 时，$\alpha=[1,-2,1]^{\mathrm{T}}$，$\mu=1$，$\lambda=\dfrac{1}{\mu}=1$.

【注】 已知 A^{-1} 的特征向量，因 A,A^{-1} 有相同的特征向量，故不必求出 A^{-1}.

八、由特征值、特征向量反求 A

若有可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，则 $A=P\Lambda P^{-1}$，这便是求解的基本思路.

例 5.21 设 A 是 3 阶矩阵，已知 $A\xi_i=i\xi_i\ (i=1,2,3)$，其中 $\xi_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\xi_3=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$，求矩阵 A.

解 方法一 由题设 $A\xi_i=i\xi_i\ (i=1,2,3)$ 知，3 阶矩阵 A 有 3 个互不相同的特征值，所以 A 可以相似于对角矩阵，且 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 3 个线性无关的特征向量，故存在可逆矩阵 $P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$，使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix},$$

故
$$A=P\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

方法二 由题设条件 $A\xi_i=i\xi_i(i=1,2,3)$,合并成矩阵形式,得

$$[A\xi_1,A\xi_2,A\xi_3]=A[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=[\xi_1,2\xi_2,3\xi_3],$$

两端右乘 $[\xi_1,\xi_2,\xi_3]^{-1}$,得

$$\begin{aligned}A&=[\xi_1,2\xi_2,3\xi_3][\xi_1,\xi_2,\xi_3]^{-1}\\&=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

九、求 A^k 及 $f(A)$

主要理论:当 $A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$ 时,有

$$P^{-1}A^kP=\Lambda^k,\quad A^k=P\Lambda^kP^{-1}=P\begin{bmatrix}\lambda_1^k&&&\\&\lambda_2^k&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^k\end{bmatrix}P^{-1},$$

$$P^{-1}f(A)P=f(\Lambda),\quad f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}=P\begin{bmatrix}f(\lambda_1)&&&\\&f(\lambda_2)&&\\&&\ddots&\\&&&f(\lambda_n)\end{bmatrix}P^{-1},$$

从而提供了计算 A^k 及 $f(A)$ 的重要方法.

例 5.22 已知 A 是 3 阶矩阵,且

$$A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}.$$

设 $B=A^3-6A^2+11A-8E$,则 $B=$__________.

解 应填 $-2E$.

由 $A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}$ 知,存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=\Lambda$,$A=P\Lambda P^{-1}$,则

$$\begin{aligned}B&=A^3-6A^2+11A-8E=(P\Lambda P^{-1})^3-6(P\Lambda P^{-1})^2+11P\Lambda P^{-1}-8E\\&=P(\Lambda^3-6\Lambda^2+11\Lambda-8E)P^{-1}\\&=P\left(\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}^3-6\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}^2+11\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\right)P^{-1}\end{aligned}$$

$$=P\begin{bmatrix}1-6+11-8 & & \\ & 8-24+22-8 & \\ & & 27-54+33-8\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=P\begin{bmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & -2\end{bmatrix}P^{-1}=-2E.$$

例 5.23 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求 $A^n(n\geqslant 2)$.

解 A 是分块对角矩阵，记 $A=\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}$，其中 $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，则

$$A^n=\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}B^n & O\\ O & C^n\end{bmatrix}.$$

对于 $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)=0$，对应的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2$.

当 $\lambda_1=-1$ 时，由 $(\lambda_1E-B)x=0$，得 $\xi_1=[1,1]^T$；

当 $\lambda_2=2$ 时，由 $(\lambda_2E-B)x=0$，得 $\xi_2=[-2,1]^T$.

于是有

$$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}，\text{其中 } P=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}，P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix},$$

故

$$B^n=\left(P\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}P^{-1}\right)^n=P\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^nP^{-1}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}(-1)^n+2^{n+1} & (-1)^n\cdot 2-2^{n+1}\\ (-1)^n-2^n & (-1)^n\cdot 2+2^n\end{bmatrix}.$$

对于 $C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，因当 $n\geqslant 2$ 时，$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^n=O$，故

$$C^n=\left(2E+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)^n=2^nE^n+n\cdot 2^{n-1}E^{n-1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n & n\cdot 2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}.$$

因此，

$$A^n=\begin{bmatrix}B^n & O\\ O & C^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}(-1)^n+\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1} & \frac{2}{3}(-1)^n-\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1} & 0 & 0\\ \frac{1}{3}(-1)^n-\frac{1}{3}\cdot 2^n & \frac{2}{3}(-1)^n+\frac{1}{3}\cdot 2^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^n & n\cdot 2^{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}.$$

基础习题精练

习题

5.1 求下列矩阵的特征值和特征向量：

(1)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$； (2)$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$.

5.2 设$\boldsymbol{A}$是3阶矩阵，已知$-3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$不可逆，$|2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$，$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解，则$|\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}|=$________.

5.3 设$\boldsymbol{A}$是4阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，已知$\boldsymbol{A}^*$有特征值$1,-1,2,-4$，求$|\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$.

5.4 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}$，且$|\boldsymbol{A}|=-1$，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^*$有特征值$\lambda_0$，对应于$\lambda_0$的特征向量为$\boldsymbol{\xi}=[-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$，求$a,b,c$及$\lambda_0$.

5.5 设$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{bmatrix}$，则$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=$________.

5.6 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$是可逆矩阵，$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}2a_{11}&-a_{12}&3a_{13}\\2a_{21}&-a_{22}&3a_{23}\\2a_{31}&-a_{32}&3a_{33}\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{B}\sim$(　　).

(A)$\begin{bmatrix}-1&&\\&2&\\&&-3\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}2&&\\&-1&\\&&3\end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix}3&&\\&-2&\\&&-1\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&2\end{bmatrix}$

5.7 证明：n阶矩阵$\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{bmatrix}$相似.

5.8 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{bmatrix}$相似于矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{bmatrix}$.

(1)求a,b的值；

(2)求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵.

5.9 已知$\boldsymbol{\xi}=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$是矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$的一个特征向量.

(1)确定参数 a,b 及 ξ 对应的特征值 λ；

(2)A 是否相似于对角矩阵？说明理由.

5.10 已知 $1,1,-1$ 是3阶实对称矩阵 A 的特征值，向量 $\xi_1=[1,1,1]^T$，$\xi_2=[2,2,1]^T$ 是 A 的对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量，求矩阵 A.

5.11 已知 $A=\begin{bmatrix}2 & x & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 3 & -6 & 0\end{bmatrix}$ 能相似于对角矩阵，求 A^{100}.

解答

5.1 解 (1)对矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，由 $(E-A)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

解得基础解系 $\xi_1=[1,0,1]^T$，$\xi_2=[0,1,0]^T$，$k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 为对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的全部特征向量，其中 k_1,k_2 是不全为零的任意常数.

当 $\lambda_3=-1$ 时，由 $(-E-A)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

解得基础解系为 $\xi_3=[1,0,-1]^T$，$k\xi_3$ 为对应于 $\lambda_3=-1$ 的全部特征向量，其中 k 为任意非零常数.

(2)对矩阵 $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$，由

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{[1]+[2]-[3]}\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & -2\\ \lambda+1 & \lambda+3 & -3\\ -\lambda-1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&1&-2\\1&\lambda+3&-3\\-1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&1&-2\\0&\lambda+2&-1\\0&1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+1)=(\lambda+1)^3=0,$$

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时，由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad (*)$$

解得全部特征向量为 $k[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意非零常数.

【注】 在第(2)问中，因 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$，特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关，任意两个向量线性无关，方程组中总有一个方程是多余方程，故在求解方程组(*)时，去掉第二个方程是方便的.

5.2 42 **解** 由题知，$-3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆，故 $|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=3$；
$|2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=(-1)^3|-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_2=-2$；
$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，故 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_3=1$.

综上，3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=3,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$，得 $|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=-6$. 则 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为

$$\mu_1=\frac{-6}{3}=-2,\quad \mu_2=\frac{-6}{-2}=3,\quad \mu_3=-6.$$

则 $\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $m_1=-2-1=-3,m_2=3-1=2,m_3=-6-1=-7$，故

$$|\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}|=(-3)\times2\times(-7)=42.$$

5.3 **解** $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $1,-1,2,-4$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=\prod_{i=1}^{4}\lambda_i=8\neq0$，故 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，$\boldsymbol{A}$ 可逆. 又 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}=|\boldsymbol{A}|^3=8$，得 $|\boldsymbol{A}|=2$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_A=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_{A^*}}$，即为 $2,-2,1,-\dfrac{1}{2}$.

设 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$，则 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值为

$$f(2)=2^3+2\times2^2-2-3=11,$$

$$f(-2)=(-2)^3+2\times(-2)^2+2-3=-1,$$

$$f(1)=1+2-1-3=-1,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-3=-\frac{17}{8},$$

故 $|\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=f(2)\cdot f(-2)\cdot f(1)\cdot f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{187}{8}$.

5.4 **解** 由题知 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\xi}=\lambda_0\boldsymbol{\xi}$，两端左乘 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\xi}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\xi}=-\boldsymbol{\xi}$，即

$$\lambda_0\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},$$

$$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1,\\ \lambda_0(-5-b+3)=1,\\ \lambda_0(-1+c-a)=-1,\end{cases}$$

得 $\lambda_0=1,a=c,b=-3$，又 $|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}=a-3=-1$，得 $a=c=2$.

5.5 4 **解** 因 $A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$，即存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，即 $A=P\Lambda P^{-1}$，故

$$\begin{aligned} r(A-E)+r(A+E) &= r(P\Lambda P^{-1}-E)+r(P\Lambda P^{-1}+E) \\ &= r(P(\Lambda-E)P^{-1})+r(P(\Lambda+E)P^{-1})=r(\Lambda-E)+r(\Lambda+E) \\ &= r\left(\begin{bmatrix}0 & & \\ & -2 & \\ & & 1\end{bmatrix}\right)+r\left(\begin{bmatrix}2 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{bmatrix}\right) \\ &= 2+2=4. \end{aligned}$$

5.6 (B) **解** 因

$$BA=\begin{bmatrix}2a_{11} & -a_{12} & 3a_{13} \\ 2a_{21} & -a_{22} & 3a_{23} \\ 2a_{31} & -a_{32} & 3a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & 3\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & 3\end{bmatrix},$$

又 A 可逆，故 $B=A\begin{bmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & 3\end{bmatrix}A^{-1}=(A^{-1})^{-1}\begin{bmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & 3\end{bmatrix}A^{-1}$，故 $B\sim\begin{bmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & 3\end{bmatrix}$.

5.7 **证明** 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n\end{bmatrix}$.

因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}=0,$$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-n\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}=0,$$

所以 A 与 B 有相同的特征值 $\lambda_1=n,\lambda_2=0(n-1$ 重).

由于 A 为实对称矩阵，因此 A 相似于对角矩阵

$$\Lambda=\begin{bmatrix}n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix}.$$

因为 $r(\lambda_2 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})=1$，所以 $\boldsymbol{B}$ 对应于特征值 $\lambda_2=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，于是 $\boldsymbol{B}$ 也相似于 $\boldsymbol{A}$.

故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

【注】 (1)本题是2014年考研实考题，阅卷的结果表明，很多考生没有考虑用相似的传递性来证明，或者没有说明 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可以相似对角化，就直接由特征值相同推得 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，这是不完整的.

(2)本题也道出了一个判别矩阵相似的重要定理：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可相似对角化，且特征值相同，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

(3)读者应进一步明白，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，只能得出 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，是推不出 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}$ 的. 如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，其特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，但 $2-r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2-1=1$，这个二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 没有2个线性无关的特征向量，于是 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化；再取可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}$ 也不可相似对角化.

5.8 解 (1)由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似，因此

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}),\quad |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,$$

于是

$$3+a=2+b,\quad 2a-3=b,$$

解得

$$a=4,\quad b=5.$$

(2)由(1)知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&5&0\\0&3&1\end{bmatrix}$.

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似，因此

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)^2(\lambda-5),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$；

当 $\lambda_3=5$ 时，解方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]=\begin{bmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{P}$ 为所求可逆矩阵.

5.9 解 (1)设 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值为 λ，则有 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，即

$$\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},$$

即
$$\begin{cases}2-1-2=\lambda,\\5+a-3=\lambda,\\-1+b+2=-\lambda,\end{cases}$$

解得 $\lambda=-1,a=-3,b=0$.

(2)当 $a=-3,b=0$ 时，令

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3=0,$$

可知 $\lambda=-1$ 是 A 的三重特征值，但

$$-E-A=\begin{bmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{bmatrix},\quad r(-E-A)=2.$$

当 $\lambda=-1$ 时，对应的线性无关特征向量只有一个，因此 A 不能相似于对角矩阵.

5.10 分析 因 A 是实对称矩阵，故 A 一定相似于对角矩阵，且不同的特征值对应的特征向量相互正交，故由此可求出 $\lambda_3=-1$ 对应的特征向量(和例5.21不同，在例5.21中，A 不是实对称矩阵，求 A 时，A 的3个特征向量必须给出).

解 设 $\lambda_3=-1$ 对应的特征向量为 $\xi_3=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$，则由 A 是实对称矩阵，有

$$\begin{cases}(\xi_1,\xi_3)=x_1+x_2+x_3=0,\\(\xi_2,\xi_3)=2x_1+2x_2+x_3=0,\end{cases}$$

取 $\xi_3=[-1,1,0]^{\mathrm{T}}$，从而得可逆矩阵 $P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda,$$

则有
$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&4\\1&1&-2\\-1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

【注】 若将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 标准正交化，还可求得正交矩阵 Q，使得 $A=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，用转置来替代求逆运算，结果当然是一样的.

5.11 解 因 $A=\begin{bmatrix}2&x&1\\0&3&0\\3&-6&0\end{bmatrix}$ 的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-x&-1\\0&\lambda-3&0\\-3&6&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda^2-2\lambda-3)=(\lambda-3)^2(\lambda+1)=0,$$

故有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=-1$.

已知 A 能相似于对角矩阵，故当 $\lambda=3$(二重根)时，应有 $r(3E-A)=1$. 由

$$3E-A=\begin{bmatrix}1 & -x & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -3 & 6 & 3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -x & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 6-3x & 0\end{bmatrix},$$

知 $r(3E-A)=1\Leftrightarrow x=2$.

故当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时，$(3E-A)x=0$ 的同解方程为 $x_1-2x_2-x_3=0$，解得线性无关的特征向量

$$\xi_1=[1,0,1]^T,\quad \xi_2=[2,1,0]^T;$$

当 $\lambda_3=-1$ 时，
$$(-E-A)x=\begin{bmatrix}-3 & -2 & -1\\ 0 & -4 & 0\\ -3 & 6 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0,$$

解得线性无关的特征向量 $\xi_3=[1,0,-3]^T$.

于是有可逆矩阵 $P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & -1\end{bmatrix}$，则 $A=P\Lambda P^{-1}$，故

$$A^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^{100} & & \\ & 3^{100} & \\ & & (-1)^{100}\end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -6 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3^{101}+1 & 2\times3^{100}-2 & 3^{100}-1\\ 0 & 4\times3^{100} & 0\\ 3^{101}-3 & -6\times3^{100}+6 & 3^{100}+3\end{bmatrix}.$$

第6讲 二次型

基础知识结构

- 二次型的定义与矩阵表示
- 化二次型为标准形与规范形
  - 配方法
  - 正交变换法
  - 合同
  - 惯性定理
- 正定二次型
  - 定义
  - 充要条件
  - 必要条件
  - 判定
    - 具体型二次型
    - 抽象型二次型

基础内容精讲

一、二次型的定义及其矩阵表达式

n 元变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ +a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\ +\cdots \\ +a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为 n **元二次型**，简称**二次型**.

考研只研究系数 $a_{ij}\in\mathbf{R}(i\leqslant j;i,j=1,2,\cdots,n)$ 的情况，故称此二次型 f 为**实二次型**.

因为 $x_ix_j=x_jx_i$，若令 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，于是

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\ +\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \quad (*)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j, \qquad (**)$$

其中(*)式称为完全展开式,(**)式称为和式. 令

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},$$

则二次型可表示为

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax. \qquad (***)$$

(***)式称为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵表达式,实对称矩阵 A 称为**二次型 $f(x)$ 的矩阵**. 这里需要着重多说几句.

二次型的矩阵 A 是一个**对称矩阵**,其中 $A=(a_{ij}),a_{ij}=a_{ji}$,即满足 $A^{\mathrm{T}}=A$. 为什么要强调这一点?

事实上,一个二次型可以有不同的写法,例如三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2,$$

可以写成

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+3x_2x_1,$$

也可以写成

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_1$$

等. 对应的用矩阵表示也有多种形式:

$$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \qquad ①$$

$$=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&1&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \qquad ②$$

$$=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}. \qquad ③$$

这样,代表二次型的矩阵就不唯一了,不利于研究二次型问题. 现在我们立了"规矩",**规定二次型的矩阵必须是对称矩阵,代表二次型的矩阵就是唯一的**. 所以只有对称矩阵才是二次型的矩阵,也只有用对称矩阵表达的式子才是二次型的矩阵表达式,上面第③种形式是按"规矩"写的. 再看下面这个例子.

注例 写出三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$ 的二次型矩阵 A.

解 将二次型表示成矩阵形式是基本要求,方法:A 的主对角线元素 a_{ii} 是平方项 x_i^2 的系数,a_{ij} 是混合项 x_ix_j 的系数的 $\frac{1}{2}$,或利用矩阵乘法(见本题解答).

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3\\&=2x_1^2-x_1x_2+x_1x_3-x_2x_1+2x_2^2-x_2x_3+x_3x_1-x_3x_2+2x_3^2\\&=x_1(2x_1-x_2+x_3)+x_2(-x_1+2x_2-x_3)+x_3(x_1-x_2+2x_3)\\&=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}2x_1-x_2+x_3\\-x_1+2x_2-x_3\\x_1-x_2+2x_3\end{bmatrix}=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\end{aligned}$$

得
$$A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}.$$

系数矩阵 A 的秩称为**二次型 $f(x)$ 的秩**. 比如注例中,$A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$,其秩 $r(A)=3$,故其对应的二次型的秩也是 3.

二、合同变换,二次型的合同标准形、规范形

1. 线性变换的定义

对于 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,若令

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n,\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n,\\\quad\cdots\cdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n,\end{cases}\tag{$*$}$$

记 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$,$C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}$,$y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$,则($*$)式可写为

$$x=Cy,$$

其中($*$)式称为从 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 到 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**线性变换**. 若线性变换的系数矩阵 C 可逆,即 $|C|\neq0$,则称为**可逆线性变换**. 现给出 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$,令 $x=Cy$,则

$$f(x)=(Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy)=y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y.$$

记 $B=C^{\mathrm{T}}AC$,则

$$f(x)=y^{\mathrm{T}}By=g(y).$$

此时,二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 通过线性变换 $x=Cy$ 得到一个新二次型 $g(y)=y^{\mathrm{T}}By$.

2. 矩阵合同的定义与性质

读者不难发现,上述二次型 $f(x)$ 与 $g(y)$ 的系数矩阵 A 与 B 有下述关系

$$B=C^{\mathrm{T}}AC,$$

这种关系叫什么呢? 下面就给出数学上的描述.

定义 设 A,B 为 n 阶矩阵,若存在可逆矩阵 C,使得

$$C^{\mathrm{T}}AC=B,$$

则称 A 与 B **合同**. 记作 $A\simeq B$. 此时称 $f(x)$ 与 $g(y)$ 为**合同二次型**.

可以看出,**在二次型背景下**,A 表征的是 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的"形态",B 表征的是 $g(y)=y^{\mathrm{T}}By$ 的"形态",但是毕竟 $f(x)=g(y)$,是同一个东西,之所以 A,B 分别表征了不同的"形态",无非是因为在 $x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 的参照系下与在 $y=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}$ 的参照系下看到的是同一个事物的不同"形态"罢了.

若在 $x=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$ 的参照系下,"$f(x)=$某常数"的图形是"正"着放的,如图 6-1 所示;则在 $y=$

$[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}$ 的参照系下，“$g(\boldsymbol{y})=$某常数”的图形是“歪”着放的，如图 6-2 所示(读者只需将头稍稍歪一下，使得 y_3 轴平行于你的鼻梁，即可看到图形在 $\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}$ 的参照系下的“歪”的形态).

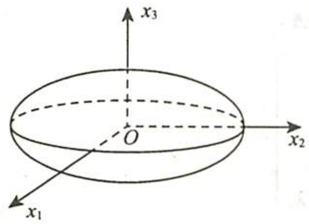


图 6-1　$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=$某常数

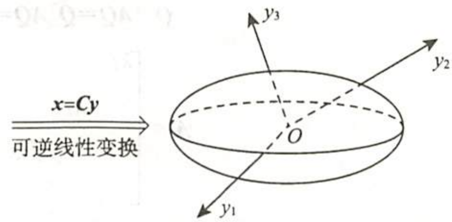


图 6-2　$g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=$某常数

上面这段分析让我们理解到：在二次型中，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的合同，就是指同一个二次型在可逆线性变换下的**两个不同状态的联系**.

合同有以下三个性质：

(1) $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{A}$(反身性)；

(2)若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{A}$(对称性)；

(3)若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{C}$(传递性).

特别需要指出的是，由矩阵合同的定义知，若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$，则有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$. 因此有重要结论：**可逆线性变换不会改变二次型的秩**. 顺便再说一句，由于在二次型中，二次型的矩阵都是对称矩阵，因此和**对称矩阵合同的矩阵也必是对称矩阵**. 这是因为若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}.$$

3. 二次型的标准形、规范形

若二次型中只含有平方项，没有交叉项(即所有交叉项的系数全为零)，即形如

$$d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

的二次型称为**标准形**.

若标准形中，系数 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$ 仅为 $1,-1,0$，即形如 $x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$ 的二次型称为**规范形**.

若二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 合同于标准形 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$(或合同于规范形 $x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$)，则称 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 的**合同标准形**(则称 $x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 的**合同规范形**).

任何二次型均可通过配方法(作可逆线性变换)化成标准形及规范形，用矩阵语言表述：任何实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \text{或} \boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

(标准形)　　　　(规范形)

任何二次型也可以通过正交变换化成标准形，用矩阵语言表达即是任何实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，一定存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda},$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

在众多实际问题中，人们都会将二次型化成标准形、规范形，因为它们是"最佳形态".

三、惯性定理

无论选取什么样的可逆线性变换，将二次型化成标准形或规范形，其正项个数 p，负项个数 q 都是不变的，p 称为**正惯性指数**，q 称为**负惯性指数**.

【注】 (1)若二次型的秩为 r，则 $r=p+q$，可逆线性变换不改变正、负惯性指数；

(2)两个二次型(或实对称矩阵)合同的充要条件是有相同的正、负惯性指数，或有相同的秩及正(或负)惯性指数.

四、正定二次型及其判别

1. 定义

n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. 若对任意的 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，均有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，则称 f 为**正定二次型**，称二次型的对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**正定矩阵**.

2. 二次型正定的充要条件

n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$(定义)

$\Leftrightarrow f$ 的正惯性指数 $p=n$

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{D}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{E}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的全部顺序主子式均大于 0.

【注】 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$|\boldsymbol{A}_k|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}$$

称为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序(或左上角)主子式. 当 k 取 $1,2,\cdots,n$ 时，就得到 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个顺序主子式.

3. 二次型正定的必要条件

(1)$a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$.

(2)$|\boldsymbol{A}|>0$.

基础例题精解

一、用配方法化二次型为标准形

本节的理论依据与注意事项请看例 6.1 与例 6.2 后的注.

例 6.1 化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2$$

为标准形,并写出所作的可逆线性变换.

解 先对 x_1^2 及所有含有 x_1 的混合项 $2x_1x_2,2x_1x_3$ 配完全平方,有

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-x_3^2-2x_2x_3-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2\\&=(x_1+x_2+x_3)^2-2x_2^2-4x_2x_3-2x_3^2.\end{aligned}$$

再对 $2x_2^2$ 及所有含 x_2 的混合项 $-4x_2x_3$ 配完全平方,有

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_2+x_3)^2.$$

作线性变换

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\y_2=x_2+x_3,\\y_3=x_3,\end{cases}\quad 即\begin{cases}x_1=y_1-y_2,\\x_2=y_2-y_3,\\x_3=y_3.\end{cases}$$

把二次型化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)\xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}y_1^2-2y_2^2$.

将线性变换表示成矩阵形式,即

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$. 因 $|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$,故所作变换是可逆线性变换.

【注】 (1)用配方法化二次型为标准形时,要遵循"将某个变量的平方项及与其有关的混合项一次配完,配成一个完全平方,减少一个未配完全平方的变量,使得总的平方项的项数小于等于变量个数". 目的是保证所用变换是可逆的.

(2)当总的完全平方项的项数小于变量个数时,例如本题是三元二次型,完全平方项个数是 2,应视作

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_2+x_3)^2+0x_3^2,$$

变换为

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\y_2=x_2+x_3,\\y_3=x_3.\end{cases}$$

如变换为

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\y_2=x_2+x_3,\end{cases}$$

显然是不可逆的.

(3)配方法中配方次序可以不同,故所作可逆线性变换不唯一,标准形不唯一,但标准形中不为零的项数($r(f)$)、正项个数(正惯性指数)、负项个数(负惯性指数)是不变的.

(4)本题用矩阵语言表述:设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}$,求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$,并写出 $\boldsymbol{\Lambda}$.

例 6.2 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3$ 化为规范形,并求所用的可逆线性变换.

解 令

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=y_1-y_2,\\x_3=y_3,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=y_1^2-y_2^2+y_1y_3+y_2y_3-y_1y_3+y_2y_3=y_1^2-y_2^2+2y_2y_3\\&=y_1^2-(y_2-y_3)^2+y_3^2.\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}z_1=y_1,\\z_2=y_2-y_3,\\z_3=y_3,\end{cases}\text{即}\begin{cases}y_1=z_1,\\y_2=z_2+z_3,\\y_3=z_3,\end{cases}$$

得二次型的规范形为

$$f(x_1,x_2,x_3)\xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}}z_1^2-z_2^2+z_3^2.$$

所用线性变换为

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=y_1-y_2,\\x_3=y_3\end{cases}\text{与}\begin{cases}y_1=z_1,\\y_2=z_2+z_3,\\y_3=z_3,\end{cases}\text{得}\begin{cases}x_1=z_1+z_2+z_3,\\x_2=z_1-z_2-z_3,\\x_3=z_3.\end{cases}$$

用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{z},$$

其中 $|C|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=-2\neq0$，故 $x=Cz$ 是可逆线性变换.

【注】(1)用配方法化二次型为标准形、规范形，若有平方项，应将平方项及其有关混合项配成完全平方(如例 6.1). 没有平方项时，作可逆线性变换 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=y_1-y_2,\\x_3=y_3,\end{cases}$ 使其出现平方项，然后再配完全平方(如本题). 这样，任何二次型总可以用配方法化成标准形、规范形，且所作变换均是可逆线性变换. 用矩阵的语言表述：任何实对称矩阵 A，必存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=\Lambda$，其中 Λ 是对角矩阵，或是对角元素只取 $1,-1,0$ 的对角矩阵.

(2)配方是中学已经掌握的内容，并不难，但为我们提供了①所作的可逆线性变换；②与 A 合同的对角矩阵；③二次型(或 A)的秩；④正、负惯性指数；⑤是否正定等二次型的重要信息，故在求上述问题时，别忘了有一招是配方法.

二、用正交变换化二次型为标准形

这是考研重点，几乎每年都考大题，事实上，当写出二次型的矩阵 A 时，便成为"将 A 用正交矩阵相似对角化"的问题了，也就是第 5 讲中"基础例题精解"的"六".

例 6.3 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准形，并求所作的正交变换.

解 二次型的对应矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix},$$

由特征方程

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-2&\lambda-5&\lambda-1\\2&4&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-4&\lambda-9&0\\2&4&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-11\lambda+10)=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0,$$

知 A 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，有

$$(E-A)x=\begin{bmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0},\qquad (*)$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=[-2,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=[2,0,1]^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=10$ 时，有

$$(10\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},\tag{**}$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_3=[1,2,-2]^{\mathrm{T}}$.

将 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 标准正交化.

取
$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\xi}_1=[-2,1,0]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\eta}_1)}{(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1)}\boldsymbol{\eta}_1=[2,0,1]^{\mathrm{T}}-\frac{-4}{5}[-2,1,0]^{\mathrm{T}}=\left[\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right]^{\mathrm{T}},$$

不妨取 $\boldsymbol{\eta}_2=[2,4,5]^{\mathrm{T}}$.

再将 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化

$$\boldsymbol{\eta}_1^{\circ}=\begin{bmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2^{\circ}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{5}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3^{\circ}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}\end{bmatrix},$$

得正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1^{\circ},\boldsymbol{\eta}_2^{\circ},\boldsymbol{\eta}_3^{\circ}]$，令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，则原二次型化为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=y_1^2+y_2^2+10y_3^2,$$

其中正交变换为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&\frac{-2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}.$$

【注】 (1)正交变换只能化二次型为标准形，不能化为规范形(除非特征值都属于$\{1,-1,0\}$).

(2)正交变换不唯一，但经正交变换所得标准形是唯一的，求得特征值后即可得标准形为

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

(3)解方程组(* *)的技巧：

$\lambda=10$ 是单根，$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，必可相似对角化，故 $r(10\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，必有一个方程是多余方程. 因$10\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$中三行均不成比例，任一方程均是另两方程的线性组合，故可去除任一方程，例如去掉第一个方程，剩下的仍是同解方程组，

$$\begin{bmatrix}-2&5&4\\2&4&5\\0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-2&5&4\\0&9&9\\0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-2&5&4\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-2&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

解得 $\boldsymbol{\xi}_3=[1,2,-2]^{\mathrm{T}}$.

(4)$\lambda=1$是重根,方程组(*)有两个线性无关解,为避免后面的正交化计算,可在解方程组(*)时,同时考虑正交化.$\lambda_1=\lambda_2=1$,对应特征向量应满足

$$-x_1-2x_2+2x_3=0.$$

取$\boldsymbol{\xi}_1=[-2,1,0]^{\mathrm{T}}$,再求$\boldsymbol{\xi}_2$时,可先令$\boldsymbol{\xi}_2$和$\boldsymbol{\xi}_1$正交,取$\boldsymbol{\xi}_2=[1,2,a]^{\mathrm{T}}((\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=0,a$待定),再代入方程以确定$a$,即$-1-4+2a=0$,得$a=\frac{5}{2}$,则$\boldsymbol{\xi}_2=\left[1,2,\frac{5}{2}\right]^{\mathrm{T}}$,取整数得$\boldsymbol{\xi}_2'=[2,4,5]^{\mathrm{T}}$.

(5)计算过程还可作如下验算:①$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}$,$|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i$;②当$\lambda_1\neq\lambda_3$时,$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_3)=0$.

(6)本题用矩阵语言表述即:设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$,求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$,使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$,并写出对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$.

三、合同矩阵与合同二次型

合同矩阵与合同二次型本质上一样,关键是掌握判别矩阵合同的方法.

例 6.4 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,则下列矩阵中与$\boldsymbol{A}$合同的是(　　).

(A)$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　(B)$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$　(C)$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$　(D)$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

解 应选(B).

方法一 $\boldsymbol{A}$对应的二次型为

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2,$$

经配方法化为

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2=(x_1+2x_2)^2-3x_2^2+x_3^2,$$

知$r(f)=3$,正惯性指数$p=2$,与选项(B)相同,故应选(B).

方法二 求$\boldsymbol{A}$的特征值.由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\-2&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-3)=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1)=0,$$

知$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=-1$,且$\boldsymbol{A}$对应的二次型在正交变换下化标准形为$y_1^2+3y_2^2-y_3^2$,与选项(B)的正、负惯性指数相同,即

$$\boldsymbol{A}\simeq\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

故应选(B).

四、具体型二次型的正定问题

本部分的理论依据请参看"基础内容精讲"中"四、正定二次型及其判别",对于例 6.5 的五种方法,请认真研读并加以总结.

例 6.5 判别二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

的正定性.

解
$$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$

故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的对应矩阵是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

方法一 判别对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式是否大于零.

由
$$2>0,\quad \begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3>0,$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=4>0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 正定,f 是正定二次型.

方法二 判别对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是否全部大于零.

由
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&\lambda-2&-1\\1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)^2=0,$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=1$ 全部大于零,故 $\boldsymbol{A}$ 正定,f 是正定二次型.

方法三 利用配方法化为标准形,判别 f 的正惯性指数 p 是否等于 n(未知量个数).

$$\begin{aligned}f&=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\\&=2\left(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2+x_2x_3\\&=2\left(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(x_2+\frac{1}{3}x_3\right)^2+\frac{4}{3}x_3^2,\end{aligned}$$

由二次型的标准形知,f 的正惯性指数 $p=3=n$,故 f 是正定二次型.

方法四　用定义,验证是否对任意的$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$,有$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$. 将二次型配成完全平方和(注意:这里配完全平方和的做法与方法三中的配方法不同,这里没有要求将某平方项及与其有关的混合项一次配完),即

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\\&=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2,\end{aligned}$$

故有$f\geqslant0$,且

$$f=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2+x_3=0,\\x_3+x_1=0.\end{cases}\tag{$*$}$$

因方程组$(*)$的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=2\neq0,$$

故方程组$(*)$只有零解,故$f=0\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=0$.

因此,当$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$时,恒有$f(x_1,x_2,x_3)>0$,从而知$f$是正定二次型.

方法五　由方法四知,$f(x_1,x_2,x_3)$可配完全平方和

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2,$$

且利用内积可表示成如下矩阵形式

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=[x_1+x_2,x_2+x_3,x_3+x_1]\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\\x_3+x_1\end{bmatrix}\\&=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\&\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

其中$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$,$|\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=2\neq0$,$\boldsymbol{D}$可逆,故$\boldsymbol{A}$合同于单位矩阵,是正定矩阵,$f(x_1,x_2,x_3)$是正定二次型.

【注】　判别二次型是否正定,以上五种方法是利用定义及4个充要条件.对具体的数值二次型(或实对称矩阵)主要用方法一,即判别顺序主子式是否全部大于零,其他问题要具体分析并根据你对这些充要条件的熟练程度作出选择.

例6.6　下列矩阵中,为正定矩阵的是(　　).

(A) $\begin{bmatrix}4&2&3\\2&2&1\\3&1&-1\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}3&0&1\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$

解 应选(D).

利用正定矩阵的必要条件及顺序主子式判别.

(A)中矩阵 $a_{33}=-1<0$,不正定.

(B),(C)中矩阵二阶顺序主子式 $\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3<0$,不正定.

由排除法,应选(D).

对 $\begin{bmatrix}3&0&1\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$,各阶顺序主子式为

$$\Delta_1=3>0,\quad \Delta_2=6>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}3&0&1\\0&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-2&1\\0&0&1\\1&-3&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&-2\\1&-3\end{vmatrix}=7>0,$$

故其是正定矩阵,应选(D).

例 6.7 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$ 正定,则 t 的取值范围是________.

解 应填 $-\frac{4}{5}<t<0$.

二次型的对应矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1=1,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&t\\t&1\end{vmatrix}=1-t^2,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\t&1-t^2&2+t\\-1&2+t&4\end{vmatrix}=4(1-t^2)-(2+t)^2=-5t^2-4t.$$

于是,f 正定$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 正定$\Leftrightarrow\begin{cases}1-t^2>0,\\-t(5t+4)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<t<1,\\-\frac{4}{5}<t<0\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{4}{5}<t<0.$

五、抽象型二次型的正定问题

例 6.8 设实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实对称矩阵,则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型的充要条件是(　　).

(A)$\boldsymbol{A}^*$ 是正定矩阵　　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定矩阵

(C)$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的负惯性指数为零　　(D)存在 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$

解 应选(B).

因 $\boldsymbol{A}$ 正定,且 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda>0$. 两边求逆,得 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$,所

以 A^{-1} 是实对称矩阵，且其特征值 $\frac{1}{\lambda}>0$，故 A^{-1} 是正定矩阵.

反之，因 A^{-1} 正定，故 $(A^{-1})^{\mathrm{T}}=A^{-1}$，且 A^{-1} 的特征值 $\frac{1}{\lambda}>0$. 两边求逆，得 $A^{\mathrm{T}}=A$，所以 A 为实对称矩阵，且 A 的特征值 $\lambda>0$，故 A 是正定矩阵.

综上，A 正定 $\Leftrightarrow A^{-1}$ 正定，应选(B).

(A) A^* 正定是 A 正定的必要条件，但不充分，如

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-E,\quad A^*=|A|A^{-1}=-1(-E)^{-1}=E^{-1}=E,$$

A^* 是正定矩阵，但 A 不是正定矩阵，故(A)不成立；

(C) f 的负惯性指数为零，但正惯性指数 p 不一定为 n，即可能 $p=r(f)<n$，故(C)不成立；

(D) A 正定 $\Leftrightarrow$ 存在 n 阶实可逆矩阵 C，使 $A=C^{\mathrm{T}}C$，但(D)中 C 没有要求可逆，故(D)不成立. 例如取

$$C=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},$$

此时，

$$A=C^{\mathrm{T}}C=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},$$

$|A|=0$，A 不正定.

例 6.9　已知 A 是 n 阶方阵，有特征值 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$，问：

(1) a 满足什么条件时，$aE+A$ 正定？

(2) 正数 ε 满足什么条件时，$E+\varepsilon A$ 正定？

解　(1) A 有特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，则 $aE+A$ 有特征值 $a+\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，由题设条件，知

$$a+\lambda_1<a+\lambda_2<\cdots<a+\lambda_n.$$

当 $a+\lambda_1>0$，即 $a>-\lambda_1$ 时，有 $a+\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$aE+A$ 是正定矩阵.

(2) A 有特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，则 $E+\varepsilon A$ 有特征值 $1+\varepsilon\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$. 因 $\varepsilon>0$，由题设条件，知

$$1+\varepsilon\lambda_1<1+\varepsilon\lambda_2<\cdots<1+\varepsilon\lambda_n.$$

当 $\lambda_1\geqslant 0$ 时，对任意的 $\varepsilon>0$，$E+\varepsilon A$ 正定；

当 $\lambda_1<0$ 时，只需 $1+\varepsilon\lambda_1>0$，即 $\varepsilon\lambda_1>-1$，$0<\varepsilon<\frac{-1}{\lambda_1}$，就有 $1+\varepsilon\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，从而 $E+\varepsilon A$ 正定.

基础习题精练

习题

6.1　设矩阵

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&0&1\\0&4&5\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

问 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 是否为关于 x_1,x_2,x_3 的二次型？$\boldsymbol{B}$ 是否为 f 的矩阵？写出 f 的矩阵表示式.

6.2 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 的秩为 2，则参数 $a=$__________.

6.3 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$ 的规范形为（　　）.

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　(B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　　(C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $y_1^2-y_2^2$

6.4 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=kx_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2mx_1x_3\ (m>0),$$

其中二次型的矩阵的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

(1) 求 k,m；

(2) 用正交变换化二次型为标准形，并求所作的正交变换及对应的正交矩阵.

6.5 设 $f(x_1,x_2)=x_1^2+3x_2^2+4x_1x_2$，则 $f(x_1,x_2)$ 对应的矩阵与下列矩阵不合同的是（　　）.

(A) $\begin{bmatrix}-1&1\\1&2\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix}0&-1\\-1&1\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$

6.6 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-4&0\\0&0&\frac{1}{9}\end{bmatrix}$ 合同于 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{C}=$__________.

6.7 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k&1&0\\1&1&0\\0&0&k+2\end{bmatrix}$ 正定，则 k 应满足条件__________.

6.8 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{\mathrm{T}}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

解答

6.1 解 f 是关于 x_1,x_2,x_3 的二次型，但 $\boldsymbol{B}$ 不是 f 的矩阵（因为 $\boldsymbol{B}$ 不是对称矩阵）. 求 f 的矩阵有以下两种方法.

方法一 由于

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&0&1\\0&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\&=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\-2x_1+x_3\\4x_2+5x_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$=x_1^2+2x_1x_2+3x_1x_3-2x_1x_2+x_2x_3+4x_2x_3+5x_3^2$$
$$=x_1^2+5x_3^2+3x_1x_3+5x_2x_3,$$

所以 f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&\frac{3}{2}\\0&0&\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&5\end{bmatrix},$$

则 f 的矩阵表示式为 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

方法二 注意 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 是 1×1 矩阵,故其转置不变,因而有

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}]$$
$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}}{2}\boldsymbol{x},$$

由于 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$ 是对称矩阵,故 f 的矩阵为

$$A=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&0&1\\0&4&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-2&0\\2&0&4\\3&1&5\end{bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&\frac{3}{2}\\0&0&\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&5\end{bmatrix},$$

f 的矩阵表示式同方法一.

6.2 2 **解** f 对应的矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&4&2\\2&2&a\end{bmatrix}$,对 A 作初等行变换,

$$A=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&4&2\\2&2&a\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}2&2&2\\0&2&0\\0&0&a-2\end{bmatrix},$$

于是 $r(A)=r(f)=2\Leftrightarrow a=2$.

6.3 (B) **解** **方法一**

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3=2(x_1+x_2+2x_3)^2-2x_1^2-6x_3^2-12x_1x_3$$
$$=2(x_1+x_2+2x_3)^2-2(x_1+3x_3)^2+12x_3^2,$$

故知 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

方法二 二次型 f 对应的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&2&-2\\2&2&4\\-2&4&2\end{bmatrix}.$$

故
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -2 & \lambda-2 & -4\\ 2 & -4 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda+4)(\lambda-2)=0,$$
因 A 的特征值为 $\lambda_1=6,\lambda_2=2,\lambda_3=-4$，故 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$. 故应选(B).

6.4 解 (1)二次型 f 的对应矩阵为
$$A=\begin{bmatrix}k & 0 & m\\ 0 & 2 & 0\\ m & 0 & -2\end{bmatrix}.$$
设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，由题设条件，得
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=k+2-2=1,$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=-4k-2m^2=-12,$$
解得 $k=1,m=\pm2$，已知 $m>0$，故 $m=2$，即 $k=1,m=2$.

(2)由矩阵 A 的特征方程
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2+\lambda-6)=(\lambda-2)^2(\lambda+3)=0,$$
知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$，故二次型的标准形为 $2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=2$，由
$$(2E-A)x=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0},$$
解得基础解系为 $\xi_1=[0,1,0]^{\mathrm T},\xi_2=[2,0,1]^{\mathrm T}$.

对 $\lambda_3=-3$，由
$$(-3E-A)x=\begin{bmatrix}-4 & 0 & -2\\ 0 & -5 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0},$$
解得基础解系为 $\xi_3=[1,0,-2]^{\mathrm T}$.

因 ξ_1,ξ_2,ξ_3 已两两正交，故只需单位化，得
$$\xi_1^\circ=[0,1,0]^{\mathrm T},\quad \xi_2^\circ=\left[\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right]^{\mathrm T},\quad \xi_3^\circ=\left[\frac{1}{\sqrt5},0,\frac{-2}{\sqrt5}\right]^{\mathrm T},$$
则所求正交矩阵
$$Q=[\xi_1^\circ,\xi_2^\circ,\xi_3^\circ]=\begin{bmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt5}\end{bmatrix},$$
故 $x=Qy$ 即为所求正交变换，且有
$$f=x^{\mathrm T}Ax\xlongequal{x=Qy}y^{\mathrm T}Q^{\mathrm T}AQy=y^{\mathrm T}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -3\end{bmatrix}y=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2.$$

6.5 (D) **解** 由题设,二次型为 $f(x_1,x_2)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+3x_2^2+4x_1x_2=(x_1+2x_2)^2-x_2^2$. 可知二次型的正惯性指数 $p=1$,负惯性指数 $q=1$.

(A)对应二次型为 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=-x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2=-(x_1-x_2)^2+3x_2^2$;

(B)对应二次型为 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2+4x_1x_2=(x_1+2x_2)^2-3x_2^2$;

(C)对应二次型为 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=x_2^2-2x_1x_2=(x_2-x_1)^2-x_1^2$;

(D)对应二次型为 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+x_2^2$.

显然只有(D)选项对应二次型与题干中二次型的正、负惯性指数不同.

故应选(D).

6.6 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$ **解** 设 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=x_1^2-4x_2^2+\frac{1}{9}x_3^2$.

令

$$\begin{cases}x_1=y_1,\\ x_2=\frac{1}{2}y_3,\\ x_3=3y_2,\end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

得

$$\begin{aligned}f&=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1 & & \\ & -4 & \\ & & \frac{1}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\\ &\xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}[y_1,y_2,y_3]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & -4 & \\ & & \frac{1}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}\\ &=[y_1,y_2,y_3]\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix},\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$,使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$.

【注】 有读者不理解为何要使用变换$\begin{cases}x_1=y_1,\\ x_2=\dfrac{1}{2}y_3,\\ x_3=3y_2,\end{cases}$为何是 $x_2=\dfrac{1}{2}y_3$ 而不是 $x_2=\dfrac{1}{2}y_2$？这里大家要注意变换的目的是将 $\boldsymbol{A}$ 合同于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$. 而 $\boldsymbol{\Lambda}$ 有两个特点：一是对角元素的绝对值为1；二是对角元素的符号分别是正、正、负，先正后负的顺序决定了必须是 $x_2=\dfrac{1}{2}y_3$，$x_3=3y_2$.

6.7 $k>1$ **解** 要使 $\boldsymbol{A}$ 正定，则 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均大于零，即

$$\Delta_1=k>0;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}k&1\\1&1\end{vmatrix}=k-1>0, k>1;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}k&1&0\\1&1&0\\0&0&k+2\end{vmatrix}=(k+2)(k-1)>0, k<-2\text{ 或 }k>1.$$

取公共部分 $k>1$，此时有 $\Delta_1>0$，$\Delta_2>0$，$\Delta_3>0$，故 $\boldsymbol{A}$ 正定.

6.8 (1)**解** 因为二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，所以其系数1，1，0就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，即

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},$$

且矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的第3列就是属于特征值0的特征向量.

设 $[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值1的特征向量. 由于实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，故有

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0,$$

即 $x_1+x_3=0$，解得 $\boldsymbol{\xi}_2=\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_3=[0,1,0]^{\mathrm{T}}$，即为属于特征值1的两个正交单位特征向量. 以 $\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 分别为 $\boldsymbol{Q}$ 的第1，2列(或第2，1列)得到

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\1&0&0\\0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},$$

并有

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}.$$

从而得

$$A=Q\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}Q^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(2)**证明** 因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,1,0,所以矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 2,2,1. 又 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为实对称矩阵,故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵(实对称矩阵正定的一个充要条件是其所有特征值均为正数).

【注】 第(2)问也可计算 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的顺序主子式 $\Delta_1=\frac{3}{2}>0,\Delta_2=3>0,\Delta_3=4>0$,故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 正定.

无水印版由【公众号：小盆学长】免费提供

张宇

博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《张宇考研数学基础30讲》《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》《张宇考研数学题源探析经典1000题》《张宇考研数学真题大全解》《考研数学命题人终极预测8套卷》《张宇考研数学最后4套卷》《张宇经济类联考综合能力数学通关优题库》作者，高等教育出版社原《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》及新编《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》编者之一，北京、上海、广州、西安等全国著名考研数学辅导班首席主讲。

张宇数学教育系列丛书

教材类

张宇考研数学基础30讲·高等数学分册 书课包

张宇考研数学基础30讲·线性代数分册 书课包

张宇考研数学基础30讲·概率论与数理统计分册 书课包

张宇高等数学18讲 书课包

张宇线性代数9讲 书课包

张宇概率论与数理统计9讲 书课包

题集类

张宇考研数学题源探析经典1000题（分数学一、数学二、数学三） 书课包

张宇考研数学真题大全解（上册）（分数学一、数学二、数学三）

张宇考研数学真题大全解（下册）（分数学一、数学二、数学三） 书课包

考研数学命题人终极预测8套卷（分过关版、高分版）（分数学一、数学二、数学三）

张宇考研数学最后4套卷（分过关版、高分版）（分数学一、数学二、数学三）

北京理工大学出版社网址：http://www.bitpress.com.cn

宇哥考研
新浪微博二维码

张宇考研数学
微信公众号

启航教育
微信公众号

ISBN 978-7-5763-0210-3

定价：49.80元