经济管理类数学基础

线性代数

殷先军　付小芹 主编

清华大学出版社

清华大学出版社数字出版网站

WQBook 文泉书局

www.wqbook.com

ISBN 978-7-302-30877-5

定价：23.00元

经济管理类数学基础

线性代数

殷先军　付小芹 主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书涵盖了教育部非数学专业教学指导委员会最新制定的经济管理类本科数学基础课程教学基本要求。全书共6章，内容包括行列式、矩阵、向量的线性相关性与秩、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型。每章分若干节，章末配有习题，书末附有习题参考答案。

本书可作为高等学校经济管理类、理工类、农学类等专业教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/殷先军，付小芹主编. --北京：清华大学出版社，2012.12
(经济管理类数学基础)
ISBN 978-7-302-30877-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①殷… ②付… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第291404号

责任编辑：石　磊
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　张**：13.5　　**字　　数**：296千字
版　　次：2012年12月第1版　　**印　　次**：2012年12月第1次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：23.00元

产品编号：043047-01

丛书序

随着我国经济与管理学科的迅速发展，数学作为经济与管理学科的重要基础课受到越来越广泛的关注和重视．数学课的教学目的在于培养学生的抽象思维能力、逻辑思维能力、科学的定量分析能力等基本数学素质，特别是培养学生在研究经济理论和经济管理的实践中综合运用数学思想方法去分析问题和解决问题的能力．数学课的教学质量，直接影响后续专业课的教学和相关专业学生的培养质量．

经济管理类数学基础系列课程主要有微积分、线性代数、概率论与数理统计三门课程．长期以来，中央财经大学应用数学学院一直非常重视这些基础课程的建设与改革．学院曾于1998年组织骨干教师编写出版了这三门课程的教材．该教材被评为中央财经大学重点系列教材，自出版发行以来，深受广大教师及学生的好评，还在一定程度上满足了兄弟院校教学的需要．

近年来，随着我校教育教学改革的不断深入，我们进一步对数学课的教学内容、教学手段等方面进行了一系列改革，力求使之更加适应新形势下财经应用型创新人才培养的要求．依据新的培养目标和培养方案，参考2009年教育部最新颁布的研究生入学数学考试大纲，我们重新修订了这三门课的教学大纲，组织教学小组积极探索提高公共数学课教学质量的途径、方法和有效手段．经过几年的努力，我们在课程建设方面取得了一定的成绩．目前，三门经济管理类数学课程均已成为校级精品课，其中微积分于2008年被评为北京市精品课程．

2010年5月，教育部为贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》，扎实有序地推进教育改革，决定在全国范围分区域、有步骤地开展改革试点工作．中央财经大学的“财经应用型创新人才培养模式改革”成为首批国家教育体制改革试点项目．基于此，我们在课程建设中进一步突出了学生创新意识和创新能力的培养，成立教学改革课题组，开展“数学课程与教材一体化建设的研究”．

在上述工作的基础上，我们编写了这套“经济管理类数学基础”系列教材，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》，以及配套的习题课教材和电子教案．教材内容涵盖了教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会最新制定的“经济管理类本科数学基础教学基本要求”，并且满足经济类、管理类各专业对数学越来越高的要求．在我们原有教材的基础上，该系列教材凝聚了作者近年来在大学数学教学改革方面的一些新成果，借鉴了近几年国内外一批优秀教材的有益经验．教材在内容上注重基本概念、基本理论和基本技

能的讲解，突出理论联系实际，努力体现实用性.根据经济管理类专业学生的实际情况，尽量以直观的、通俗的方法重点阐述数学方法的思想、应用背景及其在金融、保险、统计等领域应用中应该注意的问题. 选择与当今社会经济生活和现代科技密切相关的实例，避免那种远离实际而只讲数学的抽象定义、定理、证明的模式，尽量突出数学建模的思想和方法.通过加强对经济学、管理学具体问题的数学表述和数学理论问题的经济学含义解释，使得数学的能力培养功能与应用功能有机结合，培养学生在经济学中的数学思维方式和数学应用能力，实现经济、管理类数学基础教育的“培养素质、提高能力特别是专业素质”的目标.我们希望系列教材与精品课程互为依托，进一步促进课程与专业建设水平全面提高.

在本系列教材的编写和出版过程中，得到中央财经大学教务处、应用数学学院以及清华大学出版社的大力支持，在此一并致谢.

尽管作者都有良好的愿望和多年的教学经验，但由于受经验和水平的限制，加之时间仓促，书中难免存在作者未发现的错漏，恳请使用本书的读者不吝指正，以便进一步完善.

编　者

2012 年 5 月

前言

本书是根据教育部非数学专业教学指导委员会发布的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》而编写的系列教材之一。全书内容结构合理，联系紧密，例题、习题丰富，既符合数学的逻辑性，又考虑到学生的思维模式，力求语言简洁，通俗易懂。本书可作为高等学校经济管理类专业的教材，也可作为理工类和其他非数学类专业的教材或教学参考书。

本书在内容的编排上考虑到下面几点：

1. 主要内容以矩阵为主线，以向量和线性方程组为纽带，以矩阵的初等变换为基本方法，将线性代数的主要内容紧密地结合起来，形成一个有机的整体。

2. 结合多年的教学实践，将向量与线性方程组两部分内容分为两章介绍，而非按传统将两部分内容穿插安排。这样做更能明确主题，便于教学。

3. 在内容的选择上，注意高中数学基础与大学数学知识的衔接，做到由浅入深，由具体到抽象，循序渐进，符合学生的认知规律。

4. 在内容的安排上，既满足本科数学教学基本要求，也适当参考了 2011 年《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，如将与向量空间有关的内容安排在第 5 章介绍，教师可根据专业和学时的不同，适当选取这部分内容。

5. 在习题的选择和编排上，增强习题的目的性，对不同专业和不同层次的学生提出不同的要求，难易题适当搭配，让学生能按照自己的能力和目标受到科学的训练，达到理想的效果，为此习题分 A、B 两类配备。

本书共分为 6 章。第 1 章以解线性方程组引出行列式的概念，进而介绍行列式的性质和计算方法；第 2 章主要介绍矩阵的概念、矩阵的运算、矩阵的初等变换和矩阵的逆，为后面的章节打下基础；第 3 章主要介绍向量的线性运算、线性相关性、极大线性无关组、向量组和矩阵的秩；第 4 章的主要内容为线性方程组的一般理论和求解线性方程组的方法；第 5 章主要介绍向量空间和子空间的一般概念、向量的内积与正交、矩阵的特征值与特征向量、矩阵的对角化；第 6 章主要介绍二次型。

本书第 1、2、6 章和第 5 章中 5.3～5.5 节由付小芹副教授编写，第 3、4 章和第 5 章中 5.1～5.2 节由殷先军教授编写。

在本书的编写过程中，参阅了国内外许多现有的教材、参考书和网络资料，恕不一一列

出,在此编者一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,加之成书时间仓促,难免有不妥之处。衷心希望专家、同行和读者不吝赐教,以求使本书得到不断完善。

编 者

2012 年 5 月

目录

第 1 章

行 列 式

行列式是研究矩阵和线性方程组的重要工具，而矩阵和线性方程组又是线性代数的重要组成部分. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法以及用行列式解线性方程组的克莱姆法则. 在后面章节关于逆矩阵、矩阵的秩、方阵的特征值等问题的讨论中，行列式都是必不可少的研究工具.

1.1 排列与逆序数

为了给出 n 阶行列式的概念，我们首先引入排列与逆序的概念.

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 个不同数字的全排列，称为一个 n 级排列，记作 $j_1j_2\cdots j_n$. 例如 321，213 都是三级排列，2413 是一个四级排列.

由定义知，n 级排列共有 $n!$ 个. 例如由 1，2，3 所组成的三级排列共有 $3!=6$ 个. 它们是 123，132，231，213，312，321. 在以上所有的三级排列中，除排列 123 是按从小到大顺序排列（称此排列为自然排列）以外，其余的排列中，都有较大的数排在较小的数前面.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果有较大的数 j_t 排在较小的数 j_s 的前面 $(j_t>j_s)$，则称 j_t 与 j_s 构成一个逆序，记作 j_tj_s；一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

如果排列的逆序数是奇数，则称为奇排列，排列的逆序数是偶数，则称为偶排列，规定逆序数为零的排列为偶排列. 如三级排列 123，231，312 是偶排列，132，213，321 是奇排列.

定义 1.3 在一个 n 级排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中，如果将其中两个数 j_s 和 j_t 的位置互换，其余数位置不变，就得到另一个排列 $j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$，这样的变换，称为一次对换，记为 (j_s,j_t). 相邻两个数的对换称为相邻对换.

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $j_1j_2\cdots j_{s-1}j_sj_tj_{t+1}\cdots j_n$，对换 j_s 与 j_t 后，变为 $j_1j_2\cdots j_{s-1}j_tj_sj_{t+1}\cdots j_n$，显然 j_1，j_2，$\cdots$，j_{s-1}，j_{t+1}，$\cdots$，j_n 这些数构成的逆序及它们与 j_s 或 j_t 构成的逆序经过对换并不改变，只是 j_s 与 j_t 是否构成逆序在对换前后不同. 如果 $j_s<j_t$，则经过对换后逆序就增加一个；如

果 $j_s>j_t$，则经过对换后逆序就减少一个，因此原排列与新排列的奇偶性恰好相反，即一次相邻对换改变排列的奇偶性.

再证一般对换的情形.

设排列为 $j_1j_2\cdots j_{s-1}j_sj_{s+1}\cdots j_{s+m}j_tj_{t+1}\cdots j_n$. 对换 j_s 与 j_t，可看成是：先将 j_t 做 m 次相邻对换变为 $j_1j_2\cdots j_{s-1}j_sj_tj_{s+1}\cdots j_{s+m}j_{t+1}\cdots j_n$，再将 j_s 做 $m+1$ 次相邻对换变为 $j_1j_2\cdots j_{s-1}j_tj_{s+1}\cdots j_{s+m}j_sj_{t+1}\cdots j_n$. 故完成 j_s 与 j_t 的对换总共需经过 $2m+1$ 次相邻对换，因此两排列的奇偶性相反.

定理 1.2 在所有的 $n(n\geqslant 2)$ 级排列中，奇排列与偶排列的个数相等，各为$\frac{n!}{2}$个.

证 设在所有的 n 级排列中，奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个.

对这 p 个奇排列施以同一个对换(j_s,j_t)，则由定理 1.1 可知 p 个奇排列全部变成偶排列，于是得到 p 个偶排列，由于偶排列总共只有 q 个，所以 $p\leqslant q$；同理，如果将全部的偶排列都施以同一个对换(j_s,j_t)，则 q 个偶排列全部变成奇排列，于是又有 $q\leqslant p$，所以 $p=q$，即奇排列与偶排列的个数相等.

又由于 n 级排列共有 $n!$ 个，即 $p+q=n!$，所以 $p=q=\frac{n!}{2}$.

1.2 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，我们先来介绍二阶、三阶行列式.

在中学代数中，用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}\tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\tag{1.2}$$

为便于记忆，我们引入记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\tag{1.3}$$

称为二阶行列式，则(1.2)式中两个分子可分别表示为二阶行列式

$$\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},\quad \begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

二阶行列式含有两行、两列，横排称为行，纵排称为列，行列式中的数又称为行列式的元素. 二阶行列式代表的是一个数，它是两项的代数和：一项是从左上角到右下角的对角线(称为行列式的主对角线)上两元素的乘积，取正号；一项是从右上角到左下角的对角线(称为行

列式的次对角线)上两元素的乘积,取负号.若将上述三个二阶行列式分别记为 D,D_1,D_2,则(1.2)式可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}\tag{1.4}$$

例 1.1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases}3x_1-2x_2=12\\2x_1+x_2=1\end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix}3&-2\\2&1\end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}12&-2\\1&1\end{vmatrix}=12-(-2)=14,\quad D_2=\begin{vmatrix}3&12\\2&1\end{vmatrix}=3-24=-21$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=2, x_2=\dfrac{D_2}{D}=-3$.

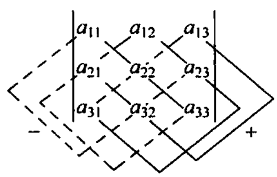
同样,用消元法解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.5}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$ 时,方程组(1.5)有唯一解.引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\tag{1.6}$$

三阶行列式代表的数值可通过下面图示(又称为对角线法则)加以记忆:实线上三个元素的乘积取正号;虚线上三个元素的乘积取负号.但需要注意,对角线法则只适用于二阶和三阶行列式的计算.



按上述规则,有

$$\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32}$$

若将上述四个三阶行列式分别记为 D, D_1, D_2, D_3，则当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.5)的唯一解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{1.7}$$

显然，用行列式表示方程组的解，形状简便，容易记忆.

例 1.2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

解 按上述三阶行列式的计算法则，有

$$\begin{aligned} D &= 2\times(-4)\times 3 + 1\times 1\times 8 + 0\times(-1)\times(-1) - 1\times(-4) \\ &\quad \times(-1) - 0\times 1\times 3 - 2\times(-1)\times 8 \\ &= -4 \end{aligned}$$

从(1.3)式和(1.6)式可知，二阶、三阶行列式都是一些乘积项的代数和；而每一乘积项都是由行列式中位于不同行、不同列的元素构成的；并且等号右端恰好就是由所有这种可能的乘积项组成.另外，每一项还带有一定的符号，如在三阶行列式中，右端的每一项均可写成如下的一般形式：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

当这一项中各元素的行标按自然排列时，则该项的符号由其列标构成的排列的奇偶性来决定.若 $j_1j_2j_3$ 为偶排列，则该项的符号取正号；若 $j_1j_2j_3$ 为奇排列，则该项的符号取负号.因此三阶行列式也可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有的三级排列求和.

仿照三阶行列式的特点，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.4 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 行、n 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它表示一个数，这个数是 $n!$ 项的代数和，每一项都是取自行列式中不同行不同列的 n 个元素的乘积，各项的符号是：当这一项中各元素的行标构成自然排列时，若列标构成的排列为偶排列则取正号，若列标构成的排列为奇排列则取负号. 所以 n 阶行列式中的一般项可写成

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.8}$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 级排列，当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 取遍所有的 n 级排列时，则得到 n 阶行列式所表示的代数和中的所有项. 因此 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.9}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和. (1.9) 式称为 n 阶行列式按行标自然排列的展开式.

当 $n=1$ 时，规定 $|a|=a$，即由一个元素 a 构成的一阶行列式就是元素 a 本身.

例 1.3　计算下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　根据行列式定义，n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，但由于该行列式中有许多元素为零，含零元素的乘积项等于零，因此只需计算那些不等于零的项. 而 D 的一般项(1.8)式中，只有当 $j_1=1, j_2=2, \cdots, j_n=n$ 时，乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 才可能不为零. 所以

$$D = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

仿照例 1.3 可得，上三角形行列式的值也等于主对角线上所有元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

特别地,对角形行列式的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

由于数的乘法满足交换律,所以行列式的一般项中各元素的位置可以任意交换,行列式的值是不变的.因此有下面定理.

定理 1.3 n 阶行列式又可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \tag{1.10}$$

(1.10)式称为 n 阶行列式按列标自然排列的展开式.

证 对于行列式的一般项(行标为自然排列)

$$(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n) = \tau(1 \cdots s \cdots t \cdots n) + \tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)$. 若对换 a_{sj_s} 与 a_{tj_t} 的位置,则行标排列和列标排列各作了一次对换,故新行标排列和新列标排列的逆序数的奇偶性都发生了改变,但两排列逆序数之和的奇偶性不变.因此经过若干次对换后,行标排列和列标排列逆序数之和的奇偶性也不变,即当列标排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 变成自然排列,行标排列相应变成某个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 时,有

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(12\cdots n)},$$

即

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)}$$

此时 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$,得证.

更一般地,n 阶行列式的一般项也可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 及 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 n 级排列.

例 1.4 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解　根据(1.10)式，行列式中的一般项只有当 $i_1=n,i_2=n-1,\cdots,i_{n-1}=2,i_n=1$ 时，才可能不等于零，所以

$$D=(-1)^{\tau(n\cdots 21)}a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{1n}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{1n}$$

注意，在以后的行列式计算中，例 1.3、例 1.4 常作为重要结果直接应用.

1.3　行列式的性质

利用行列式的定义计算较高阶的行列式时，其计算量是相当大的，因此为了简化行列式的计算，有必要研究行列式的性质.

将行列式 D 的行、列互换后得到的行列式，称为行列式 D 的转置行列式，简称转置，记作 D^{T}.

性质 1　行列式转置，其值不变，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证　若将行列式 D 及其转置 D^{T} 分别记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

根据转置的定义，有 $a_{ij}=b_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 因此将 D^{T} 按行标自然排列展开，得

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n} \end{aligned}$$

此即为行列式 D 按列标自然排列的展开式，所以 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1 表明，行列式的行和列的地位是相同的，因此对于行成立的性质，对于列也一定成立.

性质 2　互换行列式 D 的某两行(列)的位置，行列式的值变号.

证　若将行列式 D 及互换 D 的第 s 行、第 t 行后得到的新行列式分别记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则根据行列式定义，有

$$D_1=\sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}b_{1j_1}\cdots b_{sj_s}\cdots b_{tj_t}\cdots b_{nj_n}$$
$$=\sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{nj_n}$$
$$=-\sum_{j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n}$$
$$=-D$$

推论 1 若行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

显然,将完全相同的两行互换,则 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3 行列式中某一行(列)的公因子,可以提到行列式符号的前面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 左端 $=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$=k\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$

$=$ 右端

推论 2 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以数 k 等于用数 k 乘以此行列式.

推论 3 若行列式的某一行(列)中所有元素全为零,则此行列式等于零.

推论 4 若行列式的某两行(列)的对应元素成比例,则此行列式等于零.

性质 4 若行列式的某一行(列)中所有元素都是两个元素的和,则此行列式等于两个行列式的和.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 左端 $=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(a_{ij_i}+b_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$

$=$ 右端

性质 5 将行列式的某一行(列)所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　利用性质 4 及推论 4 即可得证.

为便于计算,互换行列式 D 的 i,j 两行(或两列),记作 $r_i \leftrightarrow r_j$(或 $c_i \leftrightarrow c_j$);第 i 行(或列)提出公因子 k,记作 $r_i \div k$(或 $c_i \div k$);第 i 行(或列)乘以数 k,记作 kr_i(或 kc_i);以数 k 乘以第 i 行(或列)加到第 j 行(或列),记作 $r_j + kr_i$(或 $c_j + kc_i$).

利用行列式的性质,可以简化行列式的计算,特别是利用性质 5,可以把行列式中许多元素化为 0. 计算行列式的一种基本方法就是利用性质将行列式化为上(下)三角形行列式或对角形行列式,从而算得行列式的值.

例 1.5　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

解　利用行列式性质,将行列式化为上三角形行列式.

先互换行列式的第 1、2 两行,同时提取第 3 列的公因子 -1,再利用行列式性质 5,得

$$D \xlongequal[c_3 \div (-1)]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - r_2]{r_3 - \frac{2}{7}r_2} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{12}{7} \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 \div \left(-\frac{3}{7}\right)} -\frac{3}{7} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - 2r_3} -\frac{3}{7} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 27$$

例 1.6 解方程

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = 0$$

解 由于方程左端的行列式 D_n 的每一行各元素之和均为 $x+(n-1)a$，故将第 2，3，…，n 列加到第 1 列后，第 1 列各元素均为 $x+(n-1)a$；再将第 1 列的公因子提出，第 1 列各元素均变为 1；最后将第 1 行乘以 (-1) 加到其他各行上去，则行列式变成上三角形，即

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

解方程，得 $x=-(n-1)a$ 或 $x=a(n-1$ 重根).

例 1.7 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \quad a_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$$

解 这是一种特殊类型行列式，通常可根据性质 5，化为三角形行列式.

第 2 列至第 $n+1$ 列分别乘以 $-\frac{1}{a_1}, -\frac{1}{a_2}, \cdots, -\frac{1}{a_n}$ 加到第 1 列上去，则该行列式变为上三角形行列式，于是

$$D = \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$$

上述各例都是利用行列式性质，将行列式化为三角形行列式. 实际上，用归纳法可以证明，任意 n 阶行列式利用性质都可化为上三角形(或下三角形)行列式，从而得出行列式的值.

例 1.8　设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

证明：$D=D_1D_2$.

证　对行列式 D 的前 n 行多次运用行列式性质(就是对行列式 D_1 多次运用行列式性质 r_j+kr_i)，使行列式 D_1 变成下三角形行列式，设为

$$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}=p_{11}p_{22}\cdots p_{nn}$$

再对行列式 D 的后 m 列多次运用行列式性质(就是对行列式 D_2 多次运用行列式性质 c_j+kc_i)，使行列式 D_2 变成下三角形行列式，设为

$$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mm} \end{vmatrix}=q_{11}q_{22}\cdots q_{mm}$$

则行列式 D 化为下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & q_{21} & q_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} & q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mm} \end{vmatrix}$$

故 $D=p_{11}p_{22}\cdots p_{nn}q_{11}q_{22}\cdots q_{mm}=D_1D_2$.

1.4 行列式按行(列)展开

1.4.1 行列式按某一行(列)展开

一般说来,低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简单,所以我们考虑用低阶行列式来表示高阶行列式,为此先引入余子式和代数余子式的概念.

定义 1.5 在 n 阶行列式 D_n 中,划掉元素 a_{ij} 所在的行与列中的所有元素,余下的元素按原来的顺序构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij}.

例如 在行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

中,元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}=-30,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}=30$$

定理 1.4(行列式按行(列)展开定理) n 阶行列式 D 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和. 即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.11}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1.12}$$

证 现仅就(1.11)式加以证明,同理可证(1.12)式.

① 首先证明 D 中第 n 行的元素除 $a_{nn}\neq 0$ 外,其余元素全为零的情形,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据行列式的定义,D 的每一项都必须含有第 n 行的元素,而第 n 行中只有 $a_{nn}\neq 0$,所以

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nn}$$

$$= a_{nn} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_{n-1})} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{n-1,j_{n-1}}$$

$$= a_{nn} M_{nn} = a_{nn} A_{nn}$$

② 其次证明 D 中第 i 行的元素除 $a_{ij} \neq 0$（i,j 不同时为 n）外，其余元素全为零的情形. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将 D 中的第 i 行依次与第 $i+1, i+2, \cdots, n$ 行互换，再将第 j 列依次与第 $j+1, j+2, \cdots, n$ 列互换，共经过 $(n-i)+(n-j)=2n-(i+j)$ 次的行互换和列互换，得

$$D = (-1)^{2n-(i+j)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \end{vmatrix}$$

所以根据上述①的结论，有

$$D = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}$$

③ 最后证明一般情形. 利用行列式性质 4，行列式 D 可写成如下形式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据上述②的结论，有

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n$$

推论 n 阶行列式 D 的任意一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\quad(i\neq s)\tag{1.13}$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0\quad(j\neq t)\tag{1.14}$$

证 现仅证(1.13)式,同理可证(1.14)式.

将 n 阶行列式 D 的第 s 行各元素换为第 i 行($i\neq s$)的对应元素,得到一个新行列式 D_1. D_1 中有两行元素完全相同,因此 $D_1=0$. 将 D_1 按第 s 行展开,得

$$D_1=a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\quad(i\neq s)$$

(1.13)式得证.

综合定理及推论,得

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\begin{cases}D,i=s\\0,i\neq s\end{cases}$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\begin{cases}D,j=t\\0,j\neq t\end{cases}$$

一般情况下,直接应用展开定理不一定能简化计算,只是在行列式中某一行(列)含有较多的零时,才能简化计算.特别是,如果能利用行列式的性质先将行列式的某一行(列)化为仅含一个非零元素,再按此行(列)展开,则会使计算大大简化.

例 1.9 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

解 利用行列式性质将行列式 D 的第 2 列化为仅含一个非零元素,再按第 2 列展开,于是

$$D\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-8&0&4&-6\\2&0&1&-1\\16&0&-2&7\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-8&4&-6\\2&1&-1\\16&-2&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+2r_2]{r_1-4r_2}-\begin{vmatrix}-16&0&-2\\2&1&-1\\20&0&5\end{vmatrix}\text{(按第 2 列展开)}$$

$$=-(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -16 & -2 \\ 20 & 5 \end{vmatrix}=40$$

例 1.10　设行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

求：(1) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$；(2) $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$；(3) $A_{11}+2A_{21}+A_{31}$.

解　该题可直接计算各代数余子式或余子式，但计算量较大. 若能巧妙利用定理 1.4，则可极大简化计算过程.

(1) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 可理解成行列式 D 的第 4 行各元素分别换成 1,1,1,1 后的新行列式按第 4 行的展开式，故

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

(2) $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-5$$

(3) $A_{11}+2A_{21}+A_{31}$ 可理解成行列式 D 的第 1 列各元素分别换成 1,2,1,0 后的新行列式按第 1 列的展开式，故

$$A_{11}+2A_{21}+A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}=21$$

例 1.11　计算行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

解　将行列式的第 2,3,4,5 行都加到第 1 行，再将所得行列式按第 1 行展开，得

$$D_5=\begin{vmatrix}1&0&0&0&1\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-1&2\end{vmatrix}=D_4+1$$

一般地有 $D_n=D_{n-1}+1(n\geqslant 3)$，所以

$$D_5=D_4+1=D_3+2=D_2+3$$

而 $D_2=3$，故 $D_5=6$.

例 1.12 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix}a&&&&&&b\\&a&&&&b&\\&&\ddots&&\iddots&&\\&&&a\ \ b&&&\\&&&c\ \ d&&&\\&&\iddots&&\ddots&&\\&c&&&&d&\\c&&&&&&d\end{vmatrix}\quad \text{(除两条对角线外,其余元素均为 0)}$$

解 将行列式按第 1 行展开，得

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix}a&&&&b&0\\&\ddots&&\iddots&&\vdots\\&&a\ \ b&&&0\\&&c\ \ d&&&0\\&\iddots&&\ddots&&\vdots\\c&&&&d&0\\0&\cdots&0\ \ 0&\cdots&0&d\end{vmatrix}+(-1)^{2n+1}b\begin{vmatrix}0&a&&&&b\\\vdots&&\ddots&&\iddots&\\0&&&a\ \ b&&\\0&&&c\ \ d&&\\\vdots&&\iddots&&\ddots&\\0&c&&&&d\\c&0&\cdots&0\ \ 0&\cdots&0\end{vmatrix}$$

$$=adD_{2(n-1)}-bcD_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}$$

以此作为递推公式，可得

$$D_{2n}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^n$$

例 1.13 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

证 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时，有

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

结论显然成立.

假设对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式结论成立，现在证明对 n 阶范德蒙德行列式结论也成立.

对于 D_n，自下而上将第 i 行的 $(-x_n)$ 倍加到第 $i+1$ 行上去 $(i=n-1,n-2,\cdots,1)$，再按第 n 列展开，最后提出每一列的公因子并利用假设条件，有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & x_3 - x_n & \cdots & x_{n-1} - x_n & 0 \\ x_1^2 - x_1x_n & x_2^2 - x_2x_n & x_3^2 - x_3x_n & \cdots & x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} - x_1^{n-3}x_n & x_2^{n-2} - x_2^{n-3}x_n & x_3^{n-2} - x_3^{n-3}x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-2} - x_{n-1}^{n-3}x_n & 0 \\ x_1^{n-1} - x_1^{n-2}x_n & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_n & x_3^{n-1} - x_3^{n-2}x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2}x_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_2 - x_n & x_3 - x_n & \cdots & x_{n-1} - x_n \\ x_1^2 - x_1x_n & x_2^2 - x_2x_n & x_3^2 - x_3x_n & \cdots & x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} - x_1^{n-3}x_n & x_2^{n-2} - x_2^{n-3}x_n & x_3^{n-2} - x_3^{n-3}x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-2} - x_{n-1}^{n-3}x_n \\ x_1^{n-1} - x_1^{n-2}x_n & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_n & x_3^{n-1} - x_3^{n-2}x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2}x_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+n}(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)\cdots(x_{n-1} - x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & x_3^{n-3} & \cdots & x_{n-1}^{n-3} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1}) \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n-1} (x_i - x_j)$$

$$= \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

结论得证.

上述例 1.11、例 1.12 中的递推法及例 1.13 中的归纳法是计算较高阶行列式的常用方法.

*1.4.2 拉普拉斯定理

拉普拉斯(Laplace)定理可看成是定理 1.4 的推广. 首先把余子式和代数余子式的概念加以推广.

定义 1.6 在一个 n 阶行列式 D 中任取 k 行 k 列 $(1 \leqslant k \leqslant n)$，由这些行和列交叉点处的

k^2 个元素按原来顺序构成的 k 阶行列式 M，称为行列式 D 的一个 k 阶子式. 在 D 中划掉这 k 行 k 列后余下的元素按原来顺序构成的 $n-k$ 阶行列式 M'，称为 k 阶子式 M 的余子式. 若行列式 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所在的行、列分别为 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 及 $j_1, j_2, \cdots, j_k$，则称 $(-1)^{(i_1+i_2\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M'$ 为 k 阶子式 M 的代数余子式，记为 A.

例如，在行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，若选定第 1 行、第 3 行及第 2 列、第 3 列可得一个二阶子式

$$M = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其余子式和代数余子式分别为

$$M' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A = (-1)^{(1+3)+(2+3)} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$

定理 1.5 （拉普拉斯展开定理）在 n 阶行列式 D 中，若任意取定 k 行（$1 \leqslant k \leqslant n$），则由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式与其对应的代数余子式乘积之和等于行列式 D. 即

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t, \quad t = \mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

在计算行列式时，常常是按一行或一列展开，但如果行列式中某些行或某些列含很多零，按这些行或这些列展开，有时非常简便.

例 1.14 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

解 取定第 1,2 两行，仅有三个非零的二阶子式，它们是

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 30, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

它们对应的代数余子式分别为

$$A_1 = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 65, \quad A_2 = (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

$$A_3 = (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

所以根据定理 1.5，得

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + M_3A_3 = 665$$

再如例 1.8 和例 1.12，利用拉普拉斯定理计算也会非常简便.

1.5　克莱姆法则

含有 n 个未知量、n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.15}$$

与二元、三元线性方程组类似，它的解也可以用行列式表示.

定理 1.6　（克莱姆(Cramer)法则）若方程组(1.15)的系数行列式满足

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(1.15)有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{1.16}$$

其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是把系数行列式 D 的第 j 列各元素依次换为方程组(1.15)右端常数项，其余元素不变而得到的行列式.

证　首先，证明当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组(1.15)有解. 这只需验证(1.16)式是方程组(1.15)的解，即证明

$$a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{in}\frac{D_n}{D} = b_i, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.17}$$

为此,考虑有两行相同的 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij} \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij} \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nj} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i=1,2,\cdots,n$$

它的值为零. 将该行列式按第 1 行展开,由于第 1 行元素 a_{ij} 的代数余子式为

$$(-1)^{1+j+1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -D_j$$

所以 $b_iD+a_{i1}(-D_1)+\cdots+a_{in}(-D_n)=0$,变形即得(1.17)式.

其次,证明方程组(1.15)的解是唯一的. 设 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 是方程组(1.15)的任意一个解,则有

$$a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.18}$$

根据行列式性质,有

$$Dc_1=\begin{vmatrix} a_{11}c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}c_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}c_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(\text{第 2 列至第 } n \text{ 列分别乘以 } c_2,\cdots,c_n \text{ 加到第 1 列})$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nn}c_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(\text{利用(1.18)式})$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1$$

即 $Dc_1=D_1$. 同理可得 $Dc_2=D_2,\cdots,Dc_n=D_n$.

所以,当 $D\neq0$ 时,$c_j=\dfrac{D_j}{D}$,$j=1,2,\cdots,n$. 即若 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 是方程组(1.15)的解,则它必为(1.16)式,故方程组(1.15)的解是唯一的.

例 1.15 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

解 由于该方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

所以该方程组有唯一解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

所以根据克莱姆法则,原方程组的唯一解为

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1$$

若方程组(1.15)的右端常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零,方程组(1.15)称为非齐次线性方程组；若 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零,则称为齐次线性方程组. 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

一定有解,因为 $x_1=0, x_2=0, \cdots, x_n=0$ 就是一个解,此解称为零解. 但该方程组不一定有非零解. 根据克莱姆法则,有如下推论.

推论 若齐次线性方程组(1.19)的系数行列式 $D\neq0$,则该方程组仅有零解；也即若齐次线性方程组(1.19)有非零解,则它的系数行列式 $D=0$.

在第 4 章我们还将证明齐次线性方程组(1.19)有非零解的充分必要条件是其系数行列式 $D=0$.

例 1.16 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=0\\ \lambda x_1+x_3=0\\ 2\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=0\end{cases}$$

有非零解，求 λ.

解 该方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}\lambda+3 & 1 & 2\\ \lambda & 0 & 1\\ 0 & 2\lambda & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-9)$$

因为方程组有非零解，所以 $D=0$，故 $\lambda=0$ 或 $\lambda=9$.

应注意，克莱姆法则只适用于 n 个未知量、n 个线性方程，并且系数行列式不等于零的方程组. 不完全满足上述条件的情况将在第 4 章加以讨论.

习题一

A 类

1. 求下列排列的逆序数，并确定其奇偶性.

(1) 347812596；(2) 671298435；(3) $n(n-1)\cdots321$；(4) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

2. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix}a^2 & ab\\ ab & b^2\end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}$；(4) $\begin{vmatrix}1 & x & x\\ x & 2 & x\\ x & x & 3\end{vmatrix}$.

3. 用行列式解方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$$

4. 写出 4 阶行列式中含有因子 $a_{12}a_{41}$ 的项.

5. 在 7 阶行列式中，$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7j}a_{22}a_{31}$ 取“$-$”号，确定下标 i 与 j 的值.

6. 根据行列式的定义，计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix}0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$.

7. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -7 & 6 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} x-\lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & x-\lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & x-\lambda \end{vmatrix}$($n$ 阶行列式);

(4) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$ $(n\geqslant 2)$;

(6) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+x \\ 1 & 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1-y & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(8) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$, $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$;

(9) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$($n$ 阶行列式);

(10) $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

8. 解方程

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0 \ (a_1 \neq 0)$$

9. 证明

(1) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

10. 已知行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 及 $A_{44}+A_{45}$.

11. 利用克莱姆法则解下列方程组.

(1) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+2x_4=6\\3x_1-3x_2+3x_3+2x_4=5\\3x_1-x_2-x_3+2x_4=3\\3x_1-x_2+3x_3-x_4=4\end{cases}$；

(2) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=a+b+c\\ax_1+bx_2+cx_3=a^2+b^2+c^2\\bcx_1+cax_2+abx_3=3abc\end{cases}$，其中 a,b,c 互不相等.

12. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+ax_4=0\\x_1+2x_2+x_3+x_4=0\\x_1+x_2-2x_3+x_4=0\\x_1+x_2+ax_3+bx_4=0\end{cases}$$

有非零解，求 a,b 应满足的关系式.

B　类

一、填空题

1. 当 $i=$________，$j=$________时排列 $12i546j39$ 为奇排列.

2. 若排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 k，则排列 $j_n\cdots j_2j_1$ 的逆序数为________.

3. A_{ij} 是 n 阶行列式中 a_{ij} 的代数余子式，若

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}\neq 0$$

则 i 与 s 的关系为________.

4. $\begin{vmatrix}0&0&0&-2\\0&0&3&5\\0&-1&0&4\\2&9&6&0\end{vmatrix}=$________，$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1&e_1\\a_2&b_2&c_2&d_2&e_2\\a_3&b_3&0&0&0\\a_4&b_4&0&0&0\\a_5&b_5&0&0&0\end{vmatrix}=$________.

5. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x&-1&0&x\\2&2&3&x\\-7&10&4&3\\1&-7&1&x\end{vmatrix}$ 中，常数项为________.

6. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=$________, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \end{vmatrix}=$________.

7. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{vmatrix}=$________.

8. 设 α,β,γ 是三次方程 $x^3+px+q=0$ 的三个实根，则行列式 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=$________.

9. 已知 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_2 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_2 & a_6 & a_7 \end{vmatrix}$，则 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=$________.

10. 若线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$ 有无穷多解，则其系数行列式 D ________.

二、单项选择题

1. 排列 134782695 的逆序数为(　　).

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

2. 下列乘积项均构成 6 阶行列式的一项，其中取"＋"号的项是(　　).

A. $a_{15}a_{24}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$　　B. $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$

C. $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$　　D. $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$

3. n 阶行列式的展开式中，取"＋"号的项有(　　)个.

A. $\frac{n!}{2}$　　B. $\frac{n^2}{2}$　　C. $\frac{n}{2}$　　D. $\frac{n(n-1)}{2}$

4. 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$，则以下行列式中，(　　)不一定与 D 等值.

A. $\begin{vmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix}$　　B. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & a_{13}+1 & a_{14}+1 \\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & a_{23}+1 & a_{24}+1 \\ a_{31}+1 & a_{32}+1 & a_{33}+1 & a_{34}+1 \\ a_{41}+1 & a_{42}+1 & a_{43}+1 & a_{44}+1 \end{vmatrix}$　　D. $\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix}$

5. 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

则 $A_{11}+A_{12}$ 和 $A_{13}+A_{14}$ 分别等于(　　).

A. 0,1　　B. 1,0　　C. 1,1　　D. 0,0

6. 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解,则 λ 应满足(　　).

A. $\lambda \neq 1, \lambda \neq 2$　　B. $\lambda \neq -1, \lambda \neq 2$　　C. $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$　　D. $\lambda \neq -1, \lambda \neq -2$

三、计算或证明下列各题

1. 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

2. 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

3. 证明:$D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\alpha & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha$.

*4. 利用拉普拉斯展开定理，计算

$$D=\begin{vmatrix}7&6&5&4&3&2\\8&7&8&9&4&3\\7&4&9&5&0&0\\5&3&6&1&0&0\\0&0&5&6&0&0\\0&0&6&8&0&0\end{vmatrix}$$

5. 已知 a,b,c 是不全为 0 的实数，证明齐次线性方程组

$$\begin{cases} \quad\ \ ax_2+bx_3+cx_4=0\\ ax_1+x_2\qquad\qquad\quad\ =0\\ bx_1+\qquad x_3\qquad\quad\ =0\\ cx_1\qquad\qquad\quad +x_4=0\end{cases}$$

只有零解.

第 2 章

矩　　阵

矩阵是从许多实际问题中抽象出来的概念，是线性代数的一个重要组成部分，在自然科学各分支及经济管理等领域有着广泛的应用.本章主要介绍矩阵的概念及运算、矩阵的逆和矩阵的初等变换.矩阵理论是线性代数的基础，因此本章的学习对后面各章的学习都是十分重要的.

2.1 矩阵的概念

2.1.1 矩阵的定义

我们知道，n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的解完全取决于它的系数及常数项，若将这些系数和常数项按原来的顺序取出来，可排成如下数表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

再如，某种物资有 3 个产地、4 个销地，调配方案见表 2.1.若将表中数据抽象出来也可排成如下数表：

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 30 & 10 & 20 & 0 \\ 40 & 50 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

这种数表就称为矩阵.

表 2.1

吨数 销地 / 产地	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	10	20	30	40
x_2	30	10	20	0
x_3	40	50	10	20

定义 2.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行、n 列的数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 称为矩阵 A 第 i 行第 j 列的元素. 矩阵一般用大写字母 A,B,C 等表示，如上述矩阵常简记为$A_{m\times n}$或 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

元素全为实数的矩阵称为实矩阵，元素中有复数的矩阵称为复矩阵，本书中的矩阵如不特别说明，都是指实矩阵.

当 $m=n$，即矩阵的行数与列数都是 n 时，矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$称为 n 阶方阵或 n 阶矩阵. n 阶方阵 A 中元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$排成的对角线称为方阵 A 的主对角线.

当 $m=1$ 时，矩阵 $A=(a_{ij})_{1\times n}$称为行矩阵或 n 维行向量，也记作

$$A=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$$

当 $n=1$ 时，矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times 1}$称为列矩阵或 m 维列向量，也记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

当 $m=n=1$ 时，矩阵 $A=(a_{11})$作为普通数 a_{11}来处理.

若矩阵中的元素全为 0，则此矩阵称为零矩阵，简记为 O.

若两个矩阵的行数相等，列数也相等，则称这两个矩阵为同型矩阵.

应注意矩阵与行列式的区别：(1)矩阵仅仅是一个数表，而行列式是一个数；(2)矩阵的行数与列数可以不同，而行列式的行数与列数必须相同.

2.1.2 几种特殊方阵

1. 对角矩阵

若 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$中的元素满足 $a_{ij}=0(i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为对角矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. 数量矩阵

若 n 阶对角矩阵 $A=(a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ii}=a(i=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为 n 阶数量矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

特别地，若 $a_{ii}=1(i=1,2,\cdots,n)$，则称此数量矩阵为 n 阶单位矩阵，记作 E 或 E_n，即

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. 三角矩阵

若 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ij}=0(i>j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为 n 阶上三角矩阵；若 n 阶方阵 $B=(b_{ij})$ 中的元素满足 $b_{ij}=0(i<j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 B 为 n 阶下三角矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角矩阵与下三角矩阵统称为三角矩阵.

4. 对称矩阵与反对称矩阵

若 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为 n 阶对称矩阵；若 n 阶方阵 $B=(b_{ij})$ 中的元素满足 $b_{ij}=-b_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 B 为 n 阶反对称矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ -b_{12} & 0 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{1n} & -b_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

例如，$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$为 2 阶对称矩阵，$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$为 3 阶反对称矩阵.

2.2 矩阵的运算

矩阵仅仅是从实际问题中抽象出的一个数表，为了更好地进行理论研究和解决实际问题，有必要对矩阵规定一些合理的运算法则.

定义 2.2 若两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 的各个对应元素相等，即满足

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1,2,\cdots, \quad m; \ j = 1,2,\cdots,n$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

显然，一个矩阵等式可以表达多个数量等式.

需要注意，两个不同型矩阵必不相等；两个不同型的零矩阵是不相等的(虽然它们的元素都是 0)；两个阶数不同的单位矩阵也是不相等的(虽然它们的形状相似).

2.2.1 矩阵的加法

定义 2.3 由矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 的各个对应元素相加而得到的矩阵，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

不难证明，矩阵的加法满足以下运算性质(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{O}$ 为 $m\times n$ 零矩阵)：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称$(-a_{ij})_{m\times n}$为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记作 $-\boldsymbol{A}$，即

$$-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

故有 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

根据矩阵的加法和负矩阵可定义矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}) = (a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

2.2.2 数与矩阵的乘法

定义 2.4 由数 k 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的各个元素而得到的矩阵，称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，简称数乘，记作

$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

不难证明，数乘满足下列运算性质（设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{O}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，k,l 为数）：

(1) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(2) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(3) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$；

(4) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

(5) $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 当且仅当 $k=0$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

例 2.1 某种物资第一季度从 3 个产地调往 4 个销地的数量如表 2.1 所示，即调运数量矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 30 & 10 & 20 & 0 \\ 40 & 50 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

若计划第二季度调运数量均提高 10%，则两季度调运总量为

$$\boldsymbol{A}+1.1\boldsymbol{A}=2.1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 21 & 42 & 63 & 84 \\ 63 & 21 & 42 & 0 \\ 84 & 105 & 21 & 42 \end{pmatrix}$$

例 2.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{B}$.

解 由 $3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{B}$，得

$$2\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A},\quad 即\ \boldsymbol{X}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\frac{3}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

从定义 2.3、定义 2.4 及它们的性质来看，矩阵的加法和数乘与数的运算规律是相同的，可以看成是数的加法运算和乘法运算的一种推广. 矩阵的加法运算和数乘运算统称为矩阵的线性运算.

2.2.3 矩阵的乘法

定义 2.5 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，由元素

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

构成的矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记作

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$$

从定义可以看出：(1) 只有当左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同时，$\boldsymbol{AB}$ 才有意义；(2)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 等于左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行各个元素与右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列各个对应元素乘积之和；(3)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数与左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数相同，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列数与右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数相同.

例 2.3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&2&-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&0\\4&5&1&2\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&0\\4&5&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&1&-4\\-5&-11&4&-2\end{pmatrix}$$

不难证明，矩阵的乘法满足下列运算性质(假设运算都是可行的，k 为数)：

(1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$；

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$；

(3) $k(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$；

(4) $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$；

(5) $(k\boldsymbol{E}_m)\boldsymbol{A}_{m\times n}=k\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}_{m\times n}(k\boldsymbol{E}_n)=k\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

性质(4)和性质(5)表明，单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 在矩阵乘法中的作用与数 1 类似.

例 2.4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-12\\3&-6\end{pmatrix}$$

应该注意矩阵乘法与数的乘法的区别：(1) 矩阵乘法不满足交换律. 一般地，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，如例 2.4，有时 $\boldsymbol{AB}$ 有意义，但 $\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义，如例 2.3；(2)矩阵乘法不满足消去律. 一般地，由 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 且 $\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{O}$，不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$$

虽然 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 且 $\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$；(3)一般地，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，如例 2.4.

对于两个同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的. 从性质(5)可以看出，数量矩阵与任意同阶方阵都是可交换的.

例 2.5　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$$

求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

解　设与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 而

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\2a_{11}+a_{21} & 2a_{12}+a_{22}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+2a_{12} & a_{12}\\a_{21}+2a_{22} & a_{22}\end{bmatrix}$$

所以有

$$\begin{cases}a_{11}=a_{11}+2a_{12}\\a_{12}=a_{12}\\2a_{11}+a_{21}=a_{21}+2a_{22}\\2a_{12}+a_{22}=a_{22}\end{cases}$$

故 $a_{11}=a_{22}$，$a_{12}=0$，a_{21} 任意. 因此与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的形式为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & 0\\b & a\end{pmatrix},\quad a,b\ \text{为任意实数}$$

矩阵乘法的定义也是从大量实际问题的需要中抽象出来的，所以许多理论和应用中的实际问题利用矩阵乘法表达起来非常方便.

例 2.6　设变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 均可表示成变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性函数，即

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\qquad\vdots\\y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$为常数. (2.1)式称为从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 y_1，$y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换. 若记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

则该线性变换可用矩阵表示为 $y=Ax$.

例 2.7 对于含有 m 个方程、n 个未知量的线性方程组(简称为 $m\times n$ 线性方程组)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

若记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则该方程组可用矩阵表示为

$$Ax=b \tag{2.3}$$

(2.3)式称为方程组(2.2)的矩阵形式.

例 2.8 某厂生产甲、乙、丙三种产品,上半年与下半年各种产品的产量(单位: t)分别为矩阵 A,各种产品的单位价格及单位利润(单位: 千元/t)为矩阵 B,其中

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 400 & 500 \\ 400 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{上半年} \\ \text{下半年} \end{array},\quad B=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{单价} & \text{单利} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 3 & 0.6 \\ 3.5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{array}$$

求该厂全年的总收入及总利润.

解 该厂全年的总收入和总利润可用矩阵 C 表示为

$$C=AB=\begin{pmatrix} 300 & 400 & 500 \\ 400 & 500 & 600 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 3 & 0.6 \\ 3.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{总收入} & \text{总利润} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3700 & 890 \\ 4600 & 1100 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{上半年} \\ \text{下半年} \end{array}$$

定义 2.6 设 A 为 n 阶方阵,k 为正整数,k 个 A 的连乘积称为方阵 A 的 k 次幂,记作 A^k,即

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}}$$

不难证明，方阵的幂满足下列运算性质（其中 k,l 为正整数）：

(1) $A^k A^l = A^{k+l}$；(2) $(A^k)^l = A^{kl}$.

由于矩阵乘法不满足交换律，所以对于两个同阶方阵 A 与 B，一般 $(AB)^k \neq A^k B^k$. 但若 A 与 B 可交换，则 $(AB)^k = A^k B^k$.

例 2.9　设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$，求 A^n（其中 n 为正整数）.

解　记 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\lambda E+B$，其中 $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. 显然

$$B^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad B^3=B^2B=O$$

又因为数量矩阵 λE 与矩阵 B 可交换，故

$$\begin{aligned}A^n &= (\lambda E+B)^n\\ &= (\lambda E)^n + C_n^1(\lambda E)^{n-1}B + C_n^2(\lambda E)^{n-2}B^2 + C_n^3(\lambda E)^{n-3}B^3+\cdots+B^n\\ &= \lambda^n E + n\lambda^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}B^2\\ &= \begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.2.4　矩阵的转置

定义 2.7　将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行、列互换得到的矩阵，称为矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的转置矩阵，简称转置，记作 A^{T}. 即若

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad \text{则} A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

矩阵的转置满足下列运算性质（假设运算是可行的，k 为数）：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$；

(3) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

证 前三个性质显然成立,现仅证性质(4).

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$. 显然 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都是 $n\times m$ 矩阵,因此只需证明两者对应元素相等即可.

$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 的第 j 行第 i 列的元素就是矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行第 j 列的元素,即为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行各元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和;而 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 行第 i 列的元素是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 行的各元素与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 列对应元素乘积之和,即为 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元素与 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行对应元素乘积之和. 显然二者第 j 行第 i 列的元素均为 $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$,故 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

注意性质 2、性质 4 还可推广到多个矩阵的情形,即

$$(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_t)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{A}_t^{\mathrm{T}}$$

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_t)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_t^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$$

例 2.10 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=(1,-1,2),\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}$$

求 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解 方法 1 因为

$$\boldsymbol{AB}=(1,-1,2)\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}=(9,2,-1)$$

所以 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}9\\2\\-1\end{pmatrix}$.

方法 2 由已知得

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&1&2\\0&3&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

所以

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&1&2\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\2\\-1\end{pmatrix}$$

根据对称矩阵与反对称矩阵的定义,易得下列结论:

(1) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为反对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$.

需要注意，由于矩阵乘法不满足交换律，所以两个同阶对称矩阵（反对称矩阵）的乘积不一定为对称矩阵（反对称矩阵）. 如若

$$A=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

虽然 A,B 都是对称矩阵，但 $AB=\begin{pmatrix}3 & -6\\ -5 & 7\end{pmatrix}$ 却不是对称矩阵.

上述两条结论常用于证明题.

例 2.11　设列矩阵 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$ 满足 $x^{\mathrm T}x=1$，E 为 n 阶单位矩阵，$H=E-2xx^{\mathrm T}$. 证明 H 是对称矩阵，且 $H^{\mathrm T}H=E$.

证　因为 $H^{\mathrm T}=(E-2xx^{\mathrm T})^{\mathrm T}=E^{\mathrm T}-2(xx^{\mathrm T})^{\mathrm T}=E-2xx^{\mathrm T}=H$，所以 H 是对称矩阵. 注意到 $x^{\mathrm T}x=1$，于是

$$\begin{aligned}H^{\mathrm T}H&=(E-2xx^{\mathrm T})^2\\&=E-4xx^{\mathrm T}+4(xx^{\mathrm T})(xx^{\mathrm T})\\&=E-4xx^{\mathrm T}+4x(x^{\mathrm T}x)x^{\mathrm T}\\&=E-4xx^{\mathrm T}+4xx^{\mathrm T}\\&=E\end{aligned}$$

2.2.5　方阵的行列式

定义 2.8　由 n 阶方阵 A 的元素按原来的顺序构成的行列式，称为方阵 A 的行列式，记作 $|A|$.

设 A,B 是 n 阶方阵，k 是数，则方阵的行列式满足下列运算性质：

(1) $|A^{\mathrm T}|=|A|$；(2) $|kA|=k^n|A|$；(3) $|AB|=|A||B|$.

证　根据行列式的性质，性质(1)和性质(2)显然成立. 现仅证性质(3).

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，记 $2n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0\\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

由例 1.8 可知 $D=|A||B|$. 再记 $C=(c_{ij})_{n\times n}=AB$，$c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$. 将 D 的第 1 列乘以 b_{1j}，第 2 列乘以 b_{2j}，……，第 n 列乘以 b_{nj} 都加到第 $n+j$ 列上去 $(j=1,2,\cdots,n)$，则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \, |-\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{C}|$$

所以$|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,即$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$.

需要注意,虽然矩阵的乘法不满足交换律,但是对于两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 来说,总有

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{BA}|$$

性质(3)还可以推广到多个 n 阶方阵的情形,即

$$|\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_t|=|\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_t|$$

定义 2.9 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,若$|\boldsymbol{A}|\neq0$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异方阵;若$|\boldsymbol{A}|=0$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异方阵.

例 2.12 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵,证明:$\boldsymbol{AB}$ 是非奇异方阵的充分必要条件为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是非奇异方阵.

证 必要性 因为 $\boldsymbol{AB}$ 是非奇异方阵,所以$|\boldsymbol{AB}|\neq0$,而$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,故$|\boldsymbol{A}|\neq0$,$|\boldsymbol{B}|\neq0$,即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是非奇异方阵.

充分性 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是非奇异方阵,所以$|\boldsymbol{A}|\neq0$,$|\boldsymbol{B}|\neq0$,故$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\neq0$,即 $\boldsymbol{AB}$ 是非奇异方阵.

2.3 分块矩阵

对于行数和列数较多的矩阵或某些特殊的矩阵,常采用分块的方法以简化矩阵运算.将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条纵线或横线分成许多个小矩阵,每个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块,运算时将每个子块作为元素来处理,这就是矩阵的分块.以子块为元素的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为分块矩阵.

例如,4 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_3 & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_1 \end{pmatrix}$$

是一个分块矩阵,它有 4 个子块:

$$\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{O}=(0,0,0),\quad \boldsymbol{E}_1=1$$

对于一个矩阵可以根据需要任意分块. 如上述矩阵 $\boldsymbol{A}$ 还可以分块为

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\ \hdashline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2&\boldsymbol{A}_2\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\beta})$$

其中$\boldsymbol{E}_2$ 是二阶单位矩阵,$\boldsymbol{A}_2$ 是二阶方阵,$\boldsymbol{O}$ 是二阶零矩阵,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\beta}$ 都是列矩阵.

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则类似,但应注意以下几点:

1. 分块矩阵作加(减)法运算时,必须使对应子块具有相同的行数和列数,即两个矩阵的分块方法完全相同; 数 k 与分块矩阵相乘时,数 k 应与分块矩阵的每一子块相乘.

若两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 按相同的分块方法分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}&\boldsymbol{A}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1t}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}&\cdots&\boldsymbol{B}_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{B}_{s1}&\boldsymbol{B}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix}$$

其中$\boldsymbol{A}_{ij}$与$\boldsymbol{B}_{ij}$$(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,t)$的行数及列数对应相同,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}+\boldsymbol{B}_{1t}\\\boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}+\boldsymbol{B}_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1}&\boldsymbol{A}_{s2}+\boldsymbol{B}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}+\boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix}$$

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k\boldsymbol{A}_{11}&k\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&k\boldsymbol{A}_{1t}\\k\boldsymbol{A}_{21}&k\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&k\boldsymbol{A}_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k\boldsymbol{A}_{s1}&k\boldsymbol{A}_{s2}&\cdots&k\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}$$

例 2.13　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1&3\\0&2&2&4\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&0&0&0\\6&3&1&0\\0&-2&0&1\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},k\boldsymbol{A}$.

解　将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分块为

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}2&0&1&3\\0&2&2&4\\\hdashline 0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}2\boldsymbol{E}_2&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&2&0&0\\2&0&0&0\\6&3&1&0\\0&-2&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2\boldsymbol{E}_2&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

而 $2\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\2&2\end{pmatrix}$,所以

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc}3&2&1&3\\2&2&2&4\\\hdashline 6&3&0&0\\0&-2&0&0\end{array}\right)$$

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2k\boldsymbol{E}_2&k\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{O}&-k\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc:cc}2k&0&k&3k\\0&2k&2k&4k\\\hdashline 0&0&-k&0\\0&0&0&-k\end{array}\right)$$

显然利用分块矩阵进行运算与直接运算结果相同.

2. 利用分块矩阵计算$\boldsymbol{A}_{m\times s}$与$\boldsymbol{B}_{s\times n}$的乘积时,应使$\boldsymbol{A}_{m\times s}$的列的分法与$\boldsymbol{B}_{s\times n}$的行的分法相同,以保证子块运算有意义.设$\boldsymbol{A}_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}_{s\times n}$分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{p1}&\boldsymbol{A}_{p2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{pt}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1q}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}&\cdots&\boldsymbol{B}_{2q}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{B}_{t1}&\boldsymbol{B}_{t2}&\cdots&\boldsymbol{B}_{tq}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行($i=1,2,\cdots,p$)各子块$\boldsymbol{A}_{ik}$($k=1,2,\cdots,t$)的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列($j=1,2,\cdots,q$)对应子块 $\boldsymbol{B}_{kj}$($k=1,2,\cdots,t$)的行数相同,则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11}&\boldsymbol{C}_{12}&\cdots&\boldsymbol{C}_{1q}\\\boldsymbol{C}_{21}&\boldsymbol{C}_{22}&\cdots&\boldsymbol{C}_{2q}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{C}_{p1}&\boldsymbol{C}_{p2}&\cdots&\boldsymbol{C}_{pq}\end{pmatrix}$$

其中$\boldsymbol{C}_{ij}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tj}$($i=1,2,\cdots,p$; $j=1,2,\cdots,q$).

例 2.14　设

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-1&2&-1&0\\1&1&0&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&2&3\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

利用分块矩阵的乘法，求 $\boldsymbol{AB}$.

解　将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分块为

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}2&0&0&0\\0&2&0&0\\\hdashline -1&2&-1&0\\1&1&0&-1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}2\boldsymbol{E}_2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{A}_1&-\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{c:cc}1&1&0\\-1&0&1\\\hdashline 0&2&3\\0&-1&3\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{E}_2\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2\boldsymbol{B}_1&2\boldsymbol{E}_2\\\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$，而 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}-3&-1\\2&-2\end{pmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{AB}=\left(\begin{array}{c:cc}2&2&0\\-2&0&2\\\hdashline -3&-3&-1\\0&2&-2\end{array}\right)$$

将矩阵按行分块和按列分块是两种常用的分块方法，应予重视.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，若将矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$ 按列分块，并记其第 j 列为

$$\boldsymbol{\beta}_j=\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{pmatrix},\quad j=1,2,\cdots,n$$

则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_n)$.

若将矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$ 按行分块，并记其第 i 行为

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is}),\quad i=1,2,\cdots,m$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_n\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1&\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}$$

例 2.15 对于 $m\times n$ 线性方程组的矩阵表达式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，如果将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块为

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:c:c:c}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{array}\right)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$$

则 $\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}_1x_1+\boldsymbol{\beta}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_nx_n$，故 $m\times n$ 线性方程组又可表示为

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{b} \tag{2.4}$$

(2.4)式称为 $m\times n$ 线性方程组的向量形式.

3. 分块矩阵在转置时，不但要行列互换，而且行列互换的同时每个子块也要转置. 即若矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n}$分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}$$

其中$\boldsymbol{A}_{ij}(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,t)$为矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n}$的子块，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2t}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

4. 对于某些特殊矩阵，通过适当分块可以使运算得以简化.

如例 1.8 中，行列式 D 可看成分块矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$$

的行列式，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{O}$ 为 $n\times m$ 零矩阵，则 $|\boldsymbol{H}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{C}|$.

一般地，我们称分块矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tt} \end{pmatrix}$为分块下三角矩阵，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tt} \end{pmatrix}$为分块上三角矩阵，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tt} \end{pmatrix}$为分块对角矩阵，其中$\boldsymbol{A}_{ii}$为$k_i$阶方阵($i=1,2,\cdots,t$).

不难证明，分块矩阵具有下列性质(假设运算是可行的)：

(1) 分块对角矩阵的和、差、积仍为分块对角矩阵，分块对角矩阵的转置仍为分块对角矩阵；

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tt} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_{11}|\,|\boldsymbol{A}_{22}|\cdots|\boldsymbol{A}_{tt}|$，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tt} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_{11}|\,|\boldsymbol{A}_{22}|\cdots|\boldsymbol{A}_{tt}|$.

例 2.16 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

利用分块矩阵的方法，求$|\boldsymbol{A}|$，$\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{AB}$.

解 将$\boldsymbol{A}$分块为

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_3 \end{pmatrix}$$

则

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\,|\boldsymbol{A}_3|=80$$

$$A^2=\begin{pmatrix} A_1^2 & O & O \\ O & A_2^2 & O \\ O & O & A_3^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分块为

$$A=\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_4 \end{pmatrix},\quad B=\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_4B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

2.4 逆矩阵

对于矩阵，我们定义了加法、减法、数乘、乘法等运算. 我们自然会问，矩阵是否有类似除法的运算，若有，它是什么含义，又有什么条件？这就是本节要讨论的主要问题.

定义 2.10 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$AB=BA=E \tag{2.5}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，简称 $\boldsymbol{A}$ 可逆，称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则其逆矩阵是唯一的. 这是因为如果矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则根据定义 2.10，有

$$B=BE=B(AC)=(BA)C=EC=C$$

所以逆矩阵是唯一的. 故 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

显然，满足定义 2.10 的矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 一定是同阶可逆方阵且二者互为逆矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

例 2.17 设对角矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\neq 0$$

证明 A 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

证　因为当 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\neq 0$ 时，存在矩阵

$$B=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

使得

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}=E$$

$$BA=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=E$$

即 $AB=BA=E$，所以 A 可逆，且 $A^{-1}=B$.

显然，只有方阵才可能有逆矩阵. 但并非任何方阵都是可逆的. 如矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

就是不可逆的. 因为对于任何二阶方阵 $B=(b_{ij})_{2\times2}$,都有

$$BA=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}+2b_{12} & 0\\ b_{21}+2b_{22} & 0\end{pmatrix}\neq E$$

所以由定义 2.10 知,A 是不可逆的.

那么,n 阶方阵 A 在什么条件下可逆? 如果可逆,怎样求逆? 为此,我们先引入与逆矩阵密切相关的伴随矩阵的概念.

定义 2.11 设 A_{ij} 是 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式,称矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

为矩阵 A 的伴随矩阵.

根据行列式按行(列)展开定理及推论可知,对任意 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$,有

$$AA^*=A^*A=\begin{pmatrix}|A| & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |A| & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & |A|\end{pmatrix}=|A|E \tag{2.6}$$

因此若 $|A|\neq0$,则有

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=E \tag{2.7}$$

于是我们得到下面定理.

定理 2.1 n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A|\neq0$,且当 A 可逆时,$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$.

证 必要性 若 A 可逆,则存在 A^{-1},使得

$$AA^{-1}=E$$

两边取行列式,得

$$|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|=|E|=1\neq0$$

所以 $|A|\neq0$.

充分性 若 $|A|\neq0$,则存在矩阵 $\dfrac{1}{|A|}A^*$,使得(2.7)式成立. 由定义 2.10 可知,A 可逆且 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$.

显然,可逆矩阵就是非奇异方阵.

例 2.18 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，问 a,b,c,d 满足什么条件时，方阵 A 可逆？并当 A 可逆时，求 A^{-1}.

解 当 $|A|=ad-bc\neq 0$ 时，A 可逆. 又 $A^*=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$，故

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

例 2.19 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

问 A 是否可逆，若可逆，求其逆 A^{-1}.

解 因为 $|A|=1\neq 0$，所以 A 可逆. 又

$$A_{11}=1,\quad A_{12}=-3,\quad A_{13}=1$$
$$A_{21}=3,\quad A_{22}=-6,\quad A_{23}=1$$
$$A_{31}=-2,\quad A_{32}=5,\quad A_{33}=-1$$

故 $A^*=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & -6 & 5\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & -6 & 5\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

定理 2.1 不仅给出了一个矩阵可逆的充分必要条件，而且还给出了求逆矩阵的方法. 不过用该公式计算逆矩阵，计算量一般比较大，我们还将在下一节给出一种简便实用的方法.

推论 若 A,B 为同阶方阵并且 $AB=E$，则 A,B 均可逆且 $A^{-1}=B$，$B^{-1}=A$.

证 由 $AB=E$ 可得 $|AB|=|A||B|=1$，所以 $|A|\neq 0$，$|B|\neq 0$. 故 A,B 均可逆.

在等式 $AB=E$ 两端左乘 A^{-1}，得 $B=A^{-1}$. 同理，等式 $AB=E$ 两端右乘 B^{-1}，得 $A=B^{-1}$.

利用上述推论验证矩阵 B 是否为同阶方阵 A 的逆矩阵，只需验证 $AB=E$ 与 $BA=E$ 中一个等式成立即可，比直接利用定义 2.10 验证起来简单得多(利用定义 2.10 需要验证 $AB=E$，$BA=E$ 两个等式同时成立).

例 2.20 设方阵 A 满足方程 $A^2-A-2E=O$，证明：A 及 $A+2E$ 均可逆，并求它们的逆.

证 由 $A^2-A-2E=O$，得 $A(A-E)=2E$，即

$$A\left[\frac{1}{2}(A-E)\right]=E$$

由推论知,A 可逆,且$A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$. 而$A^2-A-2E=O$ 又可写成

$$(A+2E)(A-3E)=-4E$$

即

$$(A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right]=E$$

故 $A+2E$ 也可逆,且$(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$.

可逆矩阵具有以下性质:

(1) 若矩阵 A 可逆,则A^{-1}也可逆,且$(A^{-1})^{-1}=A$,$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$.

证 略.

(2) 若矩阵 A 可逆,数 $k\neq 0$,则 kA 也可逆,且$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

证 由于 A 可逆,故存在A^{-1},使得 $AA^{-1}=E$,于是有

$$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)=k\cdot\frac{1}{k}AA^{-1}=E$$

所以根据推论,kA 可逆且$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

(3) 若 A,B 是同阶可逆矩阵,则 AB 也可逆,且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

证 因为 A,B 可逆,所以存在A^{-1},B^{-1},使得 $AA^{-1}=E$,$BB^{-1}=E$. 于是存在$B^{-1}A^{-1}$,使得$(AB)(B^{-1}A^{-1})=E$. 所以根据推论,AB 可逆且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

注意,性质(3)可以推广到多个同阶可逆矩阵相乘的情形. 即若A_1,A_2,$\cdots$,A_t 均为同阶可逆矩阵,则乘积$A_1A_2\cdots A_t$ 也可逆,且$(A_1A_2\cdots A_t)^{-1}=A_t^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

(4) 若 A 可逆,则其转置A^{T} 也可逆,且$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

证 因为$A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{-1}A)^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}=E$,所以$A^{\mathrm{T}}$ 可逆,且$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(5) 若 A 可逆,且 $AB=AC$,则 $B=C$.

证 因为A^{-1}存在,故可在等式 $AB=AC$ 两端同时左乘A^{-1},即得 $B=C$.

注意,若 A,B 是同阶可逆矩阵,但 $A+B$ 不一定是可逆矩阵; 即使 $A+B$ 可逆,一般

$$(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$$

例 2.21 设 A 为 3 阶方阵,$|A|=3$,求$|2(A^{-1})^2-(2A^2)^{-1}|$.

解 因为$(2A^2)^{-1}=\frac{1}{2}(A^{-1})^2$,所以

$$|2(A^{-1})^2-(2A^2)^{-1}|=\left|\frac{3}{2}(A^{-1})^2\right|=\left(\frac{3}{2}\right)^3|A^{-1}|^2=\frac{3}{8}$$

例 2.22 设 A,B 均为 n 阶可逆矩阵，证明

(1) $|A^*|=|A|^{n-1}$; (2) $(AB)^*=B^*A^*$.

证 (1) (2.6)式两端取行列式，得

$$|AA^*|=||A|E|,\quad 即\ |A||A^*|=|A|^n$$

因 A 可逆，故 $|A|\neq 0$，所以 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

实际上，若方阵 A 不可逆，则 $|A^*|=0$(请读者自证)，从而也有 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

(2) 因 A,B 均为 n 阶可逆矩阵，故 AB 也可逆. 又

$$(AB)(AB)^*=|AB|E$$

所以

$$(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}=B^*A^*$$

例 2.23 设三阶方阵 B 满足 $A^*BA=2BA-8E$，且 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵 B.

解 因为 $|A|=-2$，所以 A 可逆. 将已知的矩阵方程左乘 A 右乘 A^{-1}，得

$$A(A^*BA)A^{-1}=A(2BA)A^{-1}-A(8E)A^{-1}$$

利用(2.6)式及 $|A|=-2$，得

$$-2B=2AB-8E,即(A+E)B=4E$$

而 $(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，所以

$$B=4(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

例 2.24 设分块矩阵

$$H=\begin{pmatrix}A&O\\B&C\end{pmatrix}$$

其中 A 为 k 阶可逆方阵，B 为 $r\times k$ 矩阵，C 为 r 阶可逆方阵，O 为 $k\times r$ 零矩阵. 证明：矩阵 H 可逆，并求其逆 H^{-1}.

证 因为 A,C 可逆，所以 $|A|\neq 0$，$|C|\neq 0$. 于是

$$|H|=|A||C|\neq 0$$

即 H 可逆. 现设

$$H^{-1}=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}$$

其中$\boldsymbol{X}_{11}$,$\boldsymbol{X}_{22}$是分别与$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}$同阶的方阵.则由

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$$

即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{11}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{12}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r\end{pmatrix}$$

得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{11}=\boldsymbol{E}_k\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{12}=\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{11}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{12}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{E}_r\end{cases}$$

解此矩阵方程组,得$\boldsymbol{X}_{11}=\boldsymbol{A}^{-1}$,$\boldsymbol{X}_{12}=\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{X}_{21}=-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$,$\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{C}^{-1}$.故

$$\boldsymbol{H}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}$$

特别地,若$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$,则

$$\boldsymbol{H}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}$$

由归纳法还可证明,若分块对角矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_t\end{pmatrix}$$

中$\boldsymbol{A}_i$为$k_i(i=1,2,\cdots,t)$阶可逆方阵,则$\boldsymbol{H}$可逆,且

$$\boldsymbol{H}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_t^{-1}\end{pmatrix}$$

例 2.25 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 0\\ -3 & -5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 5\\ 0 & 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

求$\boldsymbol{A}^{-1}$,$|\boldsymbol{A}^{10}|$.

解　将 A 分块为

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},\quad 其中 A_1=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

则 $|A|=|A_1||A_2|=-1\neq 0$，所以 A 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|A^{10}|=|A|^{10}=1$$

2.5　初等变换与初等矩阵

矩阵的初等变换也是矩阵的一种十分重要的运算，它是研究矩阵的秩，求矩阵的逆和解线性方程组的重要工具. 本节首先引入初等变换与初等矩阵的概念，然后建立初等变换与初等矩阵的联系，最后给出用初等变换求逆矩阵的方法.

定义 2.12　对矩阵的行（列）施行的以下三种变换称为矩阵的初等行（列）变换.

（1）互换矩阵的某两行（列）；

（2）用一非零数乘以矩阵的某一行（列）；

（3）将矩阵的某一行（列）各元素的 k 倍加到另一行（列）对应元素上.

互换矩阵的 i,j 两行（或列），记为 $r_i\leftrightarrow r_j$（或 $c_i\leftrightarrow c_j$）；用一非零数 k 乘以矩阵的第 i 行（或列），记为 kr_i（或 kc_i）；矩阵的第 j 行（或列）的 k 倍加到第 i 行（或列）上，记为 r_i+kr_j（或 c_i+kc_j）.

矩阵的初等行变换和初等列变换，统称为初等变换. 显然，三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换.

矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，记作 $A\to B$，并称矩阵 A 与矩阵 B 等价.

容易验证，矩阵之间的等价关系具有下列性质：

（1）反身性　A 与其自身等价；

（2）对称性　若 A 与 B 等价，则 B 与 A 也等价；

（3）传递性　若 A 与 B 等价且 B 与 C 等价，则 A 与 C 也等价.

定义 2.13　对单位矩阵 E 施行一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵.

显然，初等矩阵都是方阵，且每一个初等变换都有一个与之对应的初等矩阵，因此初等矩阵有如下三类：

(1) 互换 $\boldsymbol{E}$ 的 i,j 两行(或列),得

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{pmatrix}1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 && \\ && \vdots & 1 &&& \vdots && \\ && \vdots && \ddots && \vdots && \\ && \vdots &&& 1 & \vdots && \\ && 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(2) 用非零数 k 乘以 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行(或第 i 列)各元素,得

$$\boldsymbol{E}(i(k))=\begin{pmatrix}1 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && k && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(3) 将 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行(或第 i 列的 k 倍加到第 j 列),得

$$\boldsymbol{E}(i,j(k))=\begin{pmatrix}1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 & \cdots & k && \\ &&& \ddots & \vdots && \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

容易验证,初等矩阵都是可逆矩阵,且它们的逆仍为初等矩阵. 实际上,$\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$,$\boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$,$\boldsymbol{E}(i,j(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j(-k))$.

例 2.26 验证下列矩阵与初等矩阵的乘积.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n}\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{23} & a_{23} \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{21} & a_{32}+ka_{22} & a_{33}+ka_{23} \end{pmatrix}$.

显然,矩阵的初等变换与初等矩阵有着密切的关系.

定理 2.2　对 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换,相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵;对 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换,相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

证　我们仅就第三种初等行变换的情形加以证明,其他情形请读者自证. 将矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 按行分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}+k\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

即在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以初等矩阵 $\boldsymbol{E}(i,j(k))$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行.

定理 2.3　任意一个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,总可以经过有限次初等变换,化为形如

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

的矩阵,其中 $\boldsymbol{E}_r$ 为 r 阶单位矩阵. $\boldsymbol{F}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的标准形.

证　若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}$ 已是标准形. 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,则至少有一个元素不为零. 不妨设 $a_{11}\neq 0$(若

$a_{11}=0$,则对 $\boldsymbol{A}$ 施行第一种初等变换总可以把 $\boldsymbol{A}$ 化为左上角元素不为零的矩阵). 现对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等变换：用$(-a_{11}^{-1}a_{i1})$乘以第一行各元素加到第 i 行对应元素上$(i=2,3,\cdots,m)$，再用$(-a_{11}^{-1}a_{1j})$乘以第一列各元素加到第 j 列对应元素上$(j=2,3,\cdots,n)$，最后用 a_{11}^{-1} 乘以所得矩阵的第一行，于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix}$$

其中$\boldsymbol{A}_1$ 是一个$(m-1)\times(n-1)$矩阵. 若$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}$ 已化为标准形. 若$\boldsymbol{A}_1\neq\boldsymbol{O}$,则对$\boldsymbol{A}_1$ 重复以上步骤,最后一定可以把 $\boldsymbol{A}$ 化为标准形 $\boldsymbol{F}$ 的形式.

例 2.27 化矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$为标准形.

解 $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{c_2+2c_1 \\ c_3+c_1 \\ c_4-3c_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{c_3-\frac{2}{3}c_2 \\ c_4+\frac{4}{3}c_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例 2.28 化矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$为标准形.

解 $$\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3-c_1]{c_2+c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3+c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据定理 2.2,对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行(或列)变换就相当于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边(或右边)乘以相应的初等矩阵.因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与它的标准形 $\boldsymbol{F}$ 有如下关系:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t \tag{2.8}$$

其中 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 均是初等矩阵.由于初等矩阵都是可逆矩阵,故上式又可写成

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{-1} \tag{2.9}$$

推论 1 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的标准形为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$.

证明 必要性 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{F}$ 是它的标准形,根据(2.8)式知 $\boldsymbol{F}$ 可逆,即 $|\boldsymbol{F}|\neq 0$.于是 $\boldsymbol{F}$ 中不可能有某一行元素全为零,故 $\boldsymbol{F}$ 为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$.

充分性 由(2.9)式,显然若 $\boldsymbol{A}$ 的标准形 $\boldsymbol{F}$ 为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}$ 必可逆.

定理 2.4 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 能表示成一系列初等矩阵的乘积.

证明 必要性 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,据推论 1 可知 $\boldsymbol{A}$ 的标准形 $\boldsymbol{F}$ 为单位阵 $\boldsymbol{E}$,故由(2.9)式可得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{Q}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{-1} \tag{2.10}$$

而初等矩阵的逆仍为初等矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 可表示成一系列初等矩阵的乘积.

充分性 由于初等矩阵是可逆的,并且可逆矩阵的乘积仍可逆,故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

由于(2.10)式又可写成

$$\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E} \tag{2.11}$$

根据定理 2.2,在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以初等矩阵就相当于对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换,故有

推论 2 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可以经过一系列初等行变换化为单位矩阵.

根据定理 2.4 及推论 2,可以得到一种求逆矩阵的简便方法.事实上,(2.11)式又可写成

$$\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1} \tag{2.12}$$

(2.11)式和(2.12)式表明,如果用一系列初等行变换将可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵,则用同样的初等行变换即可将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.因此利用分块矩阵的乘法,可将(2.11)式和(2.12)式合并写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})&=(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E})\\&=(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A}^{-1})\end{aligned}$$

即得到一个求逆矩阵的简便方法:

由 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$,构造 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})$,然后对此矩阵施行初等行变换,使左边子块 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,这时右边子块 $\boldsymbol{E}$ 就化成了 $\boldsymbol{A}^{-1}$.如果不知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆,也可按上述方法做.若左边子块 $\boldsymbol{A}$ 不能化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,而化成了某行元素全为零,则说明 $\boldsymbol{A}$ 不可逆,即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 不存在.

例 2.29 设

$$A=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$$

求 A^{-1}.

解 $(A\vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-4&-3&1&0&0\\1&-5&-3&0&1&0\\-1&6&4&0&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-4&-3&1&0&0\\0&-1&0&-1&1&0\\0&2&1&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-4&-3&1&0&0\\0&-1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(-1)r_2]{\substack{r_1+3r_3\\ r_1-4r_2}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&2&3\\0&1&0&1&-1&0\\0&0&1&-1&2&1\end{array}\right)=(E\vdots A^{-1})$$

显然,A 可经过一系列初等行变换化为单位矩阵,故 A 可逆,且$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

当然,若 A 可逆,用初等列变换也可求出A^{-1},只不过此时是对 $2n\times n$ 矩阵$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$施行初等列变换,使上方子块 A 化为单位矩阵 E,下方子块 E 即化成A^{-1}.

注意,用初等行(列)变换求逆矩阵时,必须始终用初等行(列)变换,中间不能作任何初等列(行)变换.

最后,我们介绍一种用初等行变换解矩阵方程 $AX=B$,直接求得$A^{-1}B$ 的方法.

设 A 为 n 阶可逆矩阵,B 为 $n\times m$ 矩阵,则矩阵方程 $AX=B$ 有解,且其解为 $X=A^{-1}B$. 因为 A 可逆,根据推论 2,存在一系列初等矩阵$P_1,P_2,\cdots,P_t$,使得

$$P_t\cdots P_2P_1A=E \tag{2.13}$$

即$P_t\cdots P_2P_1=A^{-1}$,所以

$$A^{-1}B=P_t\cdots P_2P_1B \tag{2.14}$$

(2.13)式和(2.14)式表明,若用一系列初等行变换将 A 化为单位矩阵,则用同样的初等行变换可将矩阵 B 化为$A^{-1}B$. 即有

$$P_t\cdots P_2P_1(A\vdots B)=(P_t\cdots P_2P_1A\vdots P_t\cdots P_2P_1B)=(E\vdots A^{-1}B)$$

由此得到一种求解矩阵方程 $AX=B$ 的简便方法:

若 A 为 n 阶可逆矩阵,B 为 $n\times m$ 矩阵,构造 $n\times(n+m)$矩阵$(A\vdots B)$,然后对此矩阵施

行初等行变换,使左边子块 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵,这时右边子块 $\boldsymbol{B}$ 即化成了$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

例 2.30　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\1&3\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{X}$,使得 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{X}$.

解　由 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{X}$,得$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$. 而

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\text{且 } |\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$$

故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,所以 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$. 又

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&1&-1\\1&0&-1&2&1\\0&1&1&1&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&1&-1\\0&1&0&1&2\\0&1&1&1&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&1&-1\\0&1&0&1&2\\0&0&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1+r_2]{r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&2&2\\0&1&0&1&2\\0&0&1&0&1\end{array}\right)$$

所以

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

习题二

A　类

1. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&1\\1&2&3&4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\-2&1&-2&1\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}$$

(1) 求 $3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；(2) 求 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$；(3) 求 $\boldsymbol{Y}$，使得 $(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Y})+2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{O}$.

2. 计算

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$；(2) $(1,-1,2)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. 某市外贸出口的地区、物资品种、数量、单价、重量、体积如表 2.2 所示.

表 2.2

数量 \ 地区 / 品种	北美	西欧	亚太	单位价格/万元	单位重量/t	单位体积/m^3
A_1	2500	1300	1000	2	0.12	0.1
A_2	1200	1500	800	1.5	0.05	0.3

利用矩阵乘法计算该市外贸出口到三地区的物资总价值、总重量、总体积各是多少.

4. 计算

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$；(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$.

5. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求(1) $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$；(2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

6. 证明：(1) 对任意的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 都是对称矩阵.

(2) 对任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为反对称矩阵.

7. 证明：实矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，特别地，当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}$ 为一列矩阵时，$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$.

8. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶对称矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

9. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix},\quad a,b,c,d \text{ 均为实数}$$

(1) 计算 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；(2) 利用(1)的结果，求$|\boldsymbol{A}|$.

10. 用分块矩阵的乘法求矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的乘积，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-5&7&0&0\\-1&2&6&0&0\\-3&1&8&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0&0&0&0\\0&4&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&6&2\end{pmatrix}$$

11. 先判断下列矩阵是否可逆，若可逆，再求其逆.

(1) $\begin{pmatrix}0&2&1\\1&-1&1\\3&-1&2\end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\1&0&2\end{pmatrix}$.

12. 用求逆矩阵的方法解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1\\2x_1+5x_2+4x_3=0\\x_1+x_2=1\end{cases}$$

13. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行元素为 $1,2,-1$，且其伴随矩阵为$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}-7&-4&9\\5&3&-7\\4&2&-5\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

14. 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^5$.

15. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素都是 1，证明：$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}-\dfrac{1}{n-1}\boldsymbol{A}$.

16. 设$\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2+9\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 均可逆，并求出它们的逆矩阵.

17. 设$\boldsymbol{A}^*$ 是 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，求$|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$.

18. 已知 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$，$a_{ij}=A_{ij}\,(i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，且 $a_{11}\neq 0$. 证明：$|\boldsymbol{A}|=1$.

19. 证明：若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 不是单位矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 必为奇异矩阵.

20. (1) 设分块矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆方阵. 证明：$\boldsymbol{H}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{H}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

(2) 利用上述结论,求下列矩阵的逆.

$$H=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},\quad a_1a_2\cdots a_n\neq 0$$

21. 设

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & -3\\ 0 & 0 & 5 & -2\end{pmatrix}$$

求 A^{-1}, $|A^5|$, $|AA^{\mathrm{T}}|$.

22. 计算 $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{20}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{21}$.

23. 求下列矩阵的标准形,若可逆,并求其逆.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 6 & -1\\ 0 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

24. 用初等行变换求解下列矩阵方程.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & -2 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}$; (2) $AX=A+2X$,其中 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

B 类

一、填空题

1. 设 A 是 3 阶方阵,且 $|A|=3$,则 $|-2A|=$________, $|A^2|=$________.

2. 将 3 阶方阵 A 按列分块为 $A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,其中 β_j 是 A 的第 j 列($j=1,2,3$),且 $|A|=-2$,则 $|\beta_1,2\beta_3,\beta_2|=$________, $|\beta_1+2\beta_2,2\beta_2+3\beta_3,3\beta_3+\beta_1|=$________.

3. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}^n=$________.

4. 当 k ________时,矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 可逆.

5. 设 A 是 4 阶可逆矩阵,若将 A 的第 2 行和第 3 行互换,得到的矩阵记为 B,则

$BA^{-1}=$________.

6. 设 A,B 均为 $n(n\geqslant 2)$ 阶方阵，且 $|A|=2$，$|B|=-3$，则 $|-2A^*B^{-1}|=$________.

7. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，其中 E 为单位矩阵，则 $A+E$ 可逆，且 $(A+E)^{-1}=$________.

8. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX+E=A^2+X$，其中 E 为单位矩阵，则矩阵 $X=$________.

9. 若非零矩阵 B 满足 $BA=O$，且 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&t&3\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则 $t=$________.

10. 设 A 为 n 阶方阵且 $AA^{\mathrm{T}}=E$，$|A|<0$，则 $|A+E|=$________.

二、单项选择题

1. 设 A,B 是 n 阶方阵，则下列等式（　　）成立.

A. $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$　　B. $A^2-E=(A-E)(A+E)$

C. $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$　　D. $(AB)^2=A^2B^2$

2. 设 n 阶方阵 A,B,C 满足关系式 $ABC=E$，其中 E 为单位矩阵，则等式（　　）成立.

A. $BCA=E$　　B. $BAC=E$　　C. $ACB=E$　　D. $CBA=E$

3. 设 A,B,C 均为 n 阶方阵，则下列结论正确的是（　　）.

A. 若 $AB=AC$，且 $A\neq O$，则 $B=C$　　B. 若 $A^2=B^2$，则 $A=B$ 或 $A=-B$

C. $|A+B|=|A|+|B|$　　D. $|(AB)^2|=|A|^2|B|^2$

4. 设 A,B 为同阶可逆矩阵，则下列等式（　　）是错误的.

A. $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$　　B. $|(AB)^{-1}|=|A^{-1}||B^{-1}|$

C. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$　　D. $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

5. 设 A 为 n 阶方阵，k 为常数，若 $|A|=a$，则 $|kAA^{\mathrm{T}}|=$（　　）.

A. ka^2　　B. k^2a　　C. k^2a^2　　D. k^na^2

6. 若 n 阶方阵 A 可逆，则 A^* 可逆，且 $(A^*)^{-1}=$（　　）.

A. A　　B. $|A|A$　　C. $\dfrac{A}{|A|}$　　D. $\dfrac{A}{|A|^{n-1}}$

7. 设 n 阶矩阵 A,B 对应的伴随矩阵分别为 A^*,B^*，分块矩阵 $C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$，则 C 的伴随矩阵 $C^*=$（　　）.

A. $\begin{pmatrix}|A|A^*&O\\O&|B|B^*\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}|A|B^*&O\\O&|B|A^*\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}|B|B^*&O\\O&|A|A^*\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}|B|A^*&O\\O&|A|B^*\end{pmatrix}$

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 都是 n 阶可逆方阵，则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=($　　$)$.

A. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$　　B. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$　　C. $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　　D. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$

9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}=($　　$)$.

A. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$　　B. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$　　C. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　D. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行和第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则（　　）.

A. 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列和第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$　　B. 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行和第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$

C. 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列和第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$　　D. 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行和第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$

11. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$. 则 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=$________.

A. $-2ab$　　B. $-2^m ab$　　C. $2^m(-1)^{m+n}ab$　　D. $2^m(-1)^{mn}ab$

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶矩阵，常数 $k\neq 0,k\neq\pm 1$，则 $(k\boldsymbol{A})^*=($　　$)$.

A. $k\boldsymbol{A}^*$　　B. $k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$　　C. $k^n\boldsymbol{A}^*$　　D. $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$

三、计算或证明下列各题

1. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{A}$.

(1) 证明：$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆；(2) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^2$ 及 $\boldsymbol{A}^{-1}$；(2) 若方阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{X}$.

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.

(1) 求分块矩阵的乘积 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{CA}^{-1} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$；(2) 证明：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|$.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 3 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|$.

5. 设非零列矩阵 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$. 证明：

(1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$；(2) 当$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶方阵，且$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若将 $\boldsymbol{P}$ 按列分块为 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_j$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的第 j 列($j=1,2,3$)，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$.

第 3 章

向量的线性相关性与秩

向量是线性代数的一个非常重要的概念,借助于向量可以使一些相关知识的描述变得非常简单.在本章中将主要介绍向量的概念和运算、向量的线性相关性、极大线性无关组和向量组的秩.

3.1 向量的概念及其线性运算

3.1.1 n 维向量的概念

在中学我们就曾接触过向量的有关概念.在几何和物理中,所谓向量是指既有长度又有方向的量.特别地,在建立平面直角坐标系后,平面向量或二维向量与有序数组$(x,y)^{\mathrm{T}}$一一对应.而在空间直角坐标系中,空间向量或三维向量则可以用有序数组$(x,y,z)^{\mathrm{T}}$来表示.一般地,我们有下面 n 维向量的概念.

定义 3.1 由数域 F 中的 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 组成的有序数组称为 n 维向量,其中数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$称为向量的第 i 个分量.一个向量中分量的个数称为向量的维数.向量常用$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\cdots$来表示.$n$ 维向量通常写成列的形式,如

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

如此表示的向量称为列向量.有时为了书写方便,列向量也可记为$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

按照定义,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也是 n 维向量,称为 n 维行向量.如$(1,2,3,5)^{\mathrm{T}}$是 4 维列向量,而$(1,2,3,5)$为 4 维行向量.

若 $x_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$,即向量的分量全是实数,则把这样的向量称为 n 维实向量,至少有一个分量是复数的向量称为 n 维复向量.本书如无特殊说明,向量均指 n 维实向量,简称 n 维向量.所有 n 维向量构成的集合记为$\mathbf{R}^n$,即

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$$

定义 3.2　分量全为零的向量称为零向量，记为 $\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{O}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$；若两向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 的所有对应分量全相等，即 $x_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)$，则称这两个向量相等，记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

实际上，一个 n 维列向量也可以看作是一个 $n\times 1$ 矩阵，简称为列矩阵；而一个 n 维行向量则可以看作是一个 $1\times n$ 矩阵，简称为行矩阵.

借助于向量的概念，对于 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

若引入 m 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\cdots,\quad \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以简记为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量.

同样，若定义 n 维行向量

$$\boldsymbol{\beta}_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),\quad \boldsymbol{\beta}_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}),\cdots,\quad \boldsymbol{\beta}_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以简记为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量.

若干个同维数的列向量（行向量）构成的集合称为列（行）向量组，简称为向量组. 一个向量组既可以含有有限多个向量，也可以含有无穷多个向量.

3.1.2　向量的线性运算

在这部分中主要介绍向量的和与数乘两种运算.

定义 3.3　给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，向量

$$(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}}$$

称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 的和，记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}}$.

同样，定义两个行向量 $\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{\eta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的和为

$$\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$

例 3.1　给定 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,3,5,7)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(2,5,4,0,6)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

解　
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}&=(1,0,3,5,7)^{\mathrm{T}}+(2,5,4,0,6)^{\mathrm{T}}=(1+2,0+5,3+4,5+0,7+6)^{\mathrm{T}}\\&=(3,5,7,5,13)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

例 3.2 已知$\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,3,6,9)$，$\boldsymbol{\beta}=(-3,0,5,2,1)$，求$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}&=(1,-1,3,6,9)+(-3,0,5,2,1)\\&=(1-3,-1+0,3+5,6+2,9+1)\\&=(-2,-1,8,8,10)\end{aligned}$$

定义 3.4 给定向量$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$和数$\lambda$（实数或复数），向量$(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)^{\mathrm{T}}$称为向量$\boldsymbol{\alpha}$和数$\lambda$的乘积，简称数乘，记为$\lambda\boldsymbol{\alpha}$，即$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)^{\mathrm{T}}$.

例 3.3 已知$\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,3,6,9)^{\mathrm{T}}$，$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=0$，求$\lambda_i\boldsymbol{\alpha}$ $(i=1,2,3)$.

解
$$\begin{aligned}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}&=2\boldsymbol{\alpha}=(2\times1,2\times(-1),2\times3,2\times6,2\times9)^{\mathrm{T}}\\&=(2,-2,6,12,18)^{\mathrm{T}}\\\lambda_2\boldsymbol{\alpha}&=(-1)\boldsymbol{\alpha}=(-1\times1,-1\times(-1),-1\times3,-1\times6,-1\times9)^{\mathrm{T}}\\&=(-1,1,-3,-6,-9)^{\mathrm{T}}\\\lambda_3\boldsymbol{\alpha}&=0\boldsymbol{\alpha}=(0\times1,0\times(-1),0\times3,0\times6,0\times9)^{\mathrm{T}}=(0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

定义 3.5 向量$(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)^{\mathrm{T}}$称为向量$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$的负向量，记为$-\boldsymbol{\alpha}$，即$-\boldsymbol{\alpha}=(-1)\times\boldsymbol{\alpha}=(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)^{\mathrm{T}}$.

按照定义，对任一向量$\boldsymbol{\alpha}$，都有$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{O}$.

利用负向量可以定义两个向量的差.

定义 3.6 给定两个向量$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，向量$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$称为$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的差，记为$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，即$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots,x_n-y_n)^{\mathrm{T}}$.

向量的加减运算和数乘运算统称为向量的线性运算. 由上述运算的定义，不难得到向量线性运算满足下面的运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$

(2) 结合律 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$

$(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=\mu(\lambda\boldsymbol{\alpha})$

(3) 分配律 $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$

$(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$

例 3.4 设$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$为两个n维向量，λ，μ为两个实数，求$(\lambda+\mu)(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$.

解 由运算规律(3)，得

$$(\lambda+\mu)(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}+(\lambda+\mu)\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}+\mu\boldsymbol{\beta}$$

或

$$(\lambda+\mu)(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\mu(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}+\mu\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}$$

例 3.5 已知$\boldsymbol{\alpha}=(2,2,a,3)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,b,6,c)$，$\lambda\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(-1,0,1,2)$，求$\lambda,a,b,c$的值.

解 由
$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}&=\lambda(2,2,a,3)+(1,b,6,c)\\&=(2\lambda,2\lambda,a\lambda,3\lambda)+(1,b,6,c)\\&=(2\lambda+1,2\lambda+b,a\lambda+6,3\lambda+c)\\&=(-1,0,1,2)\end{aligned}$$

得

$$2\lambda+1=-1,\quad 2\lambda+b=0,\quad a\lambda+6=1,\quad 3\lambda+c=2$$

从而有 $\lambda=-1, a=5, b=2, c=5$.

3.2　向量的线性相关性

定义 3.7　给定向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和一组实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，向量 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 称为向量组 A 的一个线性组合，其中 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 称为线性组合的系数.

如果向量$\boldsymbol{\beta}$可以表示为

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

则称向量$\boldsymbol{\beta}$是向量组 A 的一个线性组合，或称向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组 A 线性表示(或线性表出).

如果向量组 B: $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$中的每一个向量都可由向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，则称向量组 B 可由向量组 A 线性表示.

例 3.6　给定向量组

$$A:\ \boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

和向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$，试将$\boldsymbol{\alpha}$写成向量组 A 的线性组合.

解　令$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n$，则有

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}&=k_1(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+\cdots+k_n(0,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\\&=(k_1,k_2,k_3,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

从而得，$k_i=a_i(i=1,2,\cdots,n)$，即

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+a_n\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

由例 3.6 知，任一 n 维向量都可由向量组

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

线性表示，且组合系数就是向量的对应分量.

定理 3.1　若向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 可由向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$线性表示，而向量组Ⅱ可由向量组Ⅲ:$\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_t$ 线性表示，则向量组Ⅰ可由向量组Ⅲ线性表示.

证　因为向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 可由向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$线性表示，则有

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{j=1}^{m}k_{ij}\boldsymbol{\beta}_j,\quad i=1,2,\cdots,n$$

由于向量组Ⅱ可由向量组Ⅲ:$\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_t$ 线性表示，从而有

$$\boldsymbol{\beta}_j = \sum_{l=1}^{t} \lambda_{jl} \boldsymbol{\gamma}_l, \quad j = 1,2,\cdots,m$$

其中 $k_{ij}, \lambda_{jl}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m;\ l=1,2,\cdots,t)$为常数. 于是

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{m} k_{ij} \sum_{l=1}^{t} \lambda_{jl} \boldsymbol{\gamma}_l = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{t} k_{ij}\lambda_{jl} \boldsymbol{\gamma}_l = \sum_{l=1}^{t} \left(\sum_{j=1}^{m} k_{ij}\lambda_{jl} \right) \boldsymbol{\gamma}_l, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

即向量组Ⅰ可由向量组Ⅲ线性表示.

定义 3.8 对向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 如果存在一组不全为零的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{O}$$

则称向量组 A 线性相关,否则称向量组 A 线性无关,即上述等式只有在 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 全为零时才能成立,则称向量组 A 线性无关.

注 由线性相关的定义,可知

(1) 含有零向量的向量组一定线性相关;

(2) 由单个非零向量组成的向量组一定线性无关;

(3) 两个非零向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$线性相关的充分必要条件是存在非零常数$\lambda$,使$\boldsymbol{\beta} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$.

例 3.7 证明向量组

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = (0,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

线性无关.

证 令 $k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{O}$, 即

$$\begin{aligned} & k_1 (1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} + k_2 (0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} + \cdots + k_n (0,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}} \\ = & (k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}} = (0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

所以, $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, 于是, 向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关.

例 3.8 证明向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$线性无关.

证 令 $k_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + k_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + k_n \boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{O}$, 将$\boldsymbol{\varepsilon}_i (i=1,2,\cdots,n)$代入,得

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n \\ k_2 + k_3 + \cdots + k_n \\ k_3 + \cdots + k_n \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n=0 \\ \qquad k_2+k_3+\cdots+k_n=0 \\ \qquad\qquad k_3+\cdots+k_n=0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad k_n=0 \end{cases}$$

从最后一个方程开始，逐个向上回代可得，$k_n=k_{n-1}=k_{n-2}=\cdots=k_1=0$，于是，向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关.

注　如无特殊说明，以后 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 总表示例 3.6 和例 3.8 中的向量.

例 3.9　证明向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，　$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，　$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$，　$\boldsymbol{\alpha}_4=(6,5,3,0)^{\mathrm{T}}$

线性相关.

证　由于$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{O}$$

由定义 3.8 知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

定理 3.2　向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$线性相关的充分必要条件是至少有一个$\boldsymbol{\alpha}_i(1\leqslant i\leqslant m)$可以表示成其余 $m-1$ 个向量的线性组合.

证　必要性　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_i\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$$

不妨设 $k_i\neq 0(1\leqslant i\leqslant m)$，则有

$$k_i\boldsymbol{\alpha}_i=-k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_2\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}-k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}-\cdots-k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}_i=-\frac{k_1}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}-\frac{k_{i+1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}-\cdots-\frac{k_m}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_m$$

所以，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

充分性　不妨设$\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由其他向量线性表示，即存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_m$，使

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\lambda_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

即

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+(-1)\boldsymbol{\alpha}_i+\lambda_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$$

显然，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{i-1},-1,\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_m$ 不全为零，从而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

推论　向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$线性无关的充分必要条件是向量组中任何一个向量都不能由其他向量线性表示.

定理 3.3　n 个 n 维向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}$$

线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

证 令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{O}$,将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 代入得一线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1n}k_n=0\\a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2n}k_n=0\\\qquad\qquad\vdots\\a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{nn}k_n=0\end{cases}$$

由克莱姆法则知,此线性方程组只有零解的充分必要条件是其系数行列式不等于零,即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

这恰好是所给向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件.

定理 3.4 若一向量组的某个部分组线性相关,则该向量组必线性相关.

证 设向量组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l,\boldsymbol{\alpha}_{l+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$,不妨设其部分组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$($1\leqslant l\leqslant m$)线性相关,从而存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_l$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_l\boldsymbol{\alpha}_l=\boldsymbol{O}$$

于是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_l\boldsymbol{\alpha}_l+0\,\boldsymbol{\alpha}_{l+1}+\cdots+0\,\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$$

显然,$k_1,k_2,\cdots,k_l,0,\cdots,0$ 是一组不全为零的常数,所以,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l,\boldsymbol{\alpha}_{l+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

推论 一线性无关向量组的任何一个部分组都线性无关.

如对向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\2\\3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\6\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\\2\end{pmatrix}$,由于$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1$,即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,所以由定理 3.4 知,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

定理 3.5　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$必可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，且表示方式是唯一的.

证　因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$线性相关，所以存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m,k_{m+1}$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k_{m+1}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{O}$$

又由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，从而$k_{m+1}\neq 0$，于是

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k_{m+1}}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k_{m+1}}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_m}{k_{m+1}}\boldsymbol{\alpha}_m$$

即$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

再用反证法证明表示方式的唯一性. 若

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,\quad \boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

两式相减，得

$$\boldsymbol{O}=(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_m-l_m)\boldsymbol{\alpha}_m$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，从而$k_i-l_i=0(i=1,2,\cdots,m)$，即$k_i=l_i(i=1,2,\cdots,m)$，于是，表示方式是唯一的.

3.3　向量组的极大线性无关组与秩

3.3.1　向量组的等价

首先定义两个向量组之间的线性关系.

定义 3.9　若向量组B:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$中的每一个向量都可由向量组$A$:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，同时向量组$A$中的每一个向量也都可由向量组$B$线性表示，则称向量组$A$与向量组$B$等价.

根据定义可知，向量组的等价关系满足以下性质：

(1) 反身性　向量组A:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与其自身等价；

(2) 对称性　若向量组A:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与向量组$B$:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$等价，则向量组$B$与向量组$A$也等价；

(3) 传递性　若向量组A:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与向量组$B$:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$等价，且向量组$B$与向量组$C$:$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t$等价，则向量组$A$与向量组$C$等价.

请读者给出性质(3)的证明.

例 3.10　证明向量组

$$\text{I}:\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\cdots,\boldsymbol{e}_n$$

与向量组

$$\text{II}:\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

等价.

证 由于

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_1 &= \boldsymbol{e}_1 \\
\boldsymbol{\varepsilon}_2 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\varepsilon}_n &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{e}_{n-1} + \boldsymbol{e}_n
\end{aligned}$$

所以,向量组Ⅱ可由向量组Ⅰ线性表示.

又由于

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\
\boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{e}_n &= \boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}
\end{aligned}$$

所以,向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ线性表示.

故向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价.

3.3.2 极大线性无关组

对向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,0)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1,0)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(6,5,3,0)^T$,由例 3.9 知$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$,所以,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,但其部分组$\boldsymbol{\alpha}_1$;$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$;$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是原向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中含有向量个数最多的线性无关的部分组,而且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中任一向量都可由其线性表示. 对具有这种特性的向量组,我们有下面的定义.

定义 3.10 对向量组 A,如果在 A 中可选出由 r 个向量构成的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$,满足

(1) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;

(2) 向量组 A 中任一向量都可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 A 的一个极大线性无关组,简称极大无关组,有时也称为最大线性无关组.

如向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1,0)^T$ 就是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,0)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1,0)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(6,5,3,0)^T$ 的一个极大线性无关组.

注 (1) 按照定义,一个线性无关向量组的极大线性无关组就是向量组本身.

(2) 完全由零向量组成的向量组没有极大线性无关组.

(3) 一个向量组的极大线性无关组不是唯一的.

由例 3.6 知,$\mathbf{R}^n$ 中的每一个向量都可由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性表示,且 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是$\mathbf{R}^n$ 的一个极大线性无关组;又由例 3.10 知,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 可由$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示,所以$\mathbf{R}^n$ 中的任一向量都可由$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示,且$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关,因此,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 也是$\mathbf{R}^n$ 的一个极大线性无关组.

定理 3.6　向量组与其极大线性无关组等价.

证　设向量组 A 的一个极大线性无关组为 A_0：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，则

(1) A_0 中的向量都是 A 中的向量，所以，A_0 可由 A 线性表示；

(2) 对任意$\boldsymbol{\alpha}\in A$，当$\boldsymbol{\alpha}\in A_0$ 时，显然，$\boldsymbol{\alpha}$ 可由 A_0 线性表示；当$\boldsymbol{\alpha}\notin A_0$ 时，由极大线性无关组的定义知，$\boldsymbol{\alpha}$ 也可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，从而 A 可由 A_0 线性表示.

由(1)，(2)知 A 与 A_0 等价.

由向量组等价的传递性质，可以得到下面的推论：

推论　一向量组的任意两个极大线性无关组是等价的.

引入极大线性无关组的意义在于，从原向量组 A 中选出一个线性无关的部分组 A_0：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，使原向量组 A 与所选向量组 A_0 等价，从而可用新向量组 A_0 代替原向量组 A；又由于向量组 A_0 线性无关，所以，A_0 中无多余的向量，是能代替原向量组 A 的含有向量个数最少的向量组.

利用下面的定理，可以说明向量组间的线性相关性与向量组所含向量个数的关系.

定理 3.7　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$ 线性无关，且可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示，则必有 $l\leqslant m$.

证　对 l 作数学归纳法. 当 $l=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{O}$. 由于$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示，所以 $m\geqslant 1$，且

$$\boldsymbol{\alpha}_1=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m$$

k_i 不全为零，不妨设 $k_1\neq 0$，于是得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\beta}_m$$

由此知向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示，而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示，因此，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$等价.

设 $k=l-1$ 时，上述结论成立，即$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{l-1},\boldsymbol{\beta}_l,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$等价.

当 $k=l$ 时，由于$\boldsymbol{\alpha}_l$ 可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示，从而$\boldsymbol{\alpha}_l$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{l-1},\boldsymbol{\beta}_l,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示. 此时若 $m<l$，即 m 最多可取到 $l-1$，则$\boldsymbol{\alpha}_l$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{l-1}$线性表示，这与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{l-1},\boldsymbol{\alpha}_l$ 线性无关矛盾.

综上所述，只有 $l\leqslant m$.

推论 1　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$ 可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示，且 $l>m$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$ 线性相关.

由此推论知，若一向量组的某个极大线性无关组含有 r 个向量，则该向量组中任意 $r+1$ 个向量(若向量组含有 $r+1$ 个向量)都线性相关.

推论 2　任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

证　因为任意 $n+1$ 个 n 维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$都可由 n 维向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性

表示，由推论 1 知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性相关.

推论 3 两个等价的线性无关向量组含有相同个数的向量.

推论 4 一个向量组的任意两个极大线性无关组含有相同个数的向量.

由上面的讨论知，一个向量组可以有不同的极大线性无关组，但极大线性无关组所含向量的个数是一样的.

3.3.3 向量组的秩

定义 3.11 向量组 A 的极大线性无关组 A_0：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩，记为 $\mathrm{R}(A)$，即 $\mathrm{R}(A)=r$.

若向量组 A 的秩为 r，则 A 中任意 r 个线性无关向量构成的向量组都是极大线性无关组.

由于 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是$\mathbf{R}^n$ 的一个极大线性无关组，所以，$\mathrm{R}(\mathbf{R}^n)=n$.

注 一线性无关向量组的秩等于该向量组所含向量的个数.

例 3.11 证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m$.

证 必要性 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则其极大线性无关组就是向量组本身，即其极大线性无关组含有 m 个向量，从而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m$.

充分性 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m$，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大线性无关组含有 m 个向量，从而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 就是其极大线性无关组，这说明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

借助于向量组的秩的概念，定理 3.7 可以改写为：若向量组 A:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$ 线性无关，且可由向量组 B:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示，则必有 $\mathrm{R}(A)\leqslant m$. 或更一般地，有以下定理：

定理 3.8 若向量组 A:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$ 可由向量组 B:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示，则必有 $\mathrm{R}(A)\leqslant\mathrm{R}(B)$.

证 设 $\mathrm{R}(A)=r_1$，且 A 的极大线性无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$；又设 $\mathrm{R}(B)=r_2$，且 B 的极大线性无关组为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$. 因为 A 可由 B 线性表示，所以，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 可由 B 线性表示.

又向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$是 B 的极大线性无关组，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$与 B 等价，所以，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$线性表示.

于是，由定理 3.7 知，$r_1\leqslant r_2$，即 $\mathrm{R}(A)\leqslant\mathrm{R}(B)$.

推论 若向量组 A:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 B:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$等价，则 $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)$.

需要注意的是，两个向量组的秩相等，它们仍可能不等价. 如取向量组 A:$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,0,0)$和 B:$\boldsymbol{\beta}_1=(0,0,0,1,0)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,0,0,1)$，则 $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)=2$，但这两个向量组并不等价.

定理 3.9 两个向量组 A:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 B:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$等价的充分必要条件是 $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)=\mathrm{R}(A,B)$.

证 必要性 若两个向量组 A,B 等价，则有 $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)$. 不妨设 $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)=r$，

且$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$和$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$分别为向量组$A,B$的极大线性无关组.

由向量组A,B等价知，向量组$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示，所以，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$也可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示，即$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的一个极大线性无关组，从而有$\mathrm{R}(A,B)=r$，于是，$\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)=\mathrm{R}(A,B)=r$.

充分性　设$\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)=\mathrm{R}(A,B)=r$，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$和$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$分别为向量组$A,B$的极大线性无关组.

由$\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(A,B)=r$知，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$构成向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的一个极大线性无关组，从而向量组$B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示，进而可由向量组$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

由$\mathrm{R}(B)=\mathrm{R}(A,B)=r$知，$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$构成向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的一个极大线性无关组，所以，向量组$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$线性表示，进而可由向量组$B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性表示.

综上所述，向量组$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与向量组$B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$等价.

例 3.12　证明：向量组

$$A:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(5,7,9)^{\mathrm{T}}$$

与向量组

$$B:\boldsymbol{\beta}_1=(3,4,5)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$$

等价，并将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$分别用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

证　只需证$\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)=\mathrm{R}(A,B)$.

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，而$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以向量组$A$的秩为 2；而$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关，所以向量组$B$的秩为 2.

又由于$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_1$，所以$\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)=\mathrm{R}(A,B)$，由定理 3.9 知，向量组$A$与向量组$B$等价.

利用定理 3.8、定理 3.9 及其证明方法，可以证明下面两个推论.

推论 1　若向量组$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可由向量组$B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性表示，且$\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)$，则$A$与$B$等价.

推论 2　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的秩为$r_1$，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的秩为$r_2$，则

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\leqslant r_1+r_2$$

3.4　矩阵的秩

由 3.1.1 节知，对一个$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$，若将其按行分块，则可记为$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)^{\mathrm{T}}$，若将其按列分块，则可记为$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$. 此时向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$分别

是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组和列向量组.

定义 3.12 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩,而列向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩.

求一个矩阵的行秩或列秩并不是一件容易的事,但对特殊矩阵,可以很容易地看出其秩. 例如,对矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&5&0\\0&2&9&4\\0&0&6&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

按照定义,其行向量组为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,9,4)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,6,3)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,0)$.

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,所以,$\boldsymbol{A}$ 的行秩为 3. 对其列向量组$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}5\\9\\6\\0\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}0\\4\\3\\0\end{pmatrix}$,因为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$线性无关,而$\boldsymbol{\beta}_3=\frac{7}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_4$,所以,$\boldsymbol{A}$ 的列秩也为 3.

一般地,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足:(1)元素全为 0 的行位于矩阵的底部;(2)非零行的第一个不为零的元素的列标号随行标号的增加而严格递增,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为行阶梯形矩阵. 若一行阶梯形矩阵同时还满足每个非零行的第一个非零元素是 1,且是其所在列的唯一的非零元素,则这样的矩阵称为行最简形矩阵. 同样可以定义列阶梯形矩阵和列最简形矩阵.

例如,矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&5&0\\0&2&9&4\\0&0&6&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$分别为行阶梯形和行最简形矩阵.

按照定义,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为一行阶梯形矩阵,则其非零行的行数与行秩是相同的;同样对列而言,若矩阵是列阶梯形,则其非零列的列数也与列秩相等. 在第 2 章中已经介绍,借助于初等行(列)变换,可将矩阵化为阶梯形. 问题是矩阵的初等行(列)变换是否改变矩阵的行(列)秩?

定理 3.10 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

证 只需证明经过一次初等行变换后,两矩阵的行向量组等价. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，即 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_i\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_j\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，则对应矩阵的三种初等行变换，$\boldsymbol{B}$ 具有下面三种形式：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_j\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_i\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\k\boldsymbol{\alpha}_i\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_j\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_i\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_j+k\boldsymbol{\alpha}_i\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$$

显然，三种形式的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组都可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性表示.

由于对 $\boldsymbol{B}$ 进行相应的初等行变换，也可以化为 $\boldsymbol{A}$，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组可由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示.

所以，$\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

由定理 3.8 的推论知，初等行变换不改变矩阵的行秩. 同理可证，初等列变换也不改变矩阵的列秩.

定理 3.11　对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 实施初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的列秩与 $\boldsymbol{B}$ 的列秩相等.

证　设 $\boldsymbol{A}$ 为一 $m\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次初等行变换得到 $\boldsymbol{B}$，相当于用相应的初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组分别为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，即 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，于是$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{P\alpha}_1,\boldsymbol{P\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{P\alpha}_n)$，即 $\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{P\alpha}_i$或$\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,n)$.

若 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$ 线性相关，则存在一组不全为零的数 k_1，$k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s}=\boldsymbol{O}$$

所以

$$k_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_{i_s}=P(k_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s})=\boldsymbol{O}$$

即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$中对应的 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_s}$ 也线性相关.

由此可知，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$与$\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_s}$具有相同的线性关系.

利用相同的方法可以证明：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组中某个部分组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$线性无关，则 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组中相应的部分组 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_s}$也线性无关.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组中某个向量$\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组中某个部分组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$线性表示，即存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，使$\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组相应的$\boldsymbol{\beta}_i$可由$\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_s}$线性表示，且$\boldsymbol{\beta}_i=\lambda_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\beta}_{i_s}$. 反之亦然.

综上所述，矩阵的初等行变换不改变其列向量组的线性关系，因而变换前后矩阵的列秩相等.

同理可证：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的行秩与 $\boldsymbol{B}$ 的行秩相等.

推论 矩阵的初等变换不改变矩阵的行秩和列秩.

由定理 2.3 知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等变换可化为同阶矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{B}$ 的行秩与列秩都为 r. 由上面的推论知，$\boldsymbol{A}$ 的行秩与列秩都为 r，于是得到如下定理.

定理 3.12 矩阵的行秩与列秩相等.

定义 3.13 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行(列)秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

由矩阵秩的定义知：若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$.

注 对矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=m$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩矩阵；若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵. 而对矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$，若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵；若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为降秩矩阵.

例如，对矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&3&1\end{pmatrix}$，由于 $\boldsymbol{A}$ 的前 3 个行向量线性无关，所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，从而 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵. 而对矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\end{pmatrix}$，由于其两个行向量的对应分量不成比例，所以两个行向量线性无关，因此，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$，$\boldsymbol{B}$ 为行满秩矩阵. 对矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$，由于其 3 个行向量线性无关，从而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{C})=3$，所以，$\boldsymbol{C}$ 为满秩矩阵. 又对矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&0&0\\3&2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}$，由于 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{O}$，所以，$\mathrm{R}(\boldsymbol{D})<3$，即 $\boldsymbol{D}$ 是降秩矩阵.

根据定理 3.3，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵的充分必要条件是$|\boldsymbol{A}|\neq0$. 进而，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

定理 3.13 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

由此可以利用矩阵的初等变换求矩阵的秩.

例 3.13　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 5\\ 2 & -2 & 7 & 9\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ 的秩.

解　对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 5\\ 2 & -2 & 7 & 9\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 5\\ 0 & 4 & -1 & -1\\ 0 & 4 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 5\\ 0 & 4 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵有两个非零行，所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$.

推论 1　矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 等价于标准形 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的充分必要条件是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$.

推论 2　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

证　必要性　设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$，由推论 1 知，$\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

已知 $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$，由等价关系的传递性知，$\boldsymbol{B}$ 等价于 $\boldsymbol{C}$，即用初等变换可将 $\boldsymbol{B}$ 化为 $\boldsymbol{C}$，而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{C})=r$，从而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=r$，故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

充分性　设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=r$，由推论 1 知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都与 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 等价，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

例 3.14　(1) 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵，证明：$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$；

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times s}$，证明：$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\}$.

证　(1) 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r_1$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=r_2$，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大线性无关组，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 线性表示，由定理 3.8 和定理 3.9 的推论 2 知

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2})\\ &\leqslant r_1+r_2=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times s}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times s}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s)$，则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s) &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns}\end{pmatrix}\\ &= (b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots\\ &\quad +b_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\cdots,b_{1s}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2s}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{ns}\boldsymbol{\alpha}_n)\end{aligned}$$

可见,$\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示,从而由定理 3.8 知,$\boldsymbol{C}$ 的列秩小于等于 $\boldsymbol{A}$ 的列秩,即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{C})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

同理,若将 $\boldsymbol{B}$ 记为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}a_{11}\boldsymbol{\beta}_1+a_{12}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\beta}_n\\a_{21}\boldsymbol{\beta}_1+a_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{\beta}_n\\\vdots\\a_{m1}\boldsymbol{\beta}_1+a_{m2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示,从而 $\boldsymbol{C}$ 的行秩不大于 $\boldsymbol{B}$ 的行秩,即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{C})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

综上所述,$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\}$.

定理 3.14 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{B}$ 为任意 $n\times m$ 矩阵,则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

证 由第 2 章的结论知,若矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}$ 可以写成初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$ 的乘积,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$. 而对矩阵左乘以一个初等矩阵相当于对其进行一次相应的初等行变换,于是,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{B}$ 相当于对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 进行一系列初等行变换,根据定理 3.13,有 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

定理 3.15 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{l1})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{l2})^{\mathrm{T}}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_n=(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{ln})^{\mathrm{T}}$ 线性无关,则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{l1},a_{l+1,1},\cdots,a_{m1})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{l2},a_{l+1,2},\cdots,a_{m2})^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{ln},a_{l+1,n},\cdots,a_{mn})^{\mathrm{T}}$ 也线性无关.

证 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,所以,矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{l1}&a_{l2}&\cdots&a_{ln}\end{pmatrix}$$

的秩为 n.

而矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{l1}&a_{l2}&\cdots&a_{ln}\\a_{l+1,1}&a_{l+1,2}&\cdots&a_{l+1,n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

的行向量组的前 l 个向量是 $\boldsymbol{A}$ 的全部行向量，从而 $\boldsymbol{B}$ 的行秩大于等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩，即 $R(\boldsymbol{B})\geqslant R(\boldsymbol{A})=m$. 但矩阵 $\boldsymbol{B}$ 只有 n 列，所以，$R(\boldsymbol{B})\leqslant n$，故 $R(\boldsymbol{B})=n$，即向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性无关.

推论　若 n 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,m)$线性相关，则在每个向量中都去掉相同的 $n-r$ 个分量所得到的 r 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,m)$也线性相关.

定理 3.16　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则 $R(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 r 阶子式不为零，且所有的 $r+1$ 阶子式都为零.

证明　必要性　由 $R(\boldsymbol{A})=r$ 知，$\boldsymbol{A}$ 的行秩和列秩均为 r，从而可在 $\boldsymbol{A}$ 中选出 r 个线性无关的列向量，按原次序构成 $m\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{A}_1$，则 $R(\boldsymbol{A}_1)=r\leqslant m$. 再在 $\boldsymbol{A}_1$ 中选取 r 个线性无关的行向量，排成 $r\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{A}_2$. 显然，$\boldsymbol{A}_2$ 为方阵，且 $R(\boldsymbol{A}_2)=r$，所以，$|\boldsymbol{A}_2|\neq 0$，即 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r 阶子式不为零.

在 $\boldsymbol{A}$ 中任取一个 $r+1$ 阶子式 $\boldsymbol{A}_3$，设 $\boldsymbol{A}_3$ 的列向量为$\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,r+1)$，将 $\boldsymbol{A}$ 中$\boldsymbol{\alpha}_i$ 所在的列向量记为$\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,r+1)$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，所以，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r+1}$线性相关，而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$是由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r+1}$去掉相应位置的 $n-(r+1)$个分量得到的，由定理 3.15 的推论知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$也线性相关，因此，$|\boldsymbol{A}_3|=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 中的所有 $r+1$ 阶子式全为零.

充分性　设 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r_0，下面用反证法证明：r_0 不能大于 r，也不能小于 r，即 $r_0=r$.

假设 $r_0>r$，由必要性的证明过程知，$\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 r_0 阶子式不为零，而由已知所有的 $r+1$ 阶子式为零，所以，r_0 阶子式全为零，故产生矛盾.

假设 $r_0<r$，则所有 r 阶子式全为零(若不然，则非零 r 阶子式所在的列向量组必线性无关，从而 $R(\boldsymbol{A})\geqslant r>r_0$，矛盾!)，而由已知必存在一个 r 阶子式不为零，故产生矛盾.

因此，只有 $r_0=r$，即 $R(\boldsymbol{A})=r$.

由此定理看出，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 中不等于零的子式的最高阶数. 从而若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$.

例 3.15　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 8 & 2\\ 2 & 12 & -2 & 12\\ 1 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$，求 $R(\boldsymbol{A})$.

解　位于第 1,2 行、第 1,2 列处的一个 2 阶子式 $D_2=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 12\end{vmatrix}=30\neq 0$.

由计算知，所有的 3 阶子式 $D_3=0$，故 $R(\boldsymbol{A})=2$.

由于矩阵的秩与其行(列)向量组的秩相等，因而，判定向量组的线性相关性或求向量组的秩可通过构造相应的矩阵，并求矩阵的秩来实现.

例 3.16　求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\6\\-3\\6\end{pmatrix}$的秩.

解 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&1&2&3&6\\0&2&1&0&-3\\5&4&3&2&6\end{pmatrix}$，对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等变换，得

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_4+(-5)r_1]{r_2+(-3)r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-1&0&3\\0&2&1&0&-3\\0&-1&-2&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-3&1\\0&2&1&0&-3\\0&-2&-1&0&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-3&1\\0&2&1&0&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-3&1\\0&0&-3&-6&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，即向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 3.

下面给出利用矩阵求向量组极大线性无关组的方法.

将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 作为矩阵的列向量构造矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$$

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，使其列向量尽可能化为单位向量或零向量，则与单位向量对应的原列向量组构成极大线性无关组.

例 3.17 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\7\end{pmatrix}$的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量.

解 令矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&2&0&-1\\3&-1&0&4\\1&4&5&7\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+(-3)r_1\\r_4+(-1)r_1}]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&-2\\0&-1&0&1\\0&4&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-1&0&1\\0&2&0&-2\\0&4&5&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+4r_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&5&10\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-1&0&1\\0&0&5&10\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

从 $\boldsymbol{B}$ 的形式知，$R(\boldsymbol{B})=3$，且 $\boldsymbol{B}$ 的前 3 列线性无关，而第 4 列可由前 3 列线性表示，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 构成原向量组的极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

例 3.18 对 c 的不同取值，求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\\c+2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\-6\\10\\c\end{pmatrix}$ 的一个极大线性无关组.

解 构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，并对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&c+2&c\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+(-1)r_1\\r_4+(-3)r_1}]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&6&-4&12\\0&4&c-7&c+6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&-7&0\\0&0&c-9&c-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+\frac{1}{7}(c-9)r_3}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&-7&0\\0&0&0&c-2\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

(1) 若 $c\neq2$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=4$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 就是一个极大线性无关组；

(2) 若 $c=2$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$，$\boldsymbol{B}$ 的第 1,2,3 列线性无关，从而 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2,3 列也线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是所求向量组的一个极大线性无关组.

习题三

A 类

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,2,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,3,0)^T$，求 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)^T$，且 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$，求 $\boldsymbol{\alpha}$.

3. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(5,-1,2,4)^T$，$3\boldsymbol{\alpha}-4\boldsymbol{\beta}=(3,-7,-2,8)^T$，求 $2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}$.

4. 设有 3 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1+\lambda,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1+\lambda,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1+\lambda)^T,\quad \boldsymbol{\beta}=(0,\lambda,\lambda^2)^T$$

验证当 $\lambda\neq-3$ 时，有 $\boldsymbol{\beta}=\frac{-\lambda+1}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_3$.

5. 判断下列向量组的线性相关性：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,4)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(6,4,1,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,-9,-16),\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,1)$.

6. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？证明你的结论.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？证明你的结论.

7. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，问$\boldsymbol{\beta}$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？若能，写出表示式.

8. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$. 证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,a+2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,a)^{\mathrm{T}}$.

(1) a 为何值时，向量组线性无关？

(2) a 为何值时，向量组线性相关？

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量，若 $\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$，证明向量组$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

11. 给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(3,5,-6)^{\mathrm{T}}$，求向量组的一个极大线性无关组，并将其他向量用极大线性无关组表示

12. 给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m>1)$，并由此构造向量组

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m,\quad \boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_m$$

证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$等价.

13. 设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的秩分别为 r_1 和 r_2，向量组Ⅲ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的秩为 r_3，证明：$r_3\leqslant r_1+r_2$.

14. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)^{\mathrm{T}}$. 问：

(1) a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示？

(2) a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，且表示方式唯一？

(3) a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，并且表示方式不唯一？

15. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$都是 4 维向量.

(1) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明存在不全为零的常数 c_1,c_2，使得 $c_1\boldsymbol{\beta}_1+c_2\boldsymbol{\beta}_2$可以用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=3$，证明存在不全为零的常数 c_1,c_2，使得 $c_1\boldsymbol{\beta}_1+c_2\boldsymbol{\beta}_2$可以用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

16. 给定 n 维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$，且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})=r$，又已知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=r+1$，求 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})$.

17. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,2,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,5,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,-4,-3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,-2,-1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(1,2,9,8)^T$.

(1) 求 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$；

(2) 求$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大线性无关组，并且把其余向量用此极大线性无关组表示.

18. 已知行向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$，求该向量组的秩及一个极大线性无关组，并把其余向量表示成极大线性无关组的线性组合.

19. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，对 a 的不同取值，求 $R(\boldsymbol{A})$.

20. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，求 $R(\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{A})$.

21. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，已知 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}^*)=3$，求 a,b 应满足的关系.

22. 已知 n 维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，设

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$$

证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关的充分必要条件是$|\boldsymbol{C}|\neq 0$.

23. 给定向量组

$$\text{Ⅰ}: \boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2)^T$$

和

$$\text{Ⅱ}: \boldsymbol{\beta}_1=(1,2,a+3)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_2=(2,1,a+6)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_3=(2,1,a+4)^T$$

当 a 为何值时，Ⅰ 和Ⅱ等价？a 为何值时Ⅰ和Ⅱ不等价？

B 类

一、填空题

1. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，3 维列向量$\boldsymbol{\alpha}=(a,1,1)^T$，已知 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与$\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $a=$________.

2. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,0,c)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(b,c,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,a,b)$线性无关，则 a,b,c 必满足关系式________.

3. 设$\boldsymbol{\alpha}$为 3 维列向量,若$\boldsymbol{\alpha\alpha}^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=$________.

4. 设n维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^T(a<0)$,$\boldsymbol{E}$为$n$阶单位矩阵,矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^T$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^T$,其中$\boldsymbol{A}$的逆矩阵为$\boldsymbol{B}$,则$a=$________.

5. 设行向量组$(2,1,1,1)$,$(2,1,a,a)$,$(3,2,1,a)$,$(4,3,2,1)$线性相关,且$a\neq1$,则$a=$________.

二、单项选择题

1. 设向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示,但不能由向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$线性表示.记向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$,则( ).

A. $\boldsymbol{\alpha}_m$不能由Ⅰ线性表示,也不能由Ⅱ线性表示

B. $\boldsymbol{\alpha}_m$不能由Ⅰ线性表示,但可由Ⅱ线性表示

C. $\boldsymbol{\alpha}_m$可由Ⅰ线性表示,也可由Ⅱ线性表示

D. $\boldsymbol{\alpha}_m$可由Ⅰ线性表示,但不可由Ⅱ线性表示

2. 设有任意两个n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$,若存在两组不全为零的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$和$k_1,k_2,\cdots,k_m$,使$(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{O}$,则( ).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$都线性相关

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$都线性无关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$线性无关

D. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$线性相关

3. 设向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示,下列命题正确的是( ).

A. 若向量组Ⅰ线性无关,则$r\leqslant s$　　B. 若向量组Ⅰ线性相关,则$r>s$

C. 若向量组Ⅱ线性无关,则$r\leqslant s$　　D. 若向量组Ⅱ线性相关,则$r<s$

4. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关的充分必要条件是( ).

A. 存在全为零的实数$k_1,k_2,\cdots,k_r$,使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{O}$

B. 存在不全为零的实数$k_1,k_2,\cdots,k_r$,使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r\neq\boldsymbol{O}$

C. 每个$\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,r)$都不能用其他向量线性表示

D. 有线性无关的部分组

5. 设$\boldsymbol{A}$是4×5矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$是$\boldsymbol{A}$的列向量组,$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3$,则下列叙述正确的是( ).

A. $\boldsymbol{A}$的任何 3 个行向量都线性无关

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$的含有 3 个向量的线性无关部分组一定是它的极大无关组

C. $\boldsymbol{A}$ 的 3 阶子式都不为 0

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的线性相关的部分组含有向量个数一定大于 3

6. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，$\boldsymbol{\gamma}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则下列结论不正确的是(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关

7. n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，则下列命题不正确的是(　　).

A. 如果 $r=n$，则任何 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 都可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示

B. 如果任何 n 维向量都可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则 $r=n$

C. 如果 $r=s$，则任何 n 维向量都可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 唯一线性表示

D. 如果 $r<n$，则存在 n 维向量不可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵，则(　　).

A. $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=m$　　B. $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=m,\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=n$

C. $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n,\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=m$　　D. $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=n$

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则下列命题正确的是(　　).

A. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关

B. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

C. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关

D. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵，则必有(　　).

A. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

B. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

C. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

D. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

11. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

12. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组中，线性无关的是(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

D. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+22\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$

三、计算或证明下列各题

1. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，试问常数 m,k 满足什么条件时，向量组 $k\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,m\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关、线性相关？

2. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 有相同的秩，证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 等价.

3. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,a+2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,a)^{\mathrm{T}}$，问

(1) a 为何值时，该向量组线性无关，并在此时将向量$\boldsymbol{\alpha}=(4,1,6,10)^{\mathrm{T}}$ 用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示；

(2) a 为何值时，该向量组线性相关？此时求出它的一个极大线性无关组.

4. 给定 4 维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组表示.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b-1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，已知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})<\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})<\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$，求 a，b 和 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})$.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，证明：$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$ 的充分必要条件是存在 m 维非零列向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}$ 和 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

7. 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都是 3 维列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 证明：

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant 2$；

(2) 如果$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<2$.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵. 已知 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，试判断 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组是否线性相关？为什么？

9. 求常数 a，使得向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示，但$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

第 4 章

线性方程组

在中学，我们曾学习过二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

在几何上，上述方程组表示的是平面上两条直线的相对位置和交点.若两条直线平行且不重合，则两条直线无交点，方程组无解；若两条直线平行且重合，则两条直线有无穷多个交点，对应方程组有无穷多解；若两条直线不平行，则它们有唯一的交点，对应方程组有唯一解.

在行列式一章中，引入了包含 n 个方程、n 个未知量的线性方程组，并给出了求其解的方法——克莱姆法则.本章将讨论一般的 n 元一次方程组（线性方程组），重点讨论方程组的解的存在性、唯一性、解的性质和通解的结构，在有解的情况下，寻找求解的方法.

4.1 线性方程组的概念

含有 m 个方程、n 个未知量的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

若记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则方程组(4.1)可以表示为矩阵形式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为方程组(4.1)的系数矩阵，$\boldsymbol{b}$ 称为方程组(4.1)的常数项矩阵，而矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为方程组(4.1)的增广矩阵,记为$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})$,有时也记为$\bar{\boldsymbol{A}}$.

在方程组(4.1)中,若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{O}$,则对应的线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 称为齐次线性方程组;若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{O}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 称为非齐次线性方程组. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 称为由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 导出的齐次线性方程组,简称为方程组(4.1)的导出组.

若记 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$,则方程组(4.1)有下面的向量形式:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$$

此时齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的向量形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{O}$$

定义 4.1 若有一组数 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$,使得

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+\cdots+a_{1n}\xi_n=b_1 \\ a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+\cdots+a_{2n}\xi_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}\xi_1+a_{m2}\xi_2+\cdots+a_{mn}\xi_n=b_m \end{cases}$$

则称 $x_i=\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$为方程组(4.1)的一个解.或若向量$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$满足方程组(4.1),即有 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{b}$,则称$\boldsymbol{\xi}$为方程组(4.1)的一个解向量,也简称为解.

显然,齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 始终有解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$,称为方程组的零解或平凡解.

由第 3 章关于向量组线性相关性的有关结论可知:

(1) 方程组(4.1)有解的充分必要条件是向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

(2) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 线性相关,而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

(3) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 有非零解的充分必要条件是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

如此便将线性方程组解的讨论与第 3 章有关向量组的线性相关性的结论联系起来.

例 4.1　求线性方程组

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

的解.

解　交换原方程组的第一个和第二个方程的位置,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

将此方程组的第一个方程乘以 -2 加到第三个方程,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 - 4x_3 = -10 \end{cases}$$

将方程组的第二个方程乘以 -1 加到第三个方程,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ -3x_3 = -9 \end{cases}$$

将方程组的第三个方程乘以 $-\frac{1}{3}$,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

将方程组的第三个方程加到第二个方程,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

将方程组的第二个和第三个方程乘以 -1 加到第一个方程,得

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

于是求得方程组的唯一解

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

或方程组的解向量

$$x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

上述解方程组的思路是通过下面的三种变换消去方程中的若干个未知量：交换两个方程的顺序；用非零常数乘以某个方程；将一个方程的非零常数倍加到另一个方程上. 这种解方程组的方法称为消元法.

借助于方程组的矩阵表示，上述消元的过程也可以通过对方程组的增广矩阵进行相应的初等行变换来实现.

例 4.1 中方程组的增广矩阵为

$$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}0&1&-1&-1\\1&1&1&6\\2&3&-2&2\end{pmatrix}$$

对其进行相应的初等行变换，得

$$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&6\\0&1&-1&-1\\2&3&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&6\\0&1&-1&-1\\0&1&-4&-10\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&6\\0&1&-1&-1\\0&0&-3&-9\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&6\\0&1&-1&-1\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&6\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+(-1)r_3]{r_1+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

以最后一个矩阵为增广矩阵的方程组为$\begin{cases}x_1 & & &=1\\ & x_2 & &=2\\ & & x_3&=3\end{cases}$，从而得其解向量为

$$x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

本章将以消元法为基础，借助于向量和矩阵，介绍求一般 n 元一次方程组(4.1)的方法.

4.2 齐次线性方程组

本节讨论齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O} \tag{4.2}$$

由于方程组(4.2)始终有零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$,因此,我们主要讨论方程组(4.2)的非零解,包括方程组(4.2)有非零解的条件、非零解的个数、解之间的关系以及非零解的求法. 为此,先介绍齐次线性方程组的解的性质.

性质 1　若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_2$ 为方程组(4.2)的解,则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1\pm\boldsymbol{\xi}_2$ 仍为方程组(4.2)的解.

证　由于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_2$ 为方程组(4.2)的解,所以,$\boldsymbol{A\xi}_1=\boldsymbol{O},\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{O}$. 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1\pm\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{A\xi}_1\pm\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{O}\pm\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$$

即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1\pm\boldsymbol{\xi}_2$ 为方程组(4.2)的解.

性质 2　若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 为方程组(4.2)的解,则对于任意常数 k,$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}$ 仍为方程组(4.2)的解.

证　由于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 为方程组(4.2)的解,所以,$\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{O}$. 于是 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\xi})=k(\boldsymbol{A\xi})=k\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$,即 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}$ 为方程组(4.2)的解.

由性质 1 和性质 2 可得更一般的结论:若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_m$ 是方程组(4.2)的 m 个解,则对于任意 m 个实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\xi}_m$ 仍然是方程组(4.2)的解.

由上述两个性质可知,若方程组(4.2)有非零解,则必有无穷多个非零解. 记方程组(4.2)所有解构成的集合为 S,称 S 为方程组(4.2)的解集合,简称解集. 若将方程组(4.2)的解看作向量,则方程组(4.2)的所有解向量构成一个 n 维向量组. 由第 3 章有关向量组的结论知,若能求出方程组(4.2)的解向量组 S 的极大线性无关组,便可以求出方程组(4.2)的所有解. 为此引入基础解系的概念.

定义 4.2　若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_r$ 为方程组(4.2)的解向量组 S 的一个极大线性无关组,则称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_r$ 为方程组(4.2)的基础解系.

由极大线性无关组的概念可知,方程组(4.2)的一组解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_r$ 构成方程组(4.2)的基础解系的充分必要条件是:

(1) $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 线性无关;

(2) 方程组(4.2)的任一解 $\boldsymbol{\xi}$ 都可以由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 线性表示.

可见,求齐次线性方程组(4.2)解的问题转化为求其基础解系的问题. 为了求出基础解系,可采用上节给出的消元法,而消元法的每一步,实际上是将方程组变换为一个同解方程组. 一般地有下面的结论.

定理 4.1　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等行变换后化为矩阵 $\boldsymbol{B}$,则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O}$ 是同解方程组.

证　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等行变换后化为矩阵 $\boldsymbol{B}$,利用第 2 章的结论,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$.

若 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{O}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的任意一个解向量,即 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{O}$,显然有 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A\xi})=(\boldsymbol{PA})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{B\xi}=\boldsymbol{O}$,即 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{O}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O}$ 的解.

反之,若 $\boldsymbol{\eta}\neq\boldsymbol{O}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O}$ 的任意一个解向量,即 $\boldsymbol{B\eta}=\boldsymbol{O}$,或 $(\boldsymbol{PA})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A\eta})=$

$\boldsymbol{O}$. 由于 $\boldsymbol{P}$ 可逆，从而有 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{\eta}\neq\boldsymbol{O}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的解.

综上所述，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O}$ 是同解方程组.

此定理说明，对方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换不影响方程组的解. 若对调 $\boldsymbol{A}$ 的两列的位置，相当于将方程组中的未知量作相应的次序变动，所得的方程组与原方程组也同解. 因此，可以通过对方程组的系数矩阵进行初等行变换和对调其两列的位置讨论方程组的解或基础解系.

设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r<n$，不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行线性无关. 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

在 $\boldsymbol{A}$ 中，不妨设 $a_{11}\neq 0$. 事实上，若 $a_{11}=0$，但 $a_{ij}\neq 0$，则可先将 $1,i$ 行对调，再将 $1,j$ 两列对调，便可将 a_{ij} 调到矩阵的第 1 行第 1 列.

将第 1 行乘以 $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$，再加到第 i 行($i=2,3,\cdots,m$)，$\boldsymbol{A}$ 变为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

对第 3 行到第 m 行，采取类似的步骤，可将上述矩阵化为下面的形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2r}^{(1)} & a_{2,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

不妨设 $a'_{rr}\neq 0(r\leqslant m)$，将第 r 行的 $-\dfrac{a_{1r}}{a'_{rr}}$ 倍加到第 1 行，将第 r 行的 $-\dfrac{a_{2r}^{(1)}}{a'_{rr}}$ 倍加到第 2 行，将第 r 行的 $-\dfrac{a'_{jr}}{a'_{rr}}$ 倍加到第 j 行($j=3,4,\cdots,r-1$)，为了简明起见，上述矩阵变换后可记为下面的形式：

$$\begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & \cdots & 0 & a''_{1,r+1} & \cdots & a''_{1n} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & 0 & a''_{2,r+1} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

将第 $r-1, r-2, \cdots, 2$ 列作类似的变换，为了统一起见，变换后的矩阵可记为

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{1,r+1} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & \bar{a}_{22} & \cdots & 0 & \bar{a}_{2,r+1} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{rr} & \bar{a}_{r,r+1} & \cdots & \bar{a}_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

用 $\dfrac{1}{\bar{a}_{ii}}$ 分别乘以第 i 行 $(i=1,2,\cdots,r)$，所得矩阵可以记为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

以 $\boldsymbol{B}$ 作为系数矩阵的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + b_{11}x_{r+1} + b_{12}x_{r+2} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = 0 \\ x_2 + b_{21}x_{r+1} + b_{22}x_{r+2} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ x_r + b_{r1}x_{r+1} + b_{r2}x_{r+2} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = 0 \end{cases}$$

或写成

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n \\ \qquad \vdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases} \tag{4.3}$$

由于对 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 的任意一组值，都可得到方程组(4.3)的一个解，因此，称 $x_{r+1}, \cdots,$

x_n 为自由未知量，于是有结论：若 $R(\boldsymbol{A})=r$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 有 $n-r$ 个自由未知量.

为了得到方程组(4.3)的基础解系，分别取

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

由方程组(4.3)相应可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ -b_{22} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ -b_{2,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix}$$

于是，得到齐次线性方程组(4.3)的一组解向量

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ -b_{22} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\xi}_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ -b_{2,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

下面说明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

由于向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 的后 $n-r$ 个分量构成的向量组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关，由定理 3.15 知 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

最后证明方程组(4.3)的解向量组 S 中任一向量都可由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示.

对解向量组 S 中任一向量

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

设$\boldsymbol{\eta}=\lambda_{r+1}\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_{r+2}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，由于$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是方程组(4.3)的解，从而$\boldsymbol{\eta}$也是方程组(4.3)的解，而且$\boldsymbol{\eta}$和$\boldsymbol{\xi}$的后$n-r$个分量相同，由方程组(4.3)知，它们的前$r$个分量也相同，从而有

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}=\lambda_{r+1}\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_{r+2}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\xi}_{n-r}$$

即S中任一解向量都可由$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性表出.于是，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是$S$的一个极大线性无关组，即$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$构成方程组(4.3)的一个基础解系.

由于方程组(4.3)与方程组(4.2)同解，所以$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$构成方程组(4.2)的基础解系.

定理 4.2　若含有m个方程、n个未知量的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$的系数矩阵的秩$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r<n$，则方程组的基础解系必存在，且含有$n-r$个解向量. 此时若$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$为方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$的基础解系，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$的任一解$\boldsymbol{\xi}$都可表示为$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为一组常数. 特别地，若$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$只有零解.

注　在定理 4.2 的条件下，若$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$为方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$的基础解系，$c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$为任意常数，则$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$称为方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$的通解.

利用定理 4.2，可得下面有关矩阵乘积的一个重要结论.

推论　设$s\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$和$n\times m$矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证　将$\boldsymbol{B}$按列分块为$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$，则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_m)=\boldsymbol{O}$$

从而

$$\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{O},i=1,2,\cdots,m$$

即每个$\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,m)$都是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$的解向量，于是$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$的解向量组的一个部分组. 由定理 4.2 知，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\leqslant n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 故

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$$

根据方程组的向量形式，借助于方程组还可以讨论向量组的线性相关性.

注　利用定理 4.2 可以证明定理 3.7 的推论 2：任意$n+1$个n维向量构成的向量组必线性相关.

证　设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\begin{pmatrix}a_{1,n+1}\\a_{2,n+1}\\\vdots\\a_{n,n+1}\end{pmatrix}$为任意$n+1$个$n$维向量，令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n+k_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\boldsymbol{O}$$

将上式视为以$k_1,k_2,\cdots,k_n,k_{n+1}$为$n+1$个未知量的线性方程组，其系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

的秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant n < n+1$，因此方程组必有非零解，设其为

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) = (k_1, k_2, \cdots, k_n, k_{n+1})$$

即存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n, k_{n+1}$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n + k_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{O}$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性相关.

例 4.2 设 $\boldsymbol{A}^*$ 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明：

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n \\ 1, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1 \\ 0, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) < n-1 \end{cases}$$

证 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$，由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，从而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = n$.

设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$，则 $|\boldsymbol{A}| = 0$，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，从而由推论 4.1 知，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) \leqslant n$，于是，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1$. 但由 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$ 知，$\boldsymbol{A}$ 至少有一个 $n-1$ 阶子式不等于零，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 至少有一个非零元素，即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) \geqslant 1$，故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = 1$.

设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) < n-1$，则 $\boldsymbol{A}$ 的任一 $n-1$ 阶子式都等于零，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 为零矩阵，故 $R(\boldsymbol{A}^*) = 0$.

由定理 4.2 的证明过程，我们有下面的结论：

例 4.3 设有两向量组

$$\begin{aligned} A: \boldsymbol{\alpha}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1l})^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2l})^{\mathrm{T}}, \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{ml})^{\mathrm{T}} \\ B: \boldsymbol{\beta}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1l}, b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1s})^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2l}, b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2s})^{\mathrm{T}}, \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{ml}, b_{m1}, b_{m2}, \cdots, b_{ms})^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

其中 $s \geqslant 1$. 若向量组 A 线性无关，则向量组 B 也线性无关；若向量组 B 线性相关，则向量组 A 也线性相关.

证 只需证明结论的前一部分.

设有数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，使 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{O}$，写成分量形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1l}x_1 + a_{2l}x_2 + \cdots + a_{ml}x_m = 0 \end{cases}$$

若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则上述方程组只有零解，因此，扩展后的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{1l}x_1+a_{2l}x_2+\cdots+a_{ml}x_m=0 \\ b_{11}x_1+b_{21}x_2+\cdots+b_{m1}x_m=0 \\ b_{12}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{m2}x_m=0 \\ \qquad\vdots \\ b_{1s}x_1+b_{2s}x_2+\cdots+b_{ms}x_m=0 \end{cases}$$

也只有零解，从而向量组 B 线性无关.

实际上，在第 3 章中我们借助于矩阵的秩已证明过此结论(参见定理 3.15 及其推论的证明).

例 4.4　求下述齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$$

的基础解系.

解　对系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}$施行初等行变换，化为行最简形矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}r_2]{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-2)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，所以原方程组的基础解系含有两个线性无关的解，并且与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1-2x_3-\dfrac{5}{3}x_4=0 \\ x_2+2x_3+\dfrac{4}{3}x_4=0 \end{cases}$$

取 x_3,x_4 为自由未知量，方程组可写成

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \dfrac{5}{3}x_4 \\ x_2 = -2x_3 - \dfrac{4}{3}x_4 \end{cases}$$

令 $x_3=1, x_4=0$，得一解

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

令 $x_3=0, x_4=1$，得另一解

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 即为所给方程组的基础解系.

例 4.5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系和通解.

解 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，得

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+(-2)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，所以，方程组含有两个自由未知量. 若取 x_3, x_4 为自由未知量，则对应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

依次取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-4\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

故方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2=c_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-4\\2\\0\\1\end{pmatrix},\quad c_1,c_2\text{ 为任意常数}$$

例 4.6　设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0\\2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0\\3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0\\4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0\end{cases}$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

解　对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{r_i+(-i)r_1}\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\-2a&a&0&0\\-3a&0&a&0\\-4a&0&0&a\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

当 $a=0$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1<4$，故方程组有非零解，其同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0$$

即

$$x_1=-x_2-x_3-x_4$$

分别令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，得基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_3=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

于是所求方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+c_3\boldsymbol{\xi}_3,\quad c_1,c_2,c_3\text{ 为任意常数}$$

若 $a\neq0$，则

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{\frac{1}{a}\times r_i}\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{r_1+(-1)r_i}\begin{pmatrix}a+10&0&0&0\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix}$$

当 $a=-10$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=3<4$,故方程组也有非零解. 其同解方程组为

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = 3x_1 \\ x_4 = 4x_1 \end{cases}$$

令 $x_1=1$,得基础解系为

$$\boldsymbol{\xi} = (1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$$

于是所求方程组的通解为

$$x = c\boldsymbol{\xi}, \quad c \text{ 为任意常数}$$

当 $a\neq-10$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=4$,故方程组无非零解.

例 4.7 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c)，且 a,b,c 不全为零，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$($k$ 为常数)满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的通解.

解 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,由定理 4.2 的推论知，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant3$,又由于 a,b,c 不全为零，知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\geqslant1$.

当 $k\neq9$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$,从而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$; 当 $k=9$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=1$,于是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$ 或 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$.

对 $k\neq9$,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系含有两个线性无关的解向量. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$$

由于 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=(3,6,k)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系，于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2, \quad c_1,c_2 \text{ 为任意常数}$$

对 $k=9$,若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系由一个向量构成，又因为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 是方程组的基础解系. 所以，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\ (1,2,3)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系由两个向量构成，又因为 $\boldsymbol{A}$ 的第一行为 (a,b,c)，且 a,b,c 不全为零，所以，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 与 $ax_1+bx_2+cx_3=0$ 同解. 不妨设 $a\neq0$,方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 可写为

$$x_1 = -\frac{b}{a}x_2-\frac{c}{a}x_3$$

分别取 $x_2=1,x_3=0$ 和 $x_2=0,x_3=1$,得 $\boldsymbol{\xi}_1=\left(-\frac{b}{a},1,0\right)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=\left(-\frac{c}{a},0,1\right)^{\mathrm{T}}$,它们构成 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系. 故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2, \quad c_1,c_2 \text{ 为任常数}$$

例 4.8　设$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,r;\ r<n)$是 n 维实向量，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 已知$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解向量，试判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性.

解　设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{O}$$

因为$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的解，且$\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{O}$，故有

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0,\quad i=1,2,\cdots,r$$

或

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=0,\quad i=1,2,\cdots,r$$

在 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{O}$ 两边左乘 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，得

$$k_1\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$$

由$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=0(i=1,2,\cdots,r)$，得 $k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，但$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\neq0$，故只有 $k=0$. 从而 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{O}$. 由于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，所以

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$$

因此，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$线性无关.

4.3　非齐次线性方程组

本节讨论非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\tag{4.4}$$

或

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$$

其中 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{O}$，而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$由方程组(4.1)给出.

借助于向量线性相关性的结果，可知下面的几个结论是等价的：

(1) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；

(2) 向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示；

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 等价；

(4) $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$；

(5) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

由上述几个等价条件，我们有以下结果：

定理 4.3 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

在介绍求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解法之前，先讨论其解的性质：

性质 1 设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意两个解，则$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$为其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的一个解.

证 因为$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，从而有

$$\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{b}$$

于是，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{A\eta}_1-\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{O}$，所以，$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的解.

性质 2 若$\boldsymbol{\eta}$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\xi}$为其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的解，则$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

证 由条件知，$\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{O}$，从而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{A\eta}+\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{b}$. 故$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

性质 3 设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是一组数，

(1) 若 $k_1+k_2+\cdots+k_m=1$，则$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\eta}_m$为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

(2) 若 $k_1+k_2+\cdots+k_m=0$，则$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\eta}_m$为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的解.

请读者自己给出性质 3 的证明.

应用上述性质和齐次线性方程组解的结构，我们不难给出非齐次线性方程组解的结构定理.

定理 4.4 若$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\eta}^*$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解(常称为特解)，则$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s+\boldsymbol{\eta}^*$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意常数. 对 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解$\boldsymbol{\eta}$，都可以找到一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s+\boldsymbol{\eta}^*$. $\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s+\boldsymbol{\eta}^*$ 称为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

证 设$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系，从而由齐次线性方程组解的性质 1 知，$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$仍为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的解. 再由非齐次线性方程组解的性质 2 知，$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}^*=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s+\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

对 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解 $\boldsymbol{\eta}$，由非齐次线性方程组解的性质 1 知，$\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的解. 于是由齐次线性方程组解的结构知，必存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得$\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}^*=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$，即$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s+\boldsymbol{\eta}^*$.

由此定理看出，要求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，只需求出 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系和 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的某一个特解.

下面介绍求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 特解的方法.

设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$，用 4.2 中同样的方法，对 $\boldsymbol{A}$ 施行一系列初等行变换和两列之间的对换，可将 $\boldsymbol{A}$ 化为类似于(3.1)式的行阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,r)$.

用同样的变换，增广矩阵化为

$$(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

与(4.5)式中最后的矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n=d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases} \tag{4.6}$$

在方程组(4.6)中，形如“0=0”的等式可能出现，也可能不出现.

下面讨论方程组(4.6)的解.

(1) 如果在(4.5)式中，$d_{r+1}\neq 0$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b})>\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$，相当于在方程组(4.6)中出现 $0=d_{r+1}\neq 0$ 的情况，从而方程组(4.6)无解，进而方程组(4.4)无解.

(2) 若 $d_{r+1}=0$,由(4.5)式知,$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$,则方程组(4.6)有解,从而方程组(4.4)有解. 下面分两种情况进行讨论:

第一种情况:$r=n$,方程组(4.6)变为

$$\begin{cases}c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1\\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ \qquad\qquad c_{nn}x_n=d_n\end{cases}$$

其中 $c_{ii}\neq0(i=1,2,\cdots,n)$. 在这种情况下,相应的方程组有唯一解,此解可从最后一个方程开始,逐次迭代而得到.

第二种情况:$r<n$,此时方程组(4.6)成为

$$\begin{cases}c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1\\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ \qquad\qquad c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n=d_r\end{cases}$$

其中 $c_{ii}\neq0(i=1,2,\cdots,r)$. 写成等价的形式为

$$\begin{cases}c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r=d_1-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n\\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r=d_2-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n\\ \qquad\qquad\vdots\\ \qquad\qquad c_{rr}x_r=d_r-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n\end{cases}\tag{4.7}$$

对于 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 的任意一组值 $x_{r+1}^0,x_{r+2}^0,\cdots,x_n^0$,由方程组(4.7)可得到 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 唯一的一组值 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_r^0$,从而得到方程组(4.7)的一个解 $\eta^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_r^0,x_{r+1}^0,x_{r+2}^0,\cdots,x_n^0)^{\mathrm{T}}$,此解也是方程组(4.4)的一个解. 因此,在这种情况下,方程组(4.4)有无穷多解,此时 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 仍称为自由未知量.

定理 4.5 对非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$,则方程组有解,且若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$,则方程组有唯一解;若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$,则方程组有无穷多个解. 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})\neq\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$,则方程组无解.

例 4.9 解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=2\\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=1\\ x_1+x_2+x_3+2x_4=3\end{cases}$$

解 方程组的增广矩阵为

$$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&2&-1&1&2\\2&1&1&-1&1\\1&1&1&2&3\end{pmatrix}$$

对增广矩阵进行初等行变换,得

$$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})\xrightarrow[r_3+(-1)r]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & 3 & -3 & -3\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{1}{3}\right)\times r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

因为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3<4$,所以方程组有无穷多个解.此时对应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=2\\ \qquad\quad x_2-x_3+x_4=1\\ \qquad\qquad\quad x_3+2x_4=2\end{cases}$$

取 x_4 为自由未知量,则方程组可写为

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2-x_4\\ \qquad\quad x_2-x_3=1-x_4\\ \qquad\qquad\quad x_3=2-2x_4\end{cases}$$

令 $x_4=c$,得方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1=-2+3c\\ x_2=3-3c\\ x_3=2-2c\\ x_4=c\end{cases},\quad c\text{ 为任意常数}$$

例 4.10　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\ \qquad\quad x_2+x_3-4x_4=1\\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\ 2x_1+3x_2+4x_3-x_4=0\end{cases}$$

解　方程组的增广矩阵为

$$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

对增广矩阵进行初等行变换,得

$$
(A\quad b)\xrightarrow[r_4+(-2)r_1]{r_3+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&-1&0\\0&1&1&-4&1\\0&-1&-1&4&1\\0&-1&-2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&-1&0\\0&1&1&-4&1\\0&0&0&0&2\\0&0&-1&-3&1\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&2&3&-1&0\\0&1&1&-4&1\\0&0&-1&-3&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}
$$

由于 $R(A\quad b)=4$，$R(A)=3$，故原方程组无解.

例 4.11 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\1&3&4&-2\\1&1&0&2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$，求方程组 $Ax=b$ 的通解，并用导出组的基础解系表示.

解 对增广矩阵施行初等行变换，得

$$
(A\quad b)=\begin{pmatrix}1&2&2&0&5\\1&3&4&-2&6\\1&1&0&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&0&5\\0&1&2&-2&1\\0&-1&-2&2&-1\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&0&5\\0&1&2&-2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-2)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&4&3\\0&1&2&-2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

由于 $R(A)=R(A\quad b)=2<4$，所以，原方程组有无穷多解. 若取 x_3，x_4 为自由未知量，则同解方程组为

$$
\begin{cases}x_1=3+2x_3-4x_4\\x_2=1-2x_3+2x_4\end{cases}
$$

相应齐次线性方程组 $Ax=O$ 的同解方程组为

$$
\begin{cases}x_1=2x_3-4x_4\\x_2=-2x_3+2x_4\end{cases}
$$

分别令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得 $Ax=O$ 的基础解系

$$
\xi_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-4\\2\\0\\1\end{pmatrix}
$$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解

$$\boldsymbol{\eta}^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^* + c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2$ (c_1, c_2 为任意常数).

例 4.12　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$,对 λ 的不同取值,讨论方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

解　对增广矩阵进行初等行变换,得

$$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$$

(1) 若 $\lambda \neq 1$,则

$$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b}) \xrightarrow[\frac{1}{\lambda-1}\times r_3]{\frac{1}{\lambda-1}\times r_2} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 - (r_2 + r_3)} \begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 & 1 & -(\lambda+1) \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \lambda+1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 3 < 4$,所以方程组有无穷多个解.取 x_1 为自由未知量,相应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_2 = 1 + x_1 \\ x_3 = (\lambda+1) + x_1 \\ x_4 = -(\lambda+1) - (\lambda+2)x_1 \end{cases}$$

令 $x_1 = 0$,得一特解

$$\boldsymbol{\eta}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda+1 \\ -(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

相应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ x_4 = -(\lambda+2)x_1 \end{cases}$$

令 $x_1=1$,得基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

于是原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}^*=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-(\lambda+2)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\\lambda+1\\-(\lambda+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\1+c\\(\lambda+1)+c\\-(\lambda+1)-(\lambda+2)c\end{pmatrix},\quad c\text{ 为任意常数}$$

(2) 若 $\lambda=1$,原方程组等价于方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1$$

即 $x_1=1-(x_2+x_3+x_4)$.

该方程有一特解

$$\boldsymbol{\eta}^*=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

相应的齐次方程为

$$x_1=-x_2-x_3-x_4$$

分别令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,得 $x_1=-1$. 从而对应的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

于是,原方程组的通解为

$$x=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+c_3\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\eta}^*=\begin{pmatrix}1-c_1-c_2-c_3\\c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix},\quad c_1,c_2,c_3\text{ 为任意常数}$$

例 4.13 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵,$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$,且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{O})$ 的 3 个解 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 满足

$$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解 因为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$,所以,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系中含有 $3-2=1$ 个解向量.

又因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)=\boldsymbol{A}[(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3)]=\boldsymbol{O}$,所以

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系.

又由 $\boldsymbol{A}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)\right]=\boldsymbol{b}$,知 $\boldsymbol{\eta}^*=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解. 故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+c\boldsymbol{\xi}$($c$ 为任意常数).

例 4.14 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r(r<n)$,$\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{O})$ 的解. 证明:$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_0,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系的充分必要条件是 $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关.

证 必要性 设数组 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-r}$ 使得

$$k_0\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\boldsymbol{O}$$

在上式左边乘以 $\boldsymbol{A}$,由 $\boldsymbol{A\eta}_i=\boldsymbol{b}(i=0,1,2,\cdots,n-r)$,得 $(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{O}$.

因为 $\boldsymbol{b}\neq 0$,所以 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$,或 $k_0=-(k_1+\cdots+k_{n-r})$. 由此可得

$$k_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_0)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_0)=\boldsymbol{O}$$

又因为 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_0,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系,所以线性无关,从而有 $k_1=0,\cdots,k_{n-r}=0$,于是有 $k_0=0$,故 $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关.

充分性 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_i-\boldsymbol{\eta}_0)=\boldsymbol{O}$,知 $\boldsymbol{\eta}_i-\boldsymbol{\eta}_0(i=1,2,\cdots,n-r)$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的解向量.

设数组 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 使得 $k_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_0)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_0)=\boldsymbol{O}$,则

$$-(k_1+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\boldsymbol{O}$$

由于 $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关,所以,只有

$$-(k_1+\cdots+k_{n-r})=0,\quad k_1=0,\cdots,k_{n-r}=0$$

即向量组 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_0,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_0$ 线性无关.

因此,$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_0,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系.

例 4.15 已给四元齐次线性方程组为

$$(\mathrm{I}):\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\2x_1+3x_2-x_3=0\end{cases}$$

另一四元齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$$

(1) 求(Ⅰ)的一个基础解系；

(2) 当 a 为何值时，方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解？在有公共解时，求出全部非零公共解.

解 (1) 先求方程组(Ⅰ)的基础解系. 由于方程组(Ⅰ)的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\2&3&-1&0\end{pmatrix}$$

对其进行初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&-1&-3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-5&3\\0&-1&-3&2\end{pmatrix}$$

由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，取 x_3,x_4 为自由未知量，对应的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=\ \ 5x_3-3x_4\\x_2=-3x_3+2x_4\end{cases}$. 分别令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(5,-3,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(-3,2,0,1)^{\mathrm{T}}$$

(2) 由条件知，方程组(Ⅱ)的全部解为

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2c_1-c_2\\-c_1+2c_2\\(a+2)c_1+4c_2\\c_1+(a+8)c_2\end{pmatrix}\tag{4.8}$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

将其代入(Ⅰ)得

$$\begin{cases}(a+1)c_1=0\\(a+1)c_1-(a+1)c_2=0\end{cases}\tag{4.9}$$

要使(Ⅰ),(Ⅱ)有非零公共解，只需方程组(4.9)有非零解，即

$$\begin{vmatrix}a+1&0\\a+1&-(a+1)\end{vmatrix}=-(a+1)^2=0$$

所以，当 $a=-1$ 时，两方程组有公共的非零解. 代入方程组(4.8)，得全部的非零解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\7\end{pmatrix},\quad c_1,c_2\text{ 是不全为零的常数}$$

利用线性方程组，还可以讨论向量组间的线性关系，或者将一向量用一向量组线性

表示.

例 4.16　给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，试将向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

解　设$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，比较等式两端的对应分量，可得方程组

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

对其增广矩阵进行初等行变换，得

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&2\\1&-1&-1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\r_4+(-1)r_1}]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&1\\2&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+(-1)r_3]{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&-2&1\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(-1/2)r_2]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-1)r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

相应的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=1\\x_2=\dfrac{1}{2}\\x_3=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3$$

例 4.17　设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-b-2,a+2b)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)^{\mathrm{T}}$. 讨论当$a,b$为何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；

(2) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一地线性表示,并求出表示式;

(3) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,但表示不唯一,并求出表示式.

解 设有数x_1,x_2,x_3,使得$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$.

记$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$,对$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta})$施以初等行变换,有

$$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{pmatrix}$$

(1) 当$a=0$,b为任意常数时,$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta})\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&0&-b&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.由于$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta})$,所以方程组无解,故$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

(2) 当$a\neq0$且$a\neq b$时,$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta})=3$,所以方程组有唯一解,其解为

$$x_1=1-\frac{1}{a},\quad x_2=\frac{1}{a},\quad x_3=0$$

故$\boldsymbol{\beta}$可唯一地由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,其表示式为$\boldsymbol{\beta}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2$.

(3) 当$a=b\neq0$时,对$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta})$施以初等行变换,有$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta})\to\begin{pmatrix}1&0&0&1-\frac{1}{a}\\0&1&-1&\frac{1}{a}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.由于$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta})=2$,故方程组有无穷多解,其全部解为$x_1=1-\frac{1}{a}$,$x_2=\frac{1}{a}+k$,$x_3=k$,所以

$$\boldsymbol{\beta}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(\frac{1}{a}+c\right)\boldsymbol{\alpha}_2+c\,\boldsymbol{\alpha}_3,\quad c\text{ 为任意常数}$$

习题四

A 类

1. 求下述齐次线性方程组的基础解系.

$$(1)\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3+x_4=0\\x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0\\3x_1-x_2+2x_3-4x_4=0\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0 \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0 \end{cases}$$

2. 求下述齐次线性方程组的通解.

$$(1)\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4-5x_5=0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1-3x_2+x_3-2x_4=0 \\ -5x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ -x_1-11x_2+2x_3-5x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+x_4=0 \end{cases}$$

3. 讨论 λ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$$

有非零解或仅有零解.

4. 当 a 为何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ ax_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+ax_2=0 \end{cases}$$

有非零解,并求出其解.

5. 设有两个四元齐次线性方程组

$$(\text{I}):\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$$

$$(\text{II}):\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$$

(1) 求线性方程(Ⅰ)的基础解系;

(2) 试问方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零的公共解? 若有,则求出所有的非零公共解;若没有,则说明理由.

6. 求下述非齐次线性方程组的通解(用其导出组的基础解系表示).

$$(1)\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=4 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=8 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=16 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x_1+x_2-2x_4+x_5=-1 \\ -2x_1-x_2+x_3-4x_4+2x_5=1 \\ -x_1+x_2-x_3-2x_4+x_5=2 \end{cases}$$

7. 当 a 为何值时，下面的方程组有解，并求出其解.

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3-x_4=2 \\ 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=a \\ 3x_1-6x_2+4x_3+3x_4=3 \end{cases}$$

8. 已给线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_4=a_3 \\ x_4-x_5=a_4 \\ x_5-x_1=a_5 \end{cases}$$

(1) 试证：所给方程组有解的充分必要条件是 $\sum\limits_{i=1}^{5}a_i=0$；

(2) 在上述方程组有解的情况下，求出方程组的通解.

9. 设

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+x_4=1 \\ x_2+ax_3-ax_4=-1 \\ x_1+2x_2+3x_4=3 \end{cases}$$

问 a 为何值时，该方程组有解？并在有解时求其通解.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3,4)$，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{b}$ 均为 4 维列向量，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$. 若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $(2,1,3,6)^{\mathrm{T}}+c\,(1,-3,2,0)^{\mathrm{T}}$，问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

11. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$. 如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

12. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关解.

(1) 证明：方程组的系数矩阵的秩为 2；

(2) 求 a,b 的值及方程组的通解.

13. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$；

(2) 证明 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与(1)中得到的 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

14. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,t,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(t,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(4,t^2,-4)^{\mathrm{T}}$，若 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法不唯一，求 t 及 $\boldsymbol{\beta}$ 的表达式。

B　类

一、填空题

1. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0 \\ ax_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + (a+2)x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 $a=$________.

2. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解，则 λ 应满足的条件是________.

3. 若线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = -a_3 \\ x_1 + x_4 = a_4 \end{cases}$ 有解，则常数 a_1, a_2, a_3, a_4 应满足条件________.

4. 若线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ 无解，则常数 $a=$________.

5. 若线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 有无穷多个解，则 $\lambda=$________.

6. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 $a_i \neq a_j\,(i \neq j, i, j=1, 2, \cdots, n)$，则方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解是________.

7. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为$\boldsymbol{\eta}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，则该方程的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可取为________.

二、单项选择题

1. 设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 有非零解的充分必要条件是(　　).

A．$r=n$　　B. $r<n$　　C. $r \geqslant n$　　D. $r>n$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 仅有零解的充分必要条件是(　　).

A. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关　　B. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关

C. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关　　D. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则下述两个齐次线性方程组

$$(\mathrm{I}): \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{O}$$
$$(\mathrm{II}): \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{O}$$

的解之间的关系为(　　).

A. 方程组(Ⅰ)和方程组(Ⅱ)为同解方程组

B. 方程组(Ⅱ)的解是方程组(Ⅰ)的解，但方程组(Ⅰ)的解不是方程组(Ⅱ)的解

C. 方程组(Ⅰ)的解不是方程组(Ⅱ)的解，方程组(Ⅱ)的解也不是方程组(Ⅰ)的解

D. 方程组(Ⅰ)的解是方程组(Ⅱ)的解，但方程组(Ⅱ)的解不是方程组(Ⅰ)的解

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n \times m$ 矩阵，则线性方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$(　　).

A. 当 $n>m$ 时仅有零解　　B. 当 $n>m$ 时必有非零解

C. 当 $m>n$ 时仅有零解　　D. 当 $m>n$ 时必有非零解

5. 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵，则必有(　　).

A. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

B. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

C. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

D. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

6. 设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 均为 $m \times n$ 矩阵，现有 4 个命题：

(1) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O}$ 的解，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$

(2) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O}$ 的解

(3) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O}$ 同解，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$

(4) 若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O}$ 同解

以上命题正确的是(　　).

A. (1),(2)　　B. (1),(3)　　C. (2),(4)　　D. (3),(4)

7. 若 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 都是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的解,则系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 应为(　　).

A. $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&0\\3&2&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&2&0\end{pmatrix}$

8. 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系,k_1,k_2 为任意常数,则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为(　　).

A. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　B. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

C. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　D. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 对应的齐次线性方程组,则下列结论正确的是(　　).

A. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 只有零解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

B. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 有非零解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解

C. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 只有零解

D. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 有非零解

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$R(\boldsymbol{A})=r$,则(　　).

A. $r=m$ 时,非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解

B. $r=n$ 时,非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

C. $m=n$ 时,非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

D. $r<n$ 时,非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是一个 n 维列向量,若 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})$,则线性方程组(　　).

A. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有无穷多个解　　B. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有唯一解

C. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$ 仅有零解　　D. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$ 必有非零解

12. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量,且 $R(\boldsymbol{A})=3$,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$c$ 为任意常数,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=$(　　).

A. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$;　　B. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$;　　C. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$;　　D. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

13. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$，若 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_4$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的互不相等的解，则相应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系(　　).

A. 不存在　　B. 仅含一个非零解向量

C. 含有两个线性无关的解向量　　D. 含有三个线性无关的解向量

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个线性无关的解，k_1，k_2 为任意常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为(　　).

A. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$　　B. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$

C. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$　　D. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$

15. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为其伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系为(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$　　C. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$

16. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是(　　).

A. 任一行向量都是非零向量　　B. 任一列向量都是非零向量

C. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解　　D. 当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{O}$ 时，$\boldsymbol{Ax}\neq\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$

三、计算或证明下列各题

1. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量都是方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

的解.

(1) 求 λ 的值；

(2) 证明 $|\boldsymbol{B}|=0$.

2. 对 λ 的不同取值，讨论方程组

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3 \end{cases}$$

何时无解、有唯一解、有无穷多个解.

3. 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0 \\ \qquad\vdots \\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0 \end{cases} \quad (n\geqslant2)$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

4. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$$

(1) 问 a,b 为何值时,方程组有解;

(2) 方程组有解时,求出方程组导出组的一个基础解系;

(3) 方程组有解时,求出方程组的全部解.

5. 已知方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ ax_1+x_2+(a-1)x_3=a-1 \\ x_1+ax_2+x_3=1 \end{cases}$$

讨论:a 取何值时方程组无解? a 取何值时方程组有解? 在有解时,求其通解.

6. 对线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$$

讨论 λ 取何值时,方程组无解、有唯一解和有无穷多个解.在方程组有无穷多个解时,试用其导出组的基础解系表示出全部解.

7. 设线性方程组

$$(\text{Ⅰ}):\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

与方程

$$(\text{Ⅱ}):x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

8. 已知齐次线性方程组

$$(\text{Ⅰ}):\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$$

和

$$(\text{Ⅱ}):\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值.

9. 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax + 2by + 3c = 0$$
$$l_2: bx + 2cy + 3a = 0$$
$$l_3: cx + 2ay + 3b = 0$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1) 求 λ,a 的值；

(2) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

11. 设 3 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(1) 求 a；

(2) 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

12. 已知 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0\\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0\\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1\end{cases}$$

的一个解. 试求方程组的通解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示；

13. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(1) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$；

(2) 当实数 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，并求其通解.

第 5 章

矩阵的特征值与特征向量

第 3 章介绍了$\mathbf{R}^n$ 中的向量和向量之间的线性运算、向量(组)的线性相关性以及向量组的极大线性无关组和秩.本章将进一步讨论向量和矩阵,先介绍一般向量空间的概念和向量的一种乘法运算——内积(或数量积),然后介绍矩阵的特征值和特征向量,并在此基础上引入矩阵之间的一种重要关系——相似,最后讨论矩阵的对角化问题.

本章中所涉及的向量的加法和数乘法,若无特殊说明,均与第 3 章相同.

*5.1 向量空间

本节主要介绍向量空间有关的基本概念.

5.1.1 向量空间的概念与性质

定义 5.1 设 V 是 n 维向量的集合,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ 是 V 中的任意两个向量. 若$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$,则称 V 对于加法运算是封闭的;若 $\lambda\in\mathbf{R}$,且有 $\lambda\boldsymbol{\alpha}\in V$,则称 V 对于数乘运算是封闭的.

定义 5.2 设 V 是 n 维向量的集合,$V\neq\varnothing$,若 V 对于 n 维向量的加法和数乘运算是封闭的,则称 V 是$\mathbf{R}$上的一个向量空间.

由于$\mathbf{R}^n$ 和只有零向量组成的集合$\{\boldsymbol{O}\}$关于加法和数乘运算是封闭的,所以,$\mathbf{R}^n$ 和$\{\boldsymbol{O}\}$都是向量空间.

例 5.1 讨论集合 $V=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,0)^{\mathrm{T}}\mid x_1,x_2\in\mathbf{R}\}$是否构成一个向量空间.

解 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,0)^{\mathrm{T}}\in V$,则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,0)^{\mathrm{T}}\in V$$

对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$,有

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda a_1,\lambda a_2,0)^{\mathrm{T}}\in V$$

即 V 对于$\mathbf{R}^3$ 中的加法和数乘运算都是封闭的,从而 V 构成一个向量空间.

实际上,此例中的 V 是空间直角坐标系中的 xOy 坐标平面. 同样,$U=\{\boldsymbol{x}=(x_1,0,x_3)^{\mathrm{T}}$

$|x_1,x_3\in\mathbf{R}\}$和 $W=\{\boldsymbol{x}=(0,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}|x_2,x_3\in\mathbf{R}\}$也是向量空间，它们分别表示空间直角坐标系中的 xOz 和 yOz 坐标平面.

读者可以验证：集合$\{\boldsymbol{x}=(x_1,0,0)^{\mathrm{T}}\mid x_1\in\mathbf{R}\}$，$\{\boldsymbol{x}=(0,x_2,0)^{\mathrm{T}}\mid x_2\in\mathbf{R}\}$和$\{\boldsymbol{x}=(0,0,x_3)^{\mathrm{T}}|x_3\in\mathbf{R}\}$也是向量空间，它们分别表示空间直角坐标系中的 x,y,z 坐标轴.

例 5.2 讨论集合 $V=\{\boldsymbol{x}=(1,x_2,x_3,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}|x_i\in\mathbf{R},i=2,3,\cdots,n\}$是否构成一个向量空间.

解 设$\boldsymbol{\alpha}=(1,a_2,a_3,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,b_2,b_3,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in V$，则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(2,a_2+b_2,a_3+b_3,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}\notin V$$

若 $\lambda\neq1$，则 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda,\lambda a_2,\lambda a_3,\cdots,\lambda a_n)^{\mathrm{T}}\notin V$. 可见，$V$ 对于向量的加法和数乘运算是不封闭的，从而 V 不构成向量空间.

由定义 5.1 可以推出向量空间 V 的如下几个性质：

1. 在向量空间 V 中，零向量是唯一的.

事实上，若 $\boldsymbol{O}_1$ 与 $\boldsymbol{O}_2$ 都是 V 的零向量，则有 $\boldsymbol{O}_1=\boldsymbol{O}_1+\boldsymbol{O}_2=\boldsymbol{O}_2$.

2. 在向量空间 V 中每一向量的负向量是唯一的.

事实上，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$，若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 都是$\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量，即有$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{\alpha}_1+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$.

3. 在 V 中，有

(1) $0\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$;

(2) $k\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$;

(3) $k(-\boldsymbol{\alpha})=(-k)\boldsymbol{\alpha}=-k\boldsymbol{\alpha}$.

4. 在向量空间 V 中，如果 $k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$，则 $k=0$ 或$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$.

事实上，若 $k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$，而 $k\neq0$，那么$\frac{1}{k}(k\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{k}\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$. 又$\frac{1}{k}(k\boldsymbol{\alpha})=\left(\frac{1}{k}k\right)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，故$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$.

例 5.3 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是一已知向量组，记

$$V=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m,\lambda_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,m\}$$

证明：V 构成一个向量空间.

证 设$\boldsymbol{\xi}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m\in V$，$\boldsymbol{\eta}=\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\mu_m\boldsymbol{\alpha}_m\in V$，则

$$\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}=(\lambda_1+\mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2+\mu_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\lambda_m+\mu_m)\boldsymbol{\alpha}_m\in V$$

又对任意的 $k\in\mathbf{R}$，有

$$k\boldsymbol{\xi}=(k\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k\lambda_m)\boldsymbol{\alpha}_m\in V$$

因此，V 构成一个向量空间.

此例中的向量空间称为由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的向量空间，常记为 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$. 如空间直角坐标系中的 xOy 坐标平面就是由向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 和$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 生成的向量空间.

定理 5.1　设 V 是由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的向量空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 V 等价.

证　由于 $V=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，由定义知，$V$ 中任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示. 又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in V$，所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 V 线性表示. 因而，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 V 等价.

定理 5.2　两个等价的向量组生成相同的向量空间.

证　设两个等价的向量组分别为

$$(\text{I}):\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l;$$

$$(\text{II}):\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$$

由它们生成的向量空间分别为 V_1,V_2.

由定理 5.1 知，V_1 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$ 等价，又因为两向量组(Ⅰ)，(Ⅱ)等价，由等价的传递性可知，V_1 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价，即 V_1 中的向量都是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的线性组合，因而

$$V_1\subseteq V_2$$

同理可证 $V_2\subseteq V_1$. 故 $V_1=V_2$.

根据前面的结论，一向量组与其极大线性无关组是等价的，从而向量组与其极大线性无关组生成相同的向量空间.

5.1.2　向量空间的基与维数

定义 5.3　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 中的 r 个向量，若

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

(2) V 中任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一个基(或基底)，r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间.

向量空间 V 的维数通常用 $\dim V$ 来表示.

注　若向量空间 V 没有基，则 V 的维数为 0，0 维向量空间只含零向量 $\boldsymbol{O}$. 由于 $\mathbf{R}^n$ 中的每一个向量都可由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性表示，而且 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关，所以，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，故 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维向量空间，即 $\dim\mathbf{R}^n=n$. 又由于任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 都可以唯一地表示为 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$，因此，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 通常称为 $\mathbf{R}^n$ 的标准基，而 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标.

一般地，我们有下面的结论：

定理 5.3　向量空间 V 的任一个向量由 V 的一个基线性表示时，其表示法是唯一的.

证　设 V 是一个 r 维向量空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V 的一个基，$\boldsymbol{\alpha}\in V$. 若

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

则有 $(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_r-l_r)\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{O}$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，所以只有 $k_i-l_i=0$，即 $k_i=l_i(i=1,2,\cdots,r)$.

定义 5.4　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一个基，对每一个向量 $\boldsymbol{x}\in V$，都可唯一地表

示为

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r,\quad x_i \in \mathbf{R},\quad i = 1,2,\cdots,r$$

有序数组 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标，记为 $(x_1,x_2,\cdots,x_r)$.

注 利用矩阵的乘法，$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}$.

由前面的讨论和定义 5.4 可知，向量空间 V 的基取定后，V 中的向量与其坐标是一一对应的.

按照定义，零向量的坐标为 $(0,0,\cdots,0)$.

由向量空间和基的定义不难看出：

(1) 一个向量空间实际上是由其基生成的；

(2) 若向量空间 V 是由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一个极大线性无关组都构成向量空间 V 的一个基.

事实上，设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组，从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示，而向量空间 V 是由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的，所以 V 中的任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示. 按照定义，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 构成向量空间 V 的一个基.

(3) 若 V 是一 r 维向量空间，则 V 中任意 r 个线性无关的向量都构成 V 的一个基. 如 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基.

事实上，若 $\dim V=r$，则 V 中任一由多于 r 个向量组成的向量组都线性相关. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V 中的任意 r 个线性无关的向量，而 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 V 中的任一向量，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，从而 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示. 由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性知，V 中的任一向量都可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V 的一个基.

(4) 向量空间的任意两个基等价.

事实上，设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是 r 维向量空间 V 的两个基，由(1)和定理 5.1 知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 都与 V 等价，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 等价.

5.1.3 过渡矩阵

定义 5.5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的两个基，若

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= t_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + t_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + t_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\beta}_2 &= t_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + t_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + t_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n\\ &\vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n &= t_{n1}\boldsymbol{\alpha}_1 + t_{n2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + t_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{aligned}$$

或写成矩阵形式

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

则矩阵 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵.

同样,若

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$为由基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的过渡矩阵.

由于

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}\\ &=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

从而

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$$

所以,过渡矩阵是可逆的.由此有下面的结论:

定理 5.4　设 $\boldsymbol{T}$ 为由 $\mathbf{R}^n$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵,则 $\boldsymbol{T}$ 可逆,而且由基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}^{-1}$.

$\boldsymbol{T}$ 的可逆性也可用下面的思路来证明：若 $\boldsymbol{T}$ 不可逆，则 $|\boldsymbol{T}|=0$，从而齐次线性方程组 $\boldsymbol{Tx}=\boldsymbol{O}$ 有非零解 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，由此可得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{Tx}=\boldsymbol{O}$$

即$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性相关，故产生矛盾，于是 $\boldsymbol{T}$ 是可逆矩阵.

例 5.4 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，$\boldsymbol{T}$ 是一 n 阶可逆矩阵，则向量组 $\boldsymbol{T\alpha}_1,\boldsymbol{T\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{T\alpha}_n$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基.

证 因为矩阵 $\boldsymbol{T}$ 可逆，所以

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{T\alpha}_1,\boldsymbol{T\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{T\alpha}_n)=\mathrm{R}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)]=n$$

于是，$\boldsymbol{T\alpha}_1,\boldsymbol{T\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{T\alpha}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个基.

由定理 5.3 和例 5.4 可得结论：若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，$\boldsymbol{T}$ 是一 n 阶方阵，则$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{T}$ 可逆.

上述的讨论表明，任一个 n 阶可逆矩阵都可作为向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的某两个基之间的过渡矩阵.

由定理 5.3 知，当向量空间的基取定后，该向量空间中的任一向量都可以由其坐标唯一表示出来，但同一向量在不同基下的坐标是不同的. 如向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3$ 在基 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标是$(1,1,1)$，而在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标是$(0,0,1)$. 下面讨论向量的不同坐标之间的关系.

定理 5.5 设向量组

$$(\mathrm{I}):\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n;\quad(\mathrm{II}):\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$$

是 $\mathbf{R}^n$ 的两个基，而且由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}$. 若$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$ 在两个基(Ⅰ)，(Ⅱ)下的坐标分别为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

证 由已知条件，有

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}$$

由此得到

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

由表示法的唯一性，得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，或 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

例 5.5　设 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^4$，且其在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下的坐标为(1,3,2,6)，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标.

解　两个基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 的关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\\\boldsymbol{\varepsilon}_3=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\\\boldsymbol{\varepsilon}_4=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4\end{cases}$$

或

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

即由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标为 (y_1,y_2,y_3,y_4)，由定理 5.5，知

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\\6\end{pmatrix}$$

例 5.6　已知 $\mathbf{R}^4$ 的两个基为

$$(\mathrm{I}):\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,1)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1,2)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,3,1)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}\end{cases},\quad (\mathrm{II}):\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_3=(0,0,3,2)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_4=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

(1) 求由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵 $\boldsymbol{T}$;

(2) 求$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3-5\boldsymbol{\beta}_4$在基(Ⅰ)下的坐标.

解 (1) 先求标准正交基 E:$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 到基(Ⅰ),(Ⅱ)的过渡矩阵:

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

设由 E 到基(Ⅰ),(Ⅱ)的过渡矩阵分别为 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2$,则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{T}_1$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{T}_2$$

所以,由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)满足$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{T}_2$.

而 $\boldsymbol{T}_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&1&3&1\\1&2&1&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{T}_2=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&3&1\\0&0&2&1\end{pmatrix}$,所以

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{T}_2=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-2&-1&0&0\\3&1&2&1\\-9&-4&-3&-2\end{pmatrix}$$

(2) 由题设条件,知$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3-5\boldsymbol{\beta}_4=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-5\end{pmatrix}$.

若设$\boldsymbol{\beta}$在基(Ⅰ)下的坐标为(x_1,x_2,x_3,x_4),则有

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\-6\end{pmatrix}$$

即$\boldsymbol{\beta}$在基(Ⅰ)下的坐标为$(2,-3,1,-6)$.

注 借助于第 2 章介绍的解矩阵方程的方法,$\mathbf{R}^n$ 中两个基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$间的过渡矩阵 $\boldsymbol{T}$ 也可用下面的方法求出:

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$,由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AT}$,得

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

由第 2 章的结论，只需对$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})$实施初等行变换，得

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})\xrightarrow{\text{经过初等行变换}}(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$$

即可得到过渡矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

例 5.7　已知$\mathbf{R}^3$的两个基：

$$(\mathrm{I}):\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathrm{II}):\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

求基(Ⅰ)到(Ⅱ)的过渡矩阵.

解　$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&1&1\\0&0&1&2&1&-1\\0&1&1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&0&1\\0&0&1&2&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+(-1)r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&1\\0&0&1&2&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+(-1)r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&2&1&-1\end{array}\right)$$

所以，(Ⅰ)到(Ⅱ)的过渡矩阵为$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

*5.1.4　子空间

由向量空间的定义知，集合

$$V=\{(0,0,x_3,x_4,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},\quad i=3,4,\cdots,n\}$$

是一个向量空间，显然，V 是$\mathbf{R}^n$的一个子集.

定义 5.6　设 V 是一个向量空间，向量组 $V_1\in V(V_1\neq\varnothing)$是 V 的一个子集，若 V_1 本身也是一向量空间，则称 V_1 是 V 的一个子空间.

按照定义，$\{\boldsymbol{O}\}$，V 都是 V 的子空间，称为平凡子空间，其他的子空间称为非平凡子空间，简称子空间. 如 $V=\{(0,0,x_3,x_4,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=3,4,\cdots,n\}$是$\mathbf{R}^n$的一个(非平凡)子空间，且由于 $\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一个基，从而 $\dim V=n-2$，即 V 是$\mathbf{R}^n$的一个 $n-2$ 维子空间.

注意，并非一向量空间的所有子集都构成子空间，如

$$V=\{\boldsymbol{x}=(1,x_2,x_3,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},\quad i=2,3,\cdots,n\}$$

不构成向量空间. 向量空间满足什么条件的子集才构成子空间呢？

定理 5.6　设 V 是一个向量空间，向量组 $V_1\in V$，$V_1\neq\varnothing$是 V 的一个子集，若 V_1 对 V

中定义的加法运算和数乘运算都封闭，则 V_1 是 V 的一个子空间.

定理 5.7 设 W 是向量空间 V 的一个非空子集，则 W 是 V 的一个子空间的充分必要是对于任意的 $a,b\in\mathbf{R}$和任意的$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$，都有 $a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}\in W$.

证 必要性 如果 W 是 V 的子空间，那么由于 W 对于向量的数乘运算是封闭的，所以对于任意的 $a,b\in\mathbf{R}$和任意的$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$，都有 $a\boldsymbol{\alpha}\in W,b\boldsymbol{\beta}\in W$. 又因为 W 对于 V 的加法也是封闭的，所以 $a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}\in W$.

充分性 若对于任意的 $a,b\in\mathbf{R}$和任意的$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$，都有 $a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}\in W$，取 $a=b=1$，就有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W$；取 $b=0$，就有 $a\boldsymbol{\alpha}\in W$. 这就证明了 W 对于 V 的加法和数乘法是封闭的，从而 W 构成 V 的子空间.

按照定义，若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in V$，则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的向量空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$是 V 的一个子空间.

例 5.8 讨论$\mathbf{R}^n$ 的下列子集合：

$$V_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n\,|\,x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$$

$$V_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n\,|\,x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$$

是否构成$\mathbf{R}^n$ 的子空间.

解 在 V_1 中任取两个向量$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\quad y_1+y_2+\cdots+y_n=0$$

所以，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\begin{aligned}&(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)\\=&(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)\\=&0+0=0\end{aligned}$$

即$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1$.

又对任意常数 λ，有 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)^{\mathrm{T}}$，且满足

$$\lambda x_1+\lambda x_2+\cdots+\lambda x_n=\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0$$

即 $\lambda\boldsymbol{\alpha}\in V_1$.

因此，V_1 构成$\mathbf{R}^n$ 的一个子空间.

任取$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in V_2$，则有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1,\quad y_1+y_2+\cdots+y_n=1$$

于是，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}}$，且

$$\begin{aligned}&(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)\\=&(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)\\=&1+1=2\neq1\end{aligned}$$

即$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_2$.

同理，若 $\lambda \neq 1$，则

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \cdots + \lambda x_n = \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \neq 1$$

即 $\lambda\boldsymbol{\alpha} \notin V_2$.

故 V_2 不是$\mathbf{R}^n$ 的一个子空间.

例 5.9 设 $\boldsymbol{A}$ 为一 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量，由齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的解向量构成的集合为 S，证明：S 是$\mathbf{R}^n$ 的一个子空间.

证 由于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 一定有零解，所以，$S \neq \varnothing$.

若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in S$，即 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{O}$，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A\alpha}+\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$$

即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in S$.

又对任意常数 λ 和 $\boldsymbol{\alpha} \in S$，有

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\boldsymbol{A\alpha} = \lambda(\boldsymbol{A\alpha}) = \lambda \cdot \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}$$

即 $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in S$.

故 S 是$\mathbf{R}^n$ 的一个子空间. 此空间通常称为齐次线性方程组的解空间.

由于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的任一解都可表示为它的基础解系的线性组合，设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系，那么对任意的$\boldsymbol{\alpha} \in S$，$\boldsymbol{\alpha}$ 可表示为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$的线性组合，即$\boldsymbol{\alpha} \in L(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r})$. 于是 S 包含于生成子空间 $L(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r})$中，即

$$S \subseteq L(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r})$$

反之，任取$\boldsymbol{\beta} \in L(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r})$，设

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}, k_i \text{ 为常数}, \quad i = 1,2,\cdots,n-r$$

那么，$\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r})=\boldsymbol{O}$，即$\boldsymbol{\beta} \in S$. 因而 $L(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}) \subseteq S$. 故

$$S = L(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r})$$

即齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的解空间是由其基础解系生成的$\mathbf{R}^n$ 的子空间，而且由线性方程组解的结构知：若齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则其解空间是$\mathbf{R}^n$ 的一个 $n-r$ 维子空间.

5.2 向量的内积与正交性

在第 3 章中，介绍了向量的线性运算，即加法运算和数乘运算. 本节将引入向量的一种乘法运算——内积.

我们知道，在几何空间$\mathbf{R}^3$ 中，两个非零向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$的内积定义为

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] = |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\theta$$

其中$|\boldsymbol{\alpha}|$，$|\boldsymbol{\beta}|$分别表示$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$的长度，θ为$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的夹角. 而当建立空间直角坐标系后，若$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$的坐标分别为(x_1,x_2,x_3)，(y_1,y_2,y_3)，则$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$.

对n维向量，我们定义内积如下.

定义 5.7 设有n维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，数$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$称为向量$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$的内积，记为$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$，即

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

向量$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$的内积又称为数量积或点积.

将列向量视为列矩阵，行向量视为行矩阵，则可用矩阵的乘积来表示向量的内积. 若$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$为定义 5.7 中的n维列向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$$

若$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$为$n$维行向量，则

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$$

例如，若$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,2,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(3,1,0,6)^{\mathrm{T}}$，则

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1\times3+0\times1+2\times0+5\times6=3+0+0+30=33$$

由内积的定义，若$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$为n维向量，λ为实数，不难得到内积所遵循的运算规律：

(1) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$；

(2) $[(\lambda\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha},(\lambda\boldsymbol{\beta})]=\lambda[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$；

(3) $[\boldsymbol{\alpha},(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]+[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]$，$[(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\gamma}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$；

(4) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]\geqslant0$；$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=0$的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$.

注 由于只要$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{O}$，就有$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]>0$，所以，常将$\sqrt{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]}$定义为向量$\boldsymbol{\alpha}$的模或长度，记为$\|\boldsymbol{\alpha}\|$. 模为 1 的向量称为单位向量. 如$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\cdots,\boldsymbol{e}_n\in\mathbf{R}^n$都是单位向量. 对任一$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{O}$，向量$\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}$为单位向量，称为将$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{O}$单位化所得的向量.

定义 5.8 若$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$，则称向量$\boldsymbol{\alpha}$与向量$\boldsymbol{\beta}$正交，记为$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$. 若非零向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意两个向量都正交，则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$为一个正交向量组，简称正交向量组.

注 零向量与任意向量正交.

定理 5.8 不含零向量的正交向量组一定是线性无关向量组.

证 设向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$为一正交向量组，$\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{O}$，$i=1,2,\cdots,m$. 令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$$

作内积

$$[\boldsymbol{\alpha}_i,(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)]=k_i[\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i]=0,\quad i=1,2,\cdots,m$$

由于$[\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i]>0(i=1,2,\cdots,m)$，从而$k_i=0(i=1,2,\cdots,m)$. 于是，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

注 线性无关向量组不一定是正交向量组.

例如，向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,\cdots,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,\cdots,0)\in\mathbf{R}^n$，显然，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，但由于$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=1\neq0$，所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交；又如，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\in\mathbf{R}^n$ 是线性无关向量组，但不是正交向量组，如$[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2]=(1,0,0,\cdots,0)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=1\neq0$.

定义 5.9　如果 n 维向量空间 V 的一个正交向量组含有 n 个向量，那么称这个正交向量组是 V 的一个正交基. 若正交基中每一个向量都是单位向量，则称它为标准正交基.

由于 $e_1,e_2,\cdots,e_n\in\mathbf{R}^n$，$[e_i,e_j]=0(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，所以 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 构成一正交向量组，又因 $\|e_i\|=1(i=1,2,\cdots,n)$，因此，$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 称为$\mathbf{R}^n$ 的单位正交基或标准正交基.

一般地，若$\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\cdots,\boldsymbol{\omega}_n$ 为 n 维向量空间 V 的一个标准正交基，$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\omega}_1+a_2\boldsymbol{\omega}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\omega}_n$，$\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\omega}_1+b_2\boldsymbol{\omega}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{\omega}_n$，则

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]&=[(a_1\boldsymbol{\omega}_1+a_2\boldsymbol{\omega}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\omega}_n),(b_1\boldsymbol{\omega}_1+b_2\boldsymbol{\omega}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{\omega}_n)]\\&=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\end{aligned}$$

即在标准正交基下，两向量的内积等于它们对应坐标乘积的和.

下面我们讨论如何由线性无关向量组得到正交向量组.

定义 5.10　设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，由此向量组构造一个向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$，使得

(1) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$两两正交；

(2) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 等价，

称该过程为将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 正交化的过程. 若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$均为单位向量，则该过程称为将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 正交规范化.

下面介绍将一线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 正交化的方法——施密特正交化方法.

施密特正交化方法的步骤：

(1) 令$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$；

(2) 令$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k_1\boldsymbol{\beta}_1$，为使$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]=0$，即有

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]+k_1[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]=0$$

只需 $k_1=-\dfrac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}$，于是

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1$$

(3) 令$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$，因为$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]=0$，为使$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3]=0$，$[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=0$，即

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]+l_1[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]=0,\quad [\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]+l_2[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]=0$$

只需 $l_1=-\dfrac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}, l_2=-\dfrac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}$,于是

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2$$

(4) 令

$$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_i]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_i]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{\beta}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_i]}{[\boldsymbol{\beta}_{i-1},\boldsymbol{\beta}_{i-1}]}\boldsymbol{\beta}_{i-1},\quad i=1,2,\cdots,m$$

由数学归纳法,知$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$构成一个正交向量组,且由$\boldsymbol{\beta}_i$的表达式看出,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 等价.

若再令$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\hat{\boldsymbol{\beta}}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},\cdots,\hat{\boldsymbol{\beta}}_m=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_m}{\|\boldsymbol{\beta}_m\|}$,此步即为将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$单位化,则$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1,\hat{\boldsymbol{\beta}}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol{\beta}}_m$ 为一标准正交向量组.

如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维向量空间 V 的基,则按上述步骤得到的$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1,\hat{\boldsymbol{\beta}}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$ 为 V 的标准正交基.

例 5.10 将 $\mathbf{R}^4$ 的一个基$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 化为标准正交基.

解 取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}\times(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{2},1,0,-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2\\&=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}-\frac{0}{2}\times(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2},1,0,-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}\\&=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_4&=\boldsymbol{\alpha}_4-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_4]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_4]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]}{[\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_3]}\boldsymbol{\beta}_3\\&=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}\times(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\&\quad\times\left(\frac{1}{2},1,0,-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}\\&=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$为一正交组.

又取

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\left(\sqrt{\frac{1}{6}},\sqrt{\frac{2}{3}},0,-\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_4=\frac{\boldsymbol{\beta}_4}{\|\boldsymbol{\beta}_4\|}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

则$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1,\hat{\boldsymbol{\beta}}_2,\hat{\boldsymbol{\beta}}_3,\hat{\boldsymbol{\beta}}_4$ 构成 $\mathbf{R}^4$ 的一个标准正交基.

由施密特正交化方法知,任一非零向量空间都有正交基,从而有标准正交基.

定义 5.11　设 V 是一个 n 维实向量空间,如果对于 V 中任意一对向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,有一个唯一确定的记为$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$的实数与它们对应,并且满足如下条件:

(1) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$;

(2) $[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$;

(3) $[k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=k[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$;

(4) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]\geqslant 0$,等号当且仅当$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$时成立,

其中$\boldsymbol{\gamma}$是 V 中的任意向量,k 为任意实数,那么称$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$为向量$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 的内积. 此时称 V 对于如此定义的内积构成一个欧几里得(Euclid)空间(简称欧氏空间).

例 5.11　对于$\mathbf{R}^n$ 中任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$,定义

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

可以验证如此定义的内积满足定义 5.11 的所有条件,因此$\mathbf{R}^n$ 在此内积下构成一个欧氏空间.

下面我们给出欧氏空间中的一个重要不等式.

定理 5.9　设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$是欧氏空间中的任意两个向量,则有

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2\leqslant[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}][\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}]$$

当且仅当$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时等号成立.

证　设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关,则$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$,或者$\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$,此时均有

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}][\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}]$$

若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性无关,则对于任意实数 k,$k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{O}$. 于是

$$[k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}]>0$$

即有

$$k^2[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]+2k[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}]>0$$

因此,该不等式左端关于 k 的二次三项式的判别式满足

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2-[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}][\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}]<0$$

即

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2 < [\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}][\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}]$$

若在$\mathbf{R}^n$中按照例 5.11 定义内积,则不等式为

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

这就是柯西(Cauchy)不等式.

下面,我们定义欧氏空间中两个向量的夹角.

定义 5.12 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$是欧氏空间 V 的两个非零向量,满足等式

$$\cos\theta = \frac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\ \|\boldsymbol{\beta}\|}$$

的 θ 称为$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 的夹角.

由定理 5.9 知,$-1\leqslant\dfrac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\ \|\boldsymbol{\beta}\|}\leqslant 1$,若取 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,则 θ 是唯一的.

定义 5.12 表明,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$非零时,有

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] = \|\boldsymbol{\alpha}\|\ \|\boldsymbol{\beta}\|\cos\theta,\quad \theta\text{ 为}\boldsymbol{\alpha}\text{ 与}\boldsymbol{\beta}\text{ 的夹角.}$$

这样一般欧氏空间的内积表示形式与几何空间$\mathbf{R}^3$ 中内积的表示形式是统一的.

在 5.1.3 节中,我们讨论了一个基到另一个基的过渡矩阵. 现设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是 n 维欧氏空间 V 的两个标准正交基,令

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{U},$$

其中

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

由于

$$[\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j] = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j] &= \left[\sum_{k=1}^n u_{ki}\,\boldsymbol{\alpha}_k, \sum_{l=1}^n u_{lj}\,\boldsymbol{\alpha}_l\right] \\ &= \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n u_{ki}u_{lj}[\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_l] \\ &= \sum_{k=1}^n u_{ki}u_{kj}\end{aligned}$$

因而

$$\sum_{k=1}^{n} u_{ki}u_{kj} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

上式说明,$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行元素与 $\boldsymbol{U}$ 的第 j 列对应元素乘积的和,当 $i=j$ 时等于 1,$i\neq j$ 时等于 0,即有

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{E}$$

或者

$$\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$$

定义 5.13　$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵,如果

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为一个正交矩阵.

按照此定义,单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 是正交矩阵.

由定义 5.13 及前面的讨论,有下面的定理.

定理 5.10　n 维欧氏空间 V 的一个标准正交基到另一个标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵.

n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量、列向量都是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量,判定 $\boldsymbol{A}$ 是否为正交矩阵,只要看 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个行(列)向量与它自身的内积(即第 i 行元素的平方和)是否为 1,而第 i 个行(列)向量与第 $j(j\neq i)$ 个行(列)向量的内积是否为 0 即可. 即方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量组为标准正交向量组.

由正交矩阵的定义,不难得到正交矩阵的如下简单性质:

(1) 正交矩阵是可逆矩阵,并且其逆矩阵也是正交矩阵;

(2) 正交矩阵的行列式为 1 或 -1;

事实上,由定义 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$,两边取行列式即得.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

事实上,$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵,那么 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 由 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$,得 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 而 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}$. 于是,$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=1\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$. 故 $\boldsymbol{A}^*$ 是正交矩阵.

(4) 正交矩阵之积仍为正交矩阵.

定理 5.11　设 $\boldsymbol{U}=(u_{ij})_{n\times n}$ 是正交矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是标准正交基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{U}$$

那么 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 也是标准正交基.

定理 5.11 说明,由一个正交矩阵和一个标准正交基可确定另一个标准正交基.

请读者推导一个向量在不同标准正交基下的坐标之间的关系.

5.3 矩阵的特征值和特征向量

特征值与特征向量是非常重要的概念，其内容也极为丰富. 它不仅在讨论方阵对角化的问题中起着实质的作用，而且在数学的其他分支以及工程技术、经济管理等各个领域都有广泛应用.

5.3.1 特征值与特征向量的概念

先看一个例子：发展与环保问题.

为了定量分析工业发展与环境污染的关系，某地区提出如下增长模型：设 x_0 是该地区目前的污染损耗，y_0 是该地区目前的工业产值. 一个发展周期后的污染损耗和工业产值分别记为 x_1 和 y_1，它们之间的关系是

$$x_1=\frac{8}{3}x_0-\frac{1}{3}y_0,\quad y_1=-\frac{2}{3}x_0+\frac{7}{3}y_0$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{7}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\text{或}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{7}{3}\end{pmatrix}$$

若当前水平为$\boldsymbol{\alpha}_0=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{7}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

即$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0=2\boldsymbol{\alpha}_0$. 依次可得 n 个发展周期后的污染损耗和工业产值：

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0=2^2\boldsymbol{\alpha}_0,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=2^n\boldsymbol{\alpha}_0$$

这里 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0=2\boldsymbol{\alpha}_0$ 是关键：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘以向量$\boldsymbol{\alpha}_0$ 等于用一个数乘以向量$\boldsymbol{\alpha}_0$，从而利用它可使问题得以简化.

定义 5.14 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果数 λ 和 n 维非零列向量$\boldsymbol{\alpha}$，使

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\tag{5.1}$$

成立，则称数 λ 为方阵$\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，非零列向量$\boldsymbol{\alpha}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值λ 的特征向量

(或称为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量).

例 5.12　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量，求参数 a,b 及特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值.

解　设特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值为 λ，则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，即

$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix}-1\\a+2\\b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}$$

解得 $\lambda=-1,a=-3,b=0$.

现在我们要问，是否每个方阵都有特征值和特征向量？如果有，又如何求出它的特征值和特征向量？

显然，(5.1)式可改写为

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O} \tag{5.2}$$

这表明 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的一个非零解. 由齐次线性方程组有非零解的充分必要条件知，其系数矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的行列式等于零，即

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0 \tag{5.3}$$

由行列式定义可知，(5.3)式的左端 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 是 λ 的 n 次多项式，记作 $f(\lambda)$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. 矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵. (5.3)式是以 λ 为未知数的一元 n 次方程，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.

根据代数学基本定理，特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 在复数范围内有 n 个根(k 重根算作 k 个根)，这 n 个根就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. 将特征值 λ 代入(5.2)式所得齐次线性方程组必有非零解，所有的非零解就是对应于特征值 λ 的所有特征向量.

5.3.2　特征值和特征向量的计算

求 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的步骤：

(1) 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$；

(2) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的全部根，即为 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值；

(3) 对于 A 的每一个特征值 $\lambda=\lambda_0$，求解齐次线性方程组 $(\lambda_0 E-A)x=O$，设它的一个基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，则 A 的对应于特征值 λ_0 的全部特征向量为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是不全为零的常数.

例 5.13 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 因为 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

所以 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(E-A)x=O$. 由

$$E-A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+2x_3=0\end{cases}$$

从而求得基础解系 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$. 所以矩阵 A 的对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的全部特征向量为

$$k_1\alpha_1,\quad k_1\text{ 是不为零的常数}$$

对于 $\lambda_3=2$，解齐次线性方程组 $(2E-A)x=O$. 由

$$2E-A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\4&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 所以矩阵 A 的对应于特征值 $\lambda_3=2$ 的全部特征向量为

$$k_2\alpha_2,\quad k_2\text{ 是不为零的常数}$$

例 5.14 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 因为 A 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & -3\\ -3 & \lambda+5 & -3\\ -6 & 6 & \lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & 0\\ -3 & \lambda+5 & \lambda+2\\ -6 & 6 & \lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & 0\\ 3 & \lambda-1 & 0\\ -6 & 6 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=4$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=-2$,解齐次线性方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$. 由

$$-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -3\\ -3 & 3 & -3\\ -6 & 6 & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$ 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2,\quad k_1,k_2 \text{ 是不全为零的常数}$$

对于 $\lambda_3=4$,解齐次线性方程组 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$. 由

$$4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 3 & -3\\ -3 & 9 & -3\\ -6 & 6 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_3=4$ 的全部特征向量为

$$k_3\boldsymbol{\alpha}_3,\quad k_3 \text{ 是不为零的常数}$$

5.3.3　特征值和特征向量的性质

定理 5.12　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值.

证　由于

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征多项式,从而有相同的特征值.

但应注意，虽然 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值，但特征向量却不一定相同.

定理 5.13 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

(1) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值(k 是任意常数)；

(2) λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值；

(3) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\dfrac{1}{\lambda}$是 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值.

证 设$\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值λ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，于是

(1) $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=k(\boldsymbol{A\alpha})=k(\lambda\boldsymbol{\alpha})=(k\lambda)\boldsymbol{\alpha}$，所以 $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{A\alpha})=\lambda(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$，所以 λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值.

(3) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\lambda\neq 0$(请读者自证). 于是由 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$$

所以$\dfrac{1}{\lambda}$是 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值(即 λ^{-1}是 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值).

由此不难证明，若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，m 为正整数，则 λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值；$\varphi(\lambda)$是 $\varphi(\boldsymbol{A})$的特征值(其中 $\varphi(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ 是 λ 的多项式，$\varphi(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式).

定理 5.14 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$，其中$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素之和；

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$.

证 一方面，在 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

的展开式中，主对角线元素的乘积项为

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$$

展开式中其余各项，最多包含 $n-2$ 个主对角线上的元素，因此关于 λ 的次数最多为 $n-2$ 次. 所以特征多项式中含 λ^n 和 λ^{n-1}的项只能出现在 n 个主对角线元素的连乘积项中，它们是

$$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}$$

而在特征多项式中，令 $\lambda=0$ 可得常数项为

$$|-\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|$$

因此，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|$$

另一方面,因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值,根据因式分解定理知

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

所以比较系数得 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$.

由此可得以下推论:

推论　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是它的任一特征值都不等于零.

例 5.15　设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,1,3$,求 $\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的特征值.

解　因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都不等于 0,所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 而 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-3$,故

$$\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=-3\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$$

将上式记为 $\varphi(\boldsymbol{A})$,则 $\varphi(\lambda)=-\dfrac{3}{\lambda}+2\lambda-3$. 于是可得 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $\varphi(-1)=-2,\varphi(1)=-4,\varphi(3)=2$.

注意,这里 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 虽然不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式,但也具有矩阵多项式的性质.

定理 5.15　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 依次是与之对应的特征向量. 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 互不相同,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,即方阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值对应的特征向量线性无关.

证　设有常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$$

上式两端左乘 $\boldsymbol{A}$,并利用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,m)$,得

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$$

再将上式两端左乘 $\boldsymbol{A}$,并整理得

$$k_1\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\lambda_m^2\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$$

依次类推,施行上述步骤 $m-1$ 次,得

$$k_1\lambda_1^{m-1}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_2^{m-1}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\lambda_m^{m-1}\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$$

将上述各式合写成矩阵形式,得

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1,k_2\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,k_m\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{m-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{m-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_m&\cdots&\lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$$

上式左端第二个矩阵的行列式是范德蒙德行列式,因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 互不相同,故行列式不等于零,从而该矩阵可逆. 所以

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1,k_2\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,k_m\boldsymbol{\alpha}_m)=\boldsymbol{O}$$

即 $k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{O}(i=1,2,\cdots,m)$,但$\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{O}$. 于是

$$k_i=0,\quad i=1,2,\cdots,m$$

故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

进而有如下定理：

定理 5.16 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{is_i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的线性无关的特征向量，则由所有这些特征向量组成的向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_{11},\boldsymbol{\alpha}_{12},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{1s_1},\boldsymbol{\alpha}_{21},\boldsymbol{\alpha}_{22},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{2s_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m1},\boldsymbol{\alpha}_{m2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ms_m}$$

线性无关.

证 设

$$\sum_{i=1}^{m}(k_{i1}\boldsymbol{\alpha}_{i1}+k_{i2}\boldsymbol{\alpha}_{i2}+\cdots+k_{is_i}\boldsymbol{\alpha}_{is_i})=\boldsymbol{O} \tag{5.4}$$

记 $\boldsymbol{\beta}_i=k_{i1}\boldsymbol{\alpha}_{i1}+k_{i2}\boldsymbol{\alpha}_{i2}+\cdots+k_{is_i}\boldsymbol{\alpha}_{is_i}$，则(5.4)式化为

$$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{O} \tag{5.5}$$

因为 $\boldsymbol{\beta}_i$ 是对应于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{is_i}$ 的线性组合，所以 $\boldsymbol{\beta}_i$ 或者仍是对应于特征值 λ_i 的特征向量，或者是零向量. 现在证明 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 只能是零向量.

如果 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 中有一个或几个是特征向量，则由定理 5.15 知，它们必线性无关. 而由(5.5)式知存在不全为零(实际全是 1)的系数使它们的和为 $\boldsymbol{O}$，这与它们线性无关矛盾. 所以

$$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{O},\quad 即\ k_{i1}\boldsymbol{\alpha}_{i1}+k_{i2}\boldsymbol{\alpha}_{i2}+\cdots+k_{is_i}\boldsymbol{\alpha}_{is_i}=\boldsymbol{O},\quad i=1,2,\cdots,m$$

而 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{is_i}$ 线性无关，所以

$$k_{i1}=k_{i2}=\cdots=k_{is_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,m$$

故定理结论成立.

例 5.16 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

证 依题意，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$$

用反证法，假设 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则应存在数 λ，使得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$. 因此 $\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，即

$$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{O}$$

因题设 $\lambda_1\neq\lambda_2$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $\lambda-\lambda_1=0,\lambda-\lambda_2=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2$，与题设矛盾. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

那么，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一个特征值 λ_0，与之对应的线性无关的特征向量的个数最多有多少个，下面我们不加证明地给出如下定理：

定理 5.17 设 λ_0 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 重特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量中，极大线性无关组包含的向量个数最多为 k 个，即齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系包含的向量个数最多为 k 个.

推论 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 最多有 n 个线性无关的特征向量.

最后，作为特征值与特征向量的应用，我们对前面的引例——增长模型作进一步讨论.

记 n 个发展周期后的污染损耗和工业产值分别记为 x_n 和 y_n，则

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_0, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

直接计算 $\boldsymbol{A}^n$ 较为繁琐，现在利用特征值与特征向量的概念进行计算. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \lambda - \frac{7}{3} \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

对 $\lambda_1 = 2$，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

对 $\lambda_1 = 3$，由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

若当前水平 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 恰为 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_n = A^n\boldsymbol{\alpha}_0 = \lambda_1^n\boldsymbol{\alpha}_0 = 2^n\boldsymbol{\alpha}_0 = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

n 个周期后工业产值达到较高水平 2^{n+1}，但有一半被污染损耗 2^n 抵消，造成资源的严重浪费.

若当前水平为 $\boldsymbol{\alpha}_0 = \begin{pmatrix} 11 \\ 19 \end{pmatrix}$，而 $\boldsymbol{\alpha}_0 = \begin{pmatrix} 11 \\ 19 \end{pmatrix} = 10\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_0 = 10\lambda_1^n\boldsymbol{p}_1 + \lambda_2^n\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 10 \times 2^n + 3^n \\ 20 \times 2^n - 3^n \end{pmatrix}$$

特别地，当 $n=4$ 时，污染损耗 $x_n = 241$，工业产值 $y_n = 239$，损耗超过了产值，经济将出现负增长.

5.4　矩阵的相似

矩阵的相似是同阶方阵之间的一种重要关系. 本节我们首先介绍相似矩阵的概念和性质，然后讨论 n 阶方阵与对角矩阵相似的问题.

5.4.1　相似矩阵的概念和性质

定义 5.15　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，或称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变换，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵.

显然，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 表示对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一系列的初等行变换和初等列变换，只是对初等变换的要求更高，即 $\boldsymbol{A}$ 左乘与右乘的矩阵是互逆的. 因此相似变换是一种特殊的初等变换，也就是说，矩阵之间的相似是矩阵之间等价的一种特殊情形，所以相似关系也是一种等价关系，具有如下性质：

(1) 反身性　对任意 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似；

(2) 对称性　若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 也相似；

(3) 传递性　若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

例 5.17　证明：矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & a\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\lambda_2 & 0\\ a & \lambda_1\end{bmatrix}$ 相似.

证　观察 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特点，取 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 为初等矩阵，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & a\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_2 & 0\\ a & \lambda_1\end{bmatrix}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

两个相似矩阵，具有许多共同的特性.

定理 5.18　若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则

(1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式和相同的特征值；

(2) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的行列式，即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$；

(3) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的秩，即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$；

(4) $\boldsymbol{A}^m$ 与 $\boldsymbol{B}^m$ 也相似，其中 m 为正整数.

证　(1) 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，从而

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}|\\&=|\boldsymbol{P}^{-1}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

(2) $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|$.

(3) 相似矩阵一定等价，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的秩.

(4) 因为矩阵乘法满足结合律，所以

$$\boldsymbol{B}^m=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^m=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\cdots(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{P}$$

即 $\boldsymbol{A}^m$ 与 $\boldsymbol{B}^m$ 也相似.

由此不难证明，(1) 相似矩阵具有相同的可逆性，且当它们可逆时，它们的逆矩阵也相似；(2)若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$f(x)$是一个多项式，则 $f(\boldsymbol{A})$与 $f(\boldsymbol{B})$也相似.

需要注意，上述定理的逆命题并不成立. 如

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 与 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

有相同的特征多项式，相同行列式和相同的秩，但它们并不相似. 实际上，与单位矩阵相似的矩阵只能是单位矩阵本身，与数量矩阵相似的矩阵也只能是数量矩阵本身.

5.4.2 矩阵可对角化的条件

相似矩阵有许多相同的性质，因此在同阶相似矩阵中，我们希望找到最简单的矩阵，并通过研究这种简单矩阵的性质，得到其他矩阵的性质，并简化矩阵的计算.

而对角矩阵就是最简单的一类矩阵，因此，对于一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，能否与对角矩阵相似，在理论和应用方面都具有重要意义.

定义 5.16 对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，并称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的相似对角矩阵.

注意，并不是每个矩阵都能对角化，如上面提到的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 就不能对角化，因为如果它能对角化，只能是单位矩阵. 而前面已说明这是不可能的，所以矩阵可对角化是有条件的. 下面将从特征向量的角度来刻画矩阵可对角化的条件.

定理 5.19 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

证 必要性 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是有 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$.

将 $\boldsymbol{P}$ 按列分块为 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$.

由于 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 均为非零列向量，并且是线性无关的. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

因为上述证明过程可逆，所以充分性也成立.

推论 1 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

相似,则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 恰是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

推论 2 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

因为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量,故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

此推论说明,如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是单根,则 $\boldsymbol{A}$ 一定能对角化;若 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程有重根,那么 $\boldsymbol{A}$ 在什么条件下可对角化呢?下面的定理回答了这个问题.

定理 5.20 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个 $k_i(i=1,2,\cdots,m)$ 重特征值都恰有 k_i 个线性无关的特征向量(其中 $\sum\limits_{i=1}^{m}k_i=n$).

若 $\boldsymbol{A}$ 的每个 $k_i(i=1,2,\cdots,m)$ 重特征值都恰有 k_i 个线性无关的特征向量,由定理 5.16 及 $\sum\limits_{i=1}^{m}k_i=n$ 知,$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量,故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

反之,若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,则 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量,由定理 5.17 可知 $\boldsymbol{A}$ 的每个 $k_i(i=1,2,\cdots,m)$ 重特征值都恰有 k_i 个线性无关的特征向量.

例 5.18 对例 5.13 和例 5.14 的两个矩阵判断它们是否可对角化,若能对角化,求出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解 (1)在例 5.13 中,特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 为二重根,与之对应的仅有一个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

(2) 在例 5.14 中,特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$ 为二重根,与之对应的有两个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

对于单根 $\lambda_3=4$,对应的有一个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

因此 A 可对角化，取

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

则有 $P^{-1}AP=\Lambda$.

这里，由于齐次线性方程组的基础解系不唯一，因此矩阵 P 的取法也是不唯一的.

例 5.19　已知三阶方阵 A 有三个线性无关的特征向量，求 k 的值，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&k\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解　由 A 的特征方程 $|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-1)=0$ 得，A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1$.

因为 A 有三个线性无关的特征向量，所以对二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，A 应有两个线性无关的特征向量，即齐次线性方程组 $(0E-A)x=O$ 的基础解系包含两个线性无关的解向量. 从而其系数矩阵的秩 $\mathrm{R}(0E-A)=\mathrm{R}(A)=1$，所以 $k=0$.

下面举一例简单介绍方阵对角化问题在计算矩阵高次幂方面的应用.

例 5.20　已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 a,b;

(2) 求一个可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$;

(3) 计算 A^n，其中 n 为正整数.

解　(1) 因 A 与 B 相似，故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=b$. 利用特征值的性质可得

$$\begin{cases}2+2+b=1+4+a\\2\times2\times b=|A|=6(a-1)\end{cases}$$

解得 $a=5,b=6$.

(2) 由(1)得

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

且 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解方程组 $(2E-A)x=0$，得到与之对应的两个线性无关的特征向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3=6$，解方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，得到与之对应的一个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

故取可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(3) 由(2)得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$，故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=\boldsymbol{PB}^n\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&6^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2&2&2\\3&3&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\\&=2^{n-2}\begin{pmatrix}5-3^n&1-3^n&-1+3^n\\-2+2\times3^n&2+2\times3^n&2-2\times3^n\\3-3^{n+1}&3-3^{n+1}&1+3^{n+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

5.5 实对称矩阵的对角化

一般 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角化问题，是一个比较复杂的问题. 本节讨论实对称矩阵的对角化问题. 对于实对称矩阵，不但一定可以对角化，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵，而且更进一步可求得正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是复矩阵，称 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵，其中 $\overline{a}_{ij}$ 是复数 a_{ij} 的共轭复数. 容易验证矩阵的共轭运算满足

$$\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}},\quad \overline{\lambda\boldsymbol{A}}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{A}},\quad \overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{B}}$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是复矩阵，λ 是复数.

显然，如果 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵，则 $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$. 如果实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵.

5.5.1 实对称矩阵特征值的性质

定理 5.21 实对称矩阵的特征值都是实数.

证 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值，非零向量

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

是其对应的特征向量，则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$. 两端取共轭，并注意到 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{\alpha}}$$

两端再取转置，并注意到 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，得

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}$$

上式两端右乘$\boldsymbol{\alpha}$，得

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$$

因 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，所以$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{\alpha}=\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，即$(\lambda-\bar{\lambda})\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$. 但因$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{O}$，从而

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 > 0$$

所以 $\lambda-\bar{\lambda}=0$，即 $\lambda=\bar{\lambda}$，故 λ 为实数.

由于实对称矩阵的特征值都是实数，所以特征向量也都是实向量.

定理 5.22　实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是正交的.

证　设 λ_1,λ_2 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_1,λ_2 的特征向量，即

$$\boldsymbol{A\alpha}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1, \quad \boldsymbol{A\alpha}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$$

上述第一式两端取转置，并注意到 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$$

两端再右乘$\boldsymbol{\alpha}_2$，得

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_2 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2$$

因 $\boldsymbol{A\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2$，即$(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0$.

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0$，即$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与$\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交.

定理 5.23　设 λ_0 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 重特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值λ_0 的特征向量中，极大线性无关组包含的向量个数恰为 k 个，即齐次线性方程组$(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系包含的向量个数恰为 k 个，也即 $\mathrm{R}(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-k$.

证略.

5.5.2　实对称矩阵的对角化

定理 5.24　实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，一定可对角化.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 的互不相同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的重数依次为 $r_1,r_2,\cdots,r_s(r_1+r_2+\cdots+r_s=n)$.

由定理 5.23 及定理 5.16 知，$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

定理 5.25 对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，一定存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为主对角线上元素的对角矩阵.

证 将定理 5.24 中每个特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$ 对应的 $r_i(i=1,2,\cdots,s)$ 个线性无关的特征向量分别正交化和单位化，然后将所得的向量按列合并构成 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$，由定理 5.22 知，$\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵且 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

根据上述定理，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，将实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的具体步骤为：

(1) 解特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，求出 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，其中 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $r_i(i=1,2,\cdots,s)$ 重特征值；

(2) 对每一特征值 λ_i，解齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，求得它的一个基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$，即为对应于 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$ 的线性无关的特征向量；

(3) 利用施密特正交化法，将 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$ 正交化，得 $\boldsymbol{\beta}_{i1},\boldsymbol{\beta}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{ir_i}$，再单位化，得 $\boldsymbol{\gamma}_{i1},\boldsymbol{\gamma}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{ir_i}(i=1,2,\cdots,s)$，即为对应于 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$ 的单位正交特征向量；

(4) 将上述对应于全部不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 的单位正交特征向量

$$\boldsymbol{\gamma}_{11},\boldsymbol{\gamma}_{12},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{1r_1},\boldsymbol{\gamma}_{21},\boldsymbol{\gamma}_{22},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{1r_2},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{s1},\boldsymbol{\gamma}_{s2},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{sr_s}$$

作为列向量构成矩阵 $\boldsymbol{Q}$，即为所求正交矩阵，使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵，其主对角线上的元素为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，特征值 λ_i 的个数是其重数 $r_i(i=1,2,\cdots,s)$，且排列顺序与 $\boldsymbol{Q}$ 中特征向量相对应.

例 5.21 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-2&\lambda-4&-2\\-1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-6)=0$$

得，$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=6$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$，解齐次线性方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3=6$，解齐次线性方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

故所求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 6\end{pmatrix}$.

例 5.22　设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,1,1，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0 的特征向量，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解　设与特征值 1 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，由于实对称矩阵不同特征值对应的特征向量是正交的，故

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0\text{，即 } x_2+x_3=0$$

解得基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

即为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于二重特征值 1 的两个线性无关的特征向量. 令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 所以

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

习题五

A 类

*1. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$ 生成一个 2 维向量空间,求 a 的值.

*2. 已知$\mathbf{R}^3$ 中的两组向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)^{\mathrm{T}}$$

(1) 证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$都是$\mathbf{R}^3$ 的基;

(2) 求$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵;

(3) 求$\boldsymbol{\alpha}=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$ 在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

*3. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是向量空间 V 的一个基,求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵.

*4. 设 W_1,W_2 是向量空间 V 的子空间,证明 $W_1\cap W_2$ 也是 V 的子空间.

5. 已知$\mathbf{R}^3$中的两个向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$正交,求一非零向量$\boldsymbol{\alpha}_3$,使$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交.

6. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,求一组非零向量$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,使$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交.

7. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^T$ 是$\mathbf{R}^3$ 的一个基，用施密特正交化方法将其化为标准正交基.

8. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

证明 $\boldsymbol{A}$ 是一个正交矩阵.

9. 设$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，试证 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 为正交矩阵.

10. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}^{-1}$的一个特征向量，求常数 k 及与$\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值λ.

11. 求下列矩阵的特征值和特征向量.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$；(3) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$；(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

12. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$.

(1) 求 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值及行列式$|\boldsymbol{B}|$；(2) 求$|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}|$.

13. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，对应的特征向量分别为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$. 又向量$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(1) 将$\boldsymbol{\beta}$用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；(2) 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$($n$ 为正整数).

14. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|\neq0$，证明：$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

15. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，求 x 与 y 应满足的关系式.

16. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & y & \\ & & -1 \end{pmatrix}$相似.

(1) 求 x 与 y；(2) 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

17. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & a & 2\\ 5 & b & 3\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$有特征值±1，求 a,b 的值，并说明 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化.

18. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$，对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{50}$.

19. 求一个正交变换矩阵，将下列实对称矩阵对角化.

(1) $\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$；(3) $\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

20. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于特征值 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

21. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

22. 判断 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}n & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$ 是否相似，说明理由.

B 类

一、填空题

*1. 从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为________.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 2\\ 0 & b\end{pmatrix}$ 的对应于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量，则 $a=$________，$b=$________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为________.

4. 设 $\boldsymbol{A}^*$ 为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{AA}^*$ 的特征值为________，特征向量为________.

5. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为________.

6. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\0\\k\end{pmatrix}$，若方阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 有特征值 3，则 $k=$________.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，已知矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 都不可逆，则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^2=$________.

9. 设 $\begin{pmatrix}a & b\\0 & a\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵，则 $b=$________.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$________.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是两个线性无关的二维向量，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

二、单项选择题

1. 设 $\lambda=2$ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则矩阵 $\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$ 的一个特征值为(　　).

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

2. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则(　　).

A. $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$

B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于一个对角矩阵.

D. 对任意常数 t，$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似.

3. 设 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量为(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}$　　B. $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$　　C. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$　　D. $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$

4. 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与某个对角矩阵相似的充分必要条件是(　　).

A. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 n　　B. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值.

C. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定是对称矩阵　　D. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

6. 设λ_1,λ_2是矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充分必要条件是(　　).

A. $\lambda_1\neq0$　　B. $\lambda_2\neq0$　　C. $\lambda_1=0$　　D. $\lambda_2=0$

7. 设4阶方阵$\boldsymbol{A}$的秩为3，且$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{A}$相似于对角矩阵(　　).

A. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

8. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵，且$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{Q}=$(　　).

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$　　B. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$　　C. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$　　D. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

三、计算或证明下列各题

*1. 设V是一个3维向量空间，已知由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵为$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\2&2&4\end{pmatrix}$，又$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

*2. 设V是一个4维向量空间，向量$\boldsymbol{\alpha}$在基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

下的坐标为(2,3,1,2)，求$\boldsymbol{\alpha}$在基

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,2,3,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_3=(0,0,2,4)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_4=(3,0,0,2)^{\mathrm{T}}$$

下的坐标.

*3. 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$是$\mathbf{R}^n$的任意两个向量，若定义内积

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+2a_2b_2+\cdots+na_nb_n$$

证明$\mathbf{R}^n$对此定义的内积构成一个欧氏空间.

4. 设4阶方阵$\boldsymbol{A}$满足条件$|\boldsymbol{A}+\sqrt{2}\boldsymbol{E}|=0$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，其中$\boldsymbol{E}$是4阶单位矩阵. 求矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$的一个特征值.

5. 设n阶方阵$\boldsymbol{A}$的各行元素之和为常数a. 证明

(1) a为$\boldsymbol{A}$的一个特征值，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$是对应的特征向量；

(2) $\boldsymbol{A}^m$ 的各行元素之和为 a^m，其中 m 为正整数；

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的各行元素之和为 $\frac{1}{a}$.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 证明

(1) 若 λ 是 $\boldsymbol{AB}$ 的一个非零特征值，则 λ 也是 $\boldsymbol{BA}$ 的一个特征值；

(2) 若 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{AB}$ 的一个特征值，则 $\lambda=0$ 也是 $\boldsymbol{BA}$ 的一个特征值.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重特征值，求 a 的值，并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化.

8. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，-3，求 $\boldsymbol{A}^3-7\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}$.

9. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 2；(2) $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角矩阵.

10. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，已知存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第一列为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. 求常数 a，矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 及 $\boldsymbol{\Lambda}$.

11. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & y & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 有一个特征值为 3.

(1) 求 y；(2) 求方阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵.

12. 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的两个解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 -1，1 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；(2) 令矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

第 6 章

二 次 型

线性代数主要讨论线性函数,二次方程或二次多项式不在其讨论范围之内.本章只是讨论它们的标准形,基本上是矩阵问题.

二次型的研究源于解析几何中化二次曲线和二次曲面的方程为标准方程.但二次型不仅在几何中用到,它在数学的其他分支以及其他学科也有广泛应用.本章首先介绍二次型、矩阵合同等概念;然后讨论化二次型为标准形的方法,并给出惯性定理与规范形;最后介绍正定二次型的概念及其判定方法.

6.1 二次型及其标准形

在平面解析几何中,为了便于研究二次曲线

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \tag{6.1}$$

的几何性质,可以经过适当的坐标变换(平移和旋转),这里关键是旋转变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \tag{6.2}$$

把方程化为标准形

$$mx'^2 + ny'^2 = d$$

从而判别其曲线类型,研究其性质.(6.1)式的左端是一个关于 x,y 的二次齐次多项式,称其为二元二次型.化(6.1)为标准方程的过程就是用变量的线性变换(6.2)化简二次型,使它只含变量的平方项而不含变量的交叉乘积项.为了研究和应用的需要,我们将二次型的概念推广到 n 个变量的情况.

6.1.1 二次型及其矩阵表示

定义 6.1 含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) =& a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 \\ &+ 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned} \tag{6.3}$$

称为 n 元二次型. 当 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 中有复数时, f 称为复二次型. 当 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 均为实数时, f 称为实二次型. 本书仅讨论实二次型.

取 $a_{ij}=a_{ji}$, 则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$, 于是(6.3)式可改写为

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = {} & a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\ & +a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\ & \vdots \\ & +a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ = {} & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \end{aligned} \tag{6.4}$$

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{6.5}$$

称(6.5)式为二次型 f 的矩阵形式, 其中实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为该二次型的矩阵, 二次型 f 称为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型, 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为该二次型的秩. 于是二次型 f 与实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一一对应关系.

例如, 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+8x_2x_3$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

它是由 f 唯一确定的. 反之, 任给一个对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 也可唯一确定一个二次型. 如矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其对应的二次型为

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

因此研究二次型的问题就可以转化为研究实对称矩阵的问题.

例 6.1 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&2\\7&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$的秩.

解 该二次型展开为

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$$

其矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&5\\1&3&3\\5&3&5\end{pmatrix}$.

因 $|\boldsymbol{A}|=-38\neq 0$,故 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,即二次型 f 的秩为 3.

6.1.2 二次型的标准形与矩阵的合同

若 $f(x_1,x_2,x_3)$是一个三元二次型,则在几何上,方程 $f(x_1,x_2,x_3)=a$ 代表二次曲面.同样,若 $f(x_1,x_2)$是一个二元二次型,则方程 $f(x_1,x_2)=a$ 代表二次曲线.如方程

$$x_1^2+2x_2^2+5x_3^2=1 \text{ 及 } x_1^2-2x_2^2=2$$

分别表示椭球面和平面上的双曲线.

显然上面方程中的两个二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2 \text{ 及 } f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_2^2$$

是两个特殊的二次型:它们只含变量的平方项而不含变量的交叉乘积项,从而容易判断上面的两个方程所表示的曲面或曲线类型.

因此对于二次型,我们讨论的主要问题是寻求可逆线性变换

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n\\\qquad\vdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n\end{cases}\tag{6.6}$$

或

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}\tag{6.7}$$

其中 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$,使得二次型通过该线性变换化成只含变量的平方项而不含交叉乘积项的形式,即将(6.6)式代入(6.5)式,能得到

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

这种只含平方项而不含交叉项的二次型,称其为二次型的标准形.显然标准形的矩阵为对角矩阵,其主对角线上的元素恰为标准形的系数.

这里,从变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 到变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性变换记为(6.7)式,当 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵时,称(6.7)式为可逆线性变换(或非奇异线性变换,满秩线性变换,非退化线性变换);当 $\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵时,称(6.7)式为正交变换.

对二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 进行可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,则

$$f = x^{\mathrm{T}}Ax = (Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy) = y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y = y^{\mathrm{T}}By$$

其中 $B=C^{\mathrm{T}}AC$ 为对称矩阵.

定义 6.2　设 A,B 是两个同阶方阵,若存在可逆矩阵 C,使得

$$C^{\mathrm{T}}AC = B$$

则称矩阵 A 与 B 是合同的,或称 A 合同于 B. 对 A 进行运算 $C^{\mathrm{T}}AC$,称为对 A 进行合同变换,可逆矩阵 C 称为把 A 变成 B 的合同变换矩阵.

显然,若二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$,经过可逆线性变换变为二次型 $y^{\mathrm{T}}By$,则它们的矩阵 A 与 B 是合同的.

合同关系是一种等价关系,因此合同矩阵有相同的秩,且具有下列性质:

(1) 反身性　任意 n 阶方阵 A 与其本身合同. 因为

$$E^{\mathrm{T}}AE = A.$$

(2) 对称性　若 A 与 B 合同,则 B 与 A 也合同.

因为若存在可逆矩阵 C,使得 $C^{\mathrm{T}}AC=B$,则

$$A = (C^{\mathrm{T}})^{-1}BC^{-1} = (C^{-1})^{\mathrm{T}}BC^{-1}$$

(3) 传递性　若 A 与 B 合同,B 与 D 合同,则 A 与 D 也合同.

因为若存在可逆矩阵 C 和 H,使得 $C^{\mathrm{T}}AC=B$,$H^{\mathrm{T}}BH=D$,则

$$D = H^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)H = (CH)^{\mathrm{T}}A(CH)$$

注　(1) 标准形中平方项的项数即是二次型的秩.

(2) 矩阵之间的合同关系与矩阵之间的相似关系是两种不同的等价关系,切忌混淆.

(3) 矩阵的合同是一般同阶方阵之间的一种关系,不只是针对对称矩阵的.

例 6.2　设 A 和 B 为同阶实对称矩阵,则由 A 与 B 相似可推出 A 与 B 合同,反之不然.

证　由 A 与 B 相似可知,A 与 B 有相同的特征值. 又由于 A 和 B 都是实对称矩阵,所以存在正交矩阵 P_1,P_2,使得 A 和 B 都与同一对角矩阵相似,即

$$P_1^{-1}AP_1 = \Lambda,\quad P_2^{-1}BP_2 = \Lambda$$

从而

$$B = P_2\Lambda P_2^{-1} = P_2(P_1^{-1}AP_1)P_2^{-1} = (P_1P_2^{-1})^{-1}AP_1P_2^{-1}$$

记 $C=P_1P_2^{-1}$,则由 $P_1^{\mathrm{T}}=P_1^{-1}$,$P_2^{\mathrm{T}}=P_2^{-1}$,得

$$C^{\mathrm{T}} = (P_1P_2^{-1})^{\mathrm{T}} = (P_2^{-1})^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}} = (P_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}P_1^{-1} = P_2P_1^{-1} = (P_1P_2^{-1})^{-1} = C^{-1}$$

故 $B=C^{\mathrm{T}}AC$,即 A 与 B 合同.

反之,即使两个合同矩阵都是实对称矩阵,也不一定是相似的. 如

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$$

都是实对称矩阵,且存在可逆矩阵

$$C = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$$

使得 $C^TAC=B$，即 A 与 B 合同. 但对任意可逆矩阵 P，都有 $P^{-1}AP=E\neq B$，故 A 与 B 不相似.

实际上，A 与 B 的特征值不相等，当然 A 与 B 不相似.

6.2 化二次型为标准形

本节我们将讨论如何通过可逆线性变换 $x=Cy$，化二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 为标准形 $f=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$，其中 A 为实对称矩阵.

从矩阵的角度来看，就是寻求可逆矩阵 C，使得 C^TAC 为对角矩阵.

下面介绍三种化二次型为标准形的方法.

6.2.1 正交变换法

由于正交变换保持向量的长度不变，即保持几何图形不变，因此用正交变换化二次型为标准形的问题可应用到几何中二次曲面或二次曲线的分类问题.

因为二次型矩阵是实对称矩阵，由 5.5 节可知，对任意实对称矩阵 A，一定存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为矩阵 A 的 n 个特征值.

因为 Q 为正交矩阵，所以 $Q^{-1}=Q^T$，故

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$$

因此有下述重要定理.

定理 6.1 （主轴定理）任意实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$$

都可通过正交变换 $x=Qy$ 化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是实对称矩阵 A 的 n 个特征值，正交矩阵 Q 的 n 个列向量恰好是 A 的分别对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的单位正交特征向量.

用正交变换化二次型为标准形的基本步骤：

(1) 写出二次型的矩阵 A；

(2) 求出 A 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

(3) 求出对应于各特征值的线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$；

(4) 将特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 正交化，再单位化，得 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，记 $Q=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$；

(5) 作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,则得 f 的标准形为 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$.

例 6.3 求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

化为标准形.

解 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$,由特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}\lambda-3&1&1\\1&\lambda-3&1\\1&1&\lambda-3\end{vmatrix} = (\lambda-4)^2(\lambda-1)=0$$

得,$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=4$,解齐次线性方程组 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 得,基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化,令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3=1$,解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 得,基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

于是得正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

利用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,则原二次型可化为标准形 $f=4y_1^2+4y_2^2+y_3^2$.

例 6.4 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化成 $y_2^2+4y_3^2$，求 a,b 的值及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，并指出方程 $f=4$ 表示何种二次曲面.

解 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，由于该二次型经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化成 $y_2^2+4y_3^2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=1,\quad \lambda_3=4$$

利用特征值的性质 $\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}$ 及 $\prod\limits_{i=1}^{3}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$，得

$$\begin{cases}5=a+2\\0=-(b-1)^2\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$$

对于 $\lambda_1=0$，解齐次线性方程组 $(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 得，$\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 得，$\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda_3=4$，解齐次线性方程组 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 得，$\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于不同特征值的特征向量，已正交. 再单位化得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

因此，所求正交矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

显然，方程 $f=4$ 即 $y_2^2+4y_3^2=4$ 表示椭圆柱面.

6.2.2　配方法

上面介绍了用正交变换化二次型为标准形. 正交变换是一类特殊的可逆线性变换，在许多场合寻求一般的可逆线性变换化简二次型即可满足应用要求.

实际上，对任意二次型，也可通过拉格朗日(Lagrange)配方法求得可逆线性变换化为标准形. 在变量个数不太多的情况下，配方法也是一种行之有效的方法.

例 6.5　用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形，并求出所作的可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$.

解　先将含 x_1 的项配方，有

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2-2x_1(x_2-2x_3)+(x_2-2x_3)^2-(x_2-2x_3)^2+2x_2^2+2x_3^2-6x_2x_3\\&=(x_1-x_2+2x_3)^2+x_2^2-2x_2x_3-2x_3^2\end{aligned}$$

再对含 x_2 的项配方，有

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+2x_3)^2+(x_2-x_3)^2-3x_3^2$$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+2x_3\\y_2=\phantom{x_1-{}}x_2-x_3\\y_3=x_3\end{cases}\tag{6.8}$$

则二次型化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2-3y_3^2$.

由(6.8)式解得

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2-y_3\\x_2=\phantom{y_1+{}}y_2+y_3\\x_3=\phantom{y_1+y_2+{}}y_3\end{cases}$$

即为所作的可逆线性变换. 其可逆线性变换矩阵为 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

例 6.6　用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形，并求出所作的可逆线性变换.

解　因二次型不含平方项，故先作可逆线性变换

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$$

即

$$x = C_1 y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y \tag{6.9}$$

于是 $f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$，再配方得

$$f = 2(y_1-y_3)^2-2y_2^2-2y_3^2+8y_2y_3 = 2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \quad - \quad y_3 \\ z_2 = \quad y_2 - 2y_3 \\ z_3 = \qquad\quad y_3 \end{cases} \tag{6.10}$$

则原二次型化为标准形 $f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$.

所作的可逆线性变换是连续两次可逆线性变换的结果. 由(6.10)式解得

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \quad + \quad z_3 \\ y_2 = \quad z_2 + 2z_3 \\ y_3 = \qquad\quad z_3 \end{cases}$$

即

$$y = C_2 z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z \tag{6.11}$$

将(6.11)式代入(6.9)式得所作的可逆线性变换为

$$x = (C_1C_2)z, \quad 即 \begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - \ z_3 \\ x_3 = \qquad\qquad\ z_3 \end{cases}$$

相应的可逆变换矩阵为

$$C = C_1C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

原二次型 f 经可逆线性变换 $x=Cz$ 化为标准形

$$f = g(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$$

一般地，用上面的配方法可以证明如下定理：

定理 6.2 任意二次型都可通过可逆线性变换化为标准形，即对任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使 C^TAC 为对角矩阵.

证略.

6.2.3 初等变换法

初等变换法就是借助矩阵方法的优越性，利用初等变换与初等矩阵的概念，直接求出可

逆矩阵 $\boldsymbol{C}$.

根据定理 6.2,任意对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,都存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵. 由于 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵,这相当于存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$,使得

$$\boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$$

为对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$,其中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$.

也就是说,对任意对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一系列适当的初等行变换与初等列变换,就能把 $\boldsymbol{A}$ 化为与其合同的对角矩阵. 但要注意,由于 $\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{P}_i(i=1,2,\cdots,s)$是同种初等矩阵,故在对 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等列变换即右乘 $\boldsymbol{P}_i$ 的同时,要再相应作一次初等行变换即左乘 $\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}$,以使矩阵始终保持合同关系. 下面就三类初等矩阵说明如何实施这一过程:

(1) 对 $\boldsymbol{E}(i,j)$,由于其转置 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i,j)=\boldsymbol{E}(i,j)$,故 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{E}(i,j)$,相当于交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i,j 两列; 再左乘 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i,j)$,相当于交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i,j 两行.

(2) 对 $\boldsymbol{E}(i(k))$,由于其转置 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i(k))=\boldsymbol{E}(i(k))$,故 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{E}(i(k))$,相当于用非零数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列; 再左乘 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i(k))$,相当于用 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行.

(3) 对 $\boldsymbol{E}(i,j(k))$,由于其转置 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i,j(k))=\boldsymbol{E}(j,i(k))$,故 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{E}(i,j(k))$,相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上; 再左乘 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i,j(k))$,相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行上.

于是,我们按上述初等列变换与初等行变换的关系,采取互动方式,每次成对实行初等列变换与初等行变换,就能保证所得矩阵与原来矩阵是合同的.

那么,如何求得可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 呢? 由于

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s=\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$$

所以,如果将上述把 $\boldsymbol{A}$ 化为与其合同的对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$ 的一系列初等列变换,同样施加于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,即得可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$.

用初等变换法化二次型为标准形的步骤:

(1) 构造 $2n\times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$,对 $\boldsymbol{A}$ 每实行一次初等行变换,就对 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$实行一次同种初等列变换;

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 化为对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$,此时 E 即化为可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$;

(3) 作可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,则二次型化为标准形 $f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$.

例 6.7 用初等变换法化例 6.3 中的二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

为标准形,并写出所作的可逆线性变换.

解 二次型 f 的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$,于是

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2-c_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+\frac{1}{3}r_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & \frac{8}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3+\frac{1}{3}c_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & \frac{8}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3+\frac{1}{2}c_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

记 $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，则原二次型经过可逆线性变换 $x=Cy$，化为标准形

$$f = 3y_1^2 + 8y_2^2 + \frac{2}{3}y_3^2$$

例 6.8 用初等变换法化例 6.6 中的二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形，并写出所作的可逆线性变换.

解 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$，于是

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1 + c_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 + c_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - \frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - \frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 4r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-4c_2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 6\\ 1 & -\frac{1}{2} & 3\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 3\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,则原二次型经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,化为标准形

$$f=2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+6y_3^2$$

注 (1) 用正交变换法所得标准形中平方项的系数是二次型矩阵的特征值,所以在不考虑标准形中变量的次序时可以认为标准形是唯一的.

(2) 例 6.7 求得的标准形在形式上不同于例 6.3 求得的结果,这说明用不同的可逆线性变换化二次型,所得的标准形一般是不同的,即二次型的标准形是不唯一的. 例 6.8 中的标准形与例 6.6 中的标准形也不同.

6.3 惯性定理和规范形

由上节例题看到,一个二次型经过不同的可逆线性变换化为标准形,所得标准形一般不同. 但有两点是相同的:一是标准形中平方项的项数,即二次型的秩;二是标准形中正平方项的项数和负平方项的项数.

6.3.1 惯性定理

定理 6.3(惯性定理) 对于任意 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,不论作怎样的可逆线性变换使之化为标准形,其中正平方项的项数 p 和负平方项的项数 q 都是唯一确定的.

证 设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 r,即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$. 而二次型经过可逆线性变换不改变秩,即其标准形的秩也是 r. 所以 $p+q=r$.

因此,只需证明 p 唯一确定即可.

设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过两个不同的可逆线性变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} \text{ 和 } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$$

化为标准形

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_p y_p^2 - b_{p+1} y_{p+1}^2 - b_{p+2} y_{p+2}^2 - \cdots - b_r y_r^2$$

$$f = c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + \cdots + c_t z_t^2 - c_{t+1} z_{t+1}^2 - c_{t+2} z_{t+2}^2 - \cdots - c_r z_r^2$$

其中 $b_i>0, c_i>0 (i=1,2,\cdots,r)$.

现在证明 $p=t$. 用反证法. 设 $p>t$. 由于

$$\begin{aligned} & b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_p y_p^2 - b_{p+1} y_{p+1}^2 - b_{p+2} y_{p+2}^2 - \cdots - b_r y_r^2 \\ = & c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + \cdots + c_t z_t^2 - c_{t+1} z_{t+1}^2 - c_{t+2} z_{t+2}^2 - \cdots - c_r z_r^2 \end{aligned} \tag{6.12}$$

并且

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$$

设

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{cases} z_1 = g_{11} y_1 + g_{12} y_2 + \cdots + g_{1n} y_n \\ z_2 = g_{21} y_1 + g_{22} y_2 + \cdots + g_{2n} y_n \\ \qquad \vdots \\ z_n = g_{n1} y_1 + g_{n2} y_2 + \cdots + g_{nn} y_n \end{cases} \tag{6.13}$$

考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} g_{11} y_1 + g_{12} y_2 + \cdots + g_{1n} y_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ g_{t1} y_1 + g_{t2} y_2 + \cdots + g_{tn} y_n = 0 \\ \qquad\qquad y_{p+1} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\quad y_n = 0 \end{cases}$$

由于该方程组含 n 个未知量，而方程个数为

$$t + (n-p) = n - (p-t) < n$$

所以该方程组有非零解. 设它的一个非零解为

$$y_1 = k_1, y_2 = k_2, \cdots, y_p = k_p, y_{p+1} = k_{p+1}, \cdots, y_n = k_n \tag{6.14}$$

显然 $k_{p+1}=\cdots=k_n=0$，所以 $k_1,k_2,\cdots,k_p$ 不全为零. 将(6.14)式代入(6.12)式的左端，得

$$b_1 k_1^2 + b_2 k_2^2 + \cdots + b_p k_p^2 > 0$$

另一方面，将非零解(6.14)代入方程组(6.13)，得到一组 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的值，注意到其中

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_t = 0$$

再将这一组 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 代入(6.12)式的右端，得

$$-c_{t+1}z_{t+1}^2-c_{t+2}z_{t+2}^2-\cdots-c_rz_r^2<0$$

这是一个矛盾，说明 $p>t$ 是不可能的.

同理可证，$p<t$ 也是不可能的，因此 $p=t$. 这就证明了实二次型的标准形中，正平方项的项数 p 是由实二次型本身唯一确定的，而与所作的可逆线性变换无关.

由于 $q=r-p$，其中 r 是二次型的秩，由实二次型本身唯一确定的，所以标准形中负平方项的项数 q 也是由二次型本身唯一确定的.

定义 6.3 在实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的标准形中，正平方项的项数 p 称为二次型 f(或矩阵 $\boldsymbol{A}$)的正惯性指数；负平方项的项数 $q=r-p$(其中 r 是二次型 f 的秩) 称为二次型 f(或矩阵 $\boldsymbol{A}$)的负惯性指数.

推论 1 两个实二次型可以经过可逆线性变换互相变换的充分必要条件是它们有相同的秩和相同的正惯性指数.

推论 2 两个同阶实对称矩阵合同的充分必要条件是它们有相同的秩和相同的正惯性指数.

6.3.2 二次型的规范形

设实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 经过可逆线性变换，包括重新安排变量的次序(这也是可逆线性变换)，总可使 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 变成如下标准形

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2 \tag{6.15}$$

其中 $d_i>0(i=1,2,\cdots,r)$，r 为二次型 f 的秩，p 为二次型 f 的正惯性指数. 显然 r 和 p 是由二次型 f 唯一确定的.

对(6.15)式再作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{\sqrt{d_1}}z_1 \\ \quad\vdots \\ y_r=\dfrac{1}{\sqrt{d_r}}z_r \\ y_{r+1}=z_{r+1} \\ \quad\vdots \\ y_n=z_n \end{cases}$$

则(6.15)式化为

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2 \tag{6.16}$$

定义 6.4 称形如(6.16)式的二次型为实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形.

定理 6.4 任意实二次型都可以经过可逆线性变换化为规范形，且规范形是唯一的.

定理 6.5 任意实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必合同于一个形如

$$\begin{pmatrix} E_p & O & O \\ O & E_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}$$

的对角矩阵. 其中 1 与 -1 的总数 $p+q=r$ 即为 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 1 的个数 p 即为 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数, -1 的个数 q 即为 $\boldsymbol{A}$ 的负惯性指数.

称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的(合同)规范形.

推论 3 两个同阶实对称矩阵合同的充要条件是它们有相同的规范形.

例 6.9 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为规范形, 并求出其秩和正惯性指数及所作的可逆线性变换.

解 由例 6.6 知二次型 f 经可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases} \tag{6.17}$$

化为标准形 $f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$, 再令

$$\begin{cases} w_1 = \sqrt{2}\, z_1 \\ w_2 = \sqrt{6}\, z_3, \\ w_3 = \sqrt{2}\, z_2 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} w_1 \\ z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} w_3 \\ z_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} w_2 \end{cases} \tag{6.18}$$

则 f 化为规范形 $f=w_1^2+w_2^2-w_3^2$, 且二次型 f 的秩为 3, 正惯性指数为 2.

将(6.18)式代入(6.17)式得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} w_1 + \dfrac{3}{\sqrt{6}} w_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} w_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} w_1 - \dfrac{1}{\sqrt{6}} w_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} w_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} w_2 \end{cases}$$

即为二次型 f 化为规范形所作的可逆线性变换. 相应的可逆线性变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$$

注意，化二次型为标准形，可以用正交变换法，也可用配方法或初等变换法，但若化为规范形则应先化为标准形，再如本例化为规范形.

6.4 二次型的正定性

根据二次型的标准形或规范形，对二次型进行分类，在理论上和应用上都具有重要意义. 其中最常用的是正定二次型.

定义 6.5 设 n 元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，若对于任意非零实向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，都有

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$$

则称二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

例 6.10 (1) 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+2x_2^2+\cdots+nx_n^2$ 为正定二次型.

(2) 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+2x_2^2+\cdots+rx_r^2\,(r<n)$ 不是正定二次型. 因为，对 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$，有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.

(3) 对于二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$，因为

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+x_2^2+3x_3^2$$

对任意实向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{O}$，都有 $f(x_1,x_2,x_3)>0$，所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定二次型.

例 6.11 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶正定矩阵，$a>0,b>0$. 证明 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

证 由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为正定矩阵，故对任意实向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{O}$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$$

又 $a>0,b>0$，于是

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=a\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+b\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$$

所以 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

如何判断二次型是否为正定二次型，从例 6.10 来看，当二次型为标准形时，很容易判断. 若二次型不是标准形，我们自然会想到通过可逆线性变换将其化为标准形. 对此，我们有如下定理.

定理 6.6　任意实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过可逆线性变换，其正定性不变.

证　设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 后，化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$$

对任意 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$，由 $\boldsymbol{C}$ 可逆，知 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{O}$，再由原二次型的正定性，得

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$$

即二次型 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$ 为正定二次型.

因此，判断二次型的正定性，有下述重要结论.

定理 6.7　若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，则下列命题是等价的：

(1) $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型(或 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵)；

(2) f 的标准形中 n 个系数全大于零；

(3) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全大于零；

(4) f 的正惯性指数等于 n；

(5) $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 合同(或 E 为 $\boldsymbol{A}$ 的规范形)；

(6) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}P$.

证　(1)⇒(2)因为存在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，使 f 的标准形为

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

分别取

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

则 f 分别为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$. 由二次型的正定性可知，$d_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.

(2) ⇒(3)⇒(4)显然成立.

(4) ⇒(5)因为正惯性指数为 n，故由定理 6.5 知 $\boldsymbol{A}$ 的规范形为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同.

(5) ⇒(6)由(5)得，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}$，取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

(6) ⇒(1)因为 $\boldsymbol{P}$ 可逆，所以对任意实向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{O}$，有 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{O}$. 而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$，故

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}>0$$

所以 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型.

当 $f(x,y)$ 是二元正定二次型时，$f(x,y)=c(c>0$ 为常数)的图形是以原点为中心的椭圆. 当 $f(x,y,z)$ 是三元正定二次型时，$f(x,y,z)=c(c>0$ 为常数)的图形是以原点为中心的椭球面.

例 6.12　设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

证　设向量 $\boldsymbol{x}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，则

$$
\begin{aligned}
(A^2-3A+2E)x &= A^2x-3Ax+2x \\
&= \lambda^2x-3\lambda x+2x \\
&= (\lambda^2-3\lambda+2)x = O
\end{aligned}
$$

因为 $x\neq O$,所以 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,即 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$.

由于 A 的特征值全大于零,故 A 为正定矩阵.

在实对称矩阵中,正定矩阵是一类特殊矩阵,它具有下述重要性质:

(1) 若 A 为正定矩阵,则 A 可逆,且A^{-1}也是正定矩阵;

(2) 若 A 为正定矩阵,则A^{T},A^k(k 为正整数)也是正定矩阵;

(3) 若 A,B 为同阶正定矩阵,则 $A+B$ 也是正定矩阵.

以上性质请读者自证.

例 6.13 设 A,B 为同阶正定矩阵,证明:AB 为正定矩阵的充分必要条件是 A 与 B 可交换.

证 必要性 若 AB 正定,则 AB 为对称矩阵,于是 $AB=(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. 由于 A,B 均正定,知$A^{\mathrm{T}}=A,B=B^{\mathrm{T}}$,所以 $AB=BA$,即 A 与 B 可交换.

充分性 由 A,B 的正定性及可交换性,知 AB 为对称矩阵. 再由 A,B 均正定,知存在可逆矩阵 P,Q,使得 $A=P^{\mathrm{T}}P,B=Q^{\mathrm{T}}Q$. 从而有

$$Q(AB)Q^{-1}=Q(P^{\mathrm{T}}PQ^{\mathrm{T}}Q)Q^{-1}=(PQ^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}PQ^{\mathrm{T}}$$

即 AB 与$(PQ^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}PQ^{\mathrm{T}}$ 相似. 因 PQ^{T} 可逆,由定理 6.7(6)知$(PQ^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}PQ^{\mathrm{T}}$ 正定,从而其特征值也即 AB 的特征值全大于零,故 AB 为正定矩阵.

判断二次型(或对称矩阵 A)的正定性,也可用行列式来判断.

定理 6.8 若 A 为正定矩阵,则

(1) A 的主对角线上元素全大于零;

(2) A 的行列式大于零.

证 (1) 因为 A 为正定矩阵,所以 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为正定二次型. 分别取

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

则 f 分别为 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$. 由二次型的正定性可知,$a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$.

(2) 因为 A 为正定矩阵,所以存在可逆矩阵 C,使 $A=C^{\mathrm{T}}C$. 因此

$$|A|=|C^{\mathrm{T}}C|=|C|^2>0.$$

注 定理 6.8 是 A 为正定矩阵的必要条件,由此容易判断矩阵

$$\begin{pmatrix}0&2\\2&5\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1&3\\3&5\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}4&3\\3&2\end{pmatrix}$$

都不是正定矩阵. 但对于矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&2&1\end{pmatrix}$$

虽然满足 $a_{ii}>0(i=1,2,3,4)$ 且 $|A|>0$，但容易求得它的一个特征值为 -1，故它不是正定矩阵.

定义 6.6　设 n 阶实对称矩阵 $A=(a_{ij})$，将 A 的前 k 行和前 k 列元素组成的子矩阵记为

$$A_k=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{pmatrix},$$

其行列式 $|A_k|$ 称为 A 的 k 阶顺序主子式，即

$$|A_1|=|a_{11}|,\quad |A_2|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\quad |A_3|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad \cdots,\quad |A_n|=|A|.$$

定理 6.9　二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为正定二次型(或实对称矩阵 A 为正定矩阵)的充分必要条件是矩阵 A 的各阶顺序主子式全大于零.

该定理可用归纳法证明，这里略.

利用定理 6.9 容易判断，矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&2&1\end{pmatrix}$$

不是正定的，因为 $|A_2|=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3<0$.

例 6.14　问 λ 为何值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定二次型.

解　二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1\\\lambda&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$$

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为正定的充分必要条件是

$$|A_1|=|1|>0,\quad |A_2|=\begin{vmatrix}1&\lambda\\\lambda&1\end{vmatrix}=1-\lambda^2>0,$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\\lambda&1&2\\-1&2&5\end{vmatrix}=-5\lambda^2-4\lambda>0$$

由此解得$-\frac{4}{5}<\lambda<0$.

所以,当$-\frac{4}{5}<\lambda<0$时,二次型$f(x_1,x_2,x_3)$是正定的.

与实二次型的正定性类似,还有下述概念和相关结论.

定义 6.7 设 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,对于任意非零实向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,

(1) 若$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}<0$,则称二次型 f 为负定二次型,并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵;

(2) 若$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant0$,则称二次型 f 为半正定二次型,并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵;

(3) 若$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant0$ 成立,则称二次型 f 为半负定二次型,并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为半负定矩阵;

(4) 若二次型既不是半正定又不是半负定的,则称二次型为不定二次型.

显然,若二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是负定的,则$-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$就是正定的,因此有

定理 6.10 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵,则下列命题是等价的:

(1) $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是负定二次型(或 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵);

(2) f 的标准形中 n 个系数全小于零;

(3) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全小于零;

(4) f 的负惯性指数等于 n;

(5) $\boldsymbol{A}$ 与$-\boldsymbol{E}$ 合同(或 $\boldsymbol{E}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的规范形);

(6) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$;

(7) $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式中,奇数阶顺序主子式小于零,偶数阶顺序主子式大于零,即

$$(-1)^k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix}>0,k=1,2,\cdots,n$$

关于半正定和半负定的判断也有类似定理,这里略.

习题六

A 类

1. 写出下列二次型的矩阵.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+8x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2-x_3x_4$；

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=(ax_1+bx_2+cx_3)^2$.

2. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2ax_1x_3-2x_2x_3$ 的秩为 2，求参数 a.

3. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$，求出经过下列可逆线性变换后的新二次型.

(1) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$；(2) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&1&-1\\0&1&-1\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$；(3) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为 n 阶对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 合同，证明 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 合同.

5. 用正交变换化下列二次型为标准形，并写出所作的正交变换.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$；

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

6. 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2tx_2x_3\ (t<0)$$

通过正交变换可化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 t 及所用的正交变换矩阵.

7. 已知三元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 6，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&-1&-3\\1&0&1\end{pmatrix}$$

求正交变换化二次型 f 为标准形，并写出所作的正交变换.

8. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $f=y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的表达式.

9. 用配方法化下列二次型为标准形，并写出所作的可逆变换矩阵.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+10x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

10. 用初等变换法化下列二次型为标准形，并写出所作的可逆变换矩阵.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

11. 将下列二次型化为规范形,并指出其正惯性指数和秩.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

12. 判断下列二次型是否正定.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_4^2-2x_1x_2+4x_2x_3-8x_3x_4$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$.

13. 求 t 的值,使下列二次型为正定二次型.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+t(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$.

14. 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足$\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,证明:$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

15. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为正定矩阵,证明:$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$为正定矩阵.

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$,证明:$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

B　类

一、填空题

1. 二次型 $f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$的矩阵是________.

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的矩阵是________,其秩为________.

3. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$对应的二次型为________.

4. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经可逆线性变换

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2+\dfrac{1}{2}y_3\\ x_2=y_1-y_2+\dfrac{1}{2}y_3\\ x_3=y_3\end{cases}$$

所得新二次型为________.

5. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的正、负惯性指数都是 1,则 $a=$________.

6. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+3x_3^2$ 的秩为________，正惯性指数为________，负惯性指数为________.

7. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$，则 $t=$________.

8. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1，$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

9. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的秩为 3，正惯性指数为 1，则其规范形为________.

10. n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 正定的充分必要条件是它的正惯性指数为________.

11. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵且是正交矩阵，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化成的标准形为________.

12. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2k & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k+3\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 k 的取值范围是________.

二、单项选择题

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_1x_2+x_2^2$ 的矩阵为(　　).

A. $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

2. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$ 经正交变换化成的标准形为 $5y_1^2+by_2^2-y_3^2$，则(　　).

A. $a=1,b=1$　　B. $a=1,b=-1$　　C. $a=-1,b=1$　　D. $a=-1,b=-1$

3. 同阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是(　　).

A. $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$

B. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵

C. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的秩与正惯性指数都相等

D. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的正惯性指数相等

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　).

A. 合同,且相似　　B. 合同,但不相似

C. 不合同,但相似　　D. 既不合同,也不相似

5. 与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 合同的矩阵是(　　).

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

6. n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充分必要条件是(　　).

A. $|\boldsymbol{A}|>0$

B. 负惯性指数为 0

C. 存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$

D. $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全大于零

三、计算或证明下列各题

1. 求二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$ 的矩阵.

2. 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\quad(b<0)$$

的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1,特征值之积为 -12.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形,并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

3. 设二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求二次型 f 对应的矩阵,并将二次型化为标准形,写出所作的正交变换.

4. 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

(1) 求二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(2) 若二次型 f 的规范型为 $y_1^2+y_2^2$,求 a 的值.

5. 已知二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3\,(a>0)$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特

征值有重根.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,求 k 的值.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|<0$,证明:存在 n 维向量 $\boldsymbol{x}_0$,使 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0<0$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵,且 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$. 证明:当 $\lambda>0$ 时,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

习题答案与提示

习　题　一

A　类

1. (1) 13,奇;

(2) 18,偶;

(3) $\dfrac{n(n-1)}{2}$,当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时为偶排列,当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时为奇排列 $(k=0,1,\cdots,n)$;

(4) 同(3).

2. (1) -1; (2) 0; (3) -14; (4) $2x^3-6x^2+6$.

3. $x_1=3,x_2=1,x_3=1$;

4. $-a_{12}a_{41}a_{23}a_{34}$, $a_{12}a_{41}a_{24}a_{33}$;

5. $i=6,j=4$;

6. (1) $(-1)^{n-1}n!$; (2) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

7. (1) $2(a+b+c)^3$; (2) -27; (3) $[x+(n-2)\lambda](x-2\lambda)^{n-1}$; (4) 1;

(5) $-2(n-2)!$; (6) $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$; (7) x^2y^2; (8) $a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right)$;

(9) $x^n+(-1)^{n+1}y^n$; (10) $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

8. $x=a_1$ 或 $x=a_2$ 或…或 $x=a_{n-1}$.

9. 提示:(1) 用行列式性质;(2) 用行列式性质或数学归纳法.

10. -9,18.

11. (1) $x_1=1,x_2=1,x_3=1,x_4=1$; (2) $x_1=a,x_2=b,x_3=c$.

12. $3b=a^2+a+1$.

B　类

一、填空题

1. $i=7,j=8$; 2. $\dfrac{n(n-1)}{2}-k$; 3. $i=s$; 4. 12,0; 5. 3;

6. $(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$,288; 7. $-3x^2$; 8. 0; 9. 0; 10. $D=0$.

二、单项选择题

1. B; 2. D; 3. A; 4. C; 5. D; 6. C.

三、计算或证明下列各题

1. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1+n)^{n-1}$.

2. $D_n=\dfrac{1}{2}[(x+a)^n+(x-a)^n]$.

3. 提示：用数学归纳法.

4. 4.

5. 提示：利用克莱姆法则.

习 题 二

A 类

1. (1) $\begin{bmatrix}7&9&5&7\\4&4&4&4\\3&5&9&11\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}3&1&1&-1\\-4&0&-4&0\\-1&-3&-3&-5\end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix}10&10&6&6\\0&4&0&4\\2&2&6&6\end{bmatrix}$.

2. (1) $\begin{pmatrix}10&4&-1\\5&-1&-1\end{pmatrix}$; (2) 15.

3. $$\begin{bmatrix}2500&1200\\1300&1500\\1000&800\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2&0.12&0.1\\1.5&0.05&0.3\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{总价值}&\text{总重量}&\text{总体积}\end{array}\\ \begin{bmatrix}6800&360&610\\4850&231&580\\3200&160&340\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{北美}\\ \text{西欧}\\ \text{亚太}\end{array}$$

4. (1) $\begin{bmatrix}a^n&na^{n-1}b\\0&a^n\end{bmatrix}$; (2) $\begin{cases}\begin{bmatrix}a^{\frac{n}{2}}c^{\frac{n}{2}}&0&0\\0&b^n&0\\0&0&a^{\frac{n}{2}}c^{\frac{n}{2}}\end{bmatrix} & (n\text{ 为偶数})\\ \begin{bmatrix}0&0&a^{\frac{n+1}{2}}c^{\frac{n-1}{2}}\\0&b^n&0\\a^{\frac{n-1}{2}}c^{\frac{n+1}{2}}&0&0\end{bmatrix} & (n\text{ 为奇数})\end{cases}$

5. (1) $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}3&1\\4&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&2&2\\2&2&1\end{bmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-2&0&2\\0&2&2\\1&2&1\end{bmatrix}$.

6. 证略.

7. 证略.

8. 证略.

9. (1) $(a^2+b^2+c^2+d^2)\boldsymbol{E}$; (2) $|\boldsymbol{A}|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

10. $\begin{pmatrix} 16 & -20 & 14 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 4 \end{pmatrix}$.

11. (1) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -126 & 32 & 32 \end{pmatrix}$.

15. 提示：利用$\boldsymbol{A}^2=n\boldsymbol{A}$.

16. 提示：仿照例 2.20.

17. $-\frac{16}{27}$

18. 提示：利用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

19. 证略.

20. (1) 提示：$|\boldsymbol{H}|=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|$；(2) $\boldsymbol{H}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -8 \end{pmatrix}$，$-1$，$1$.

22. $\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$.

23. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

24. (1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

B 类

一、填空题

1. -24，9；2. 4，-24；3. $3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$；4. $k\neq 0$；5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

6. $(-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}}{3}$；7. $-\dfrac{1}{2}(A-2E)$；8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；9. -3；10. 0.

二、单项选择题

1. B； 2. A； 3. D； 4. C； 5. D； 6. C； 7. D； 8. D； 9. A； 10. C； 11. D； 12. B.

三、计算或证明下列各题

1. (1) 证略；(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 0 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. (1) $4\boldsymbol{E}$，$\dfrac{1}{4}\boldsymbol{A}$；(2) $\boldsymbol{E}-\dfrac{3}{4}\boldsymbol{A}$.

3. (1) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \end{pmatrix}$；(2) 证略.

4. 3.

5. 证略.

6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

习 题 三

A 类

1. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=(6,1,6,5)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,-3)^{\mathrm{T}}$.

2. $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$.

3. $(19,1,10,11)^{\mathrm{T}}$.

4. 提示：按定义直接验证.

5. (1) 线性无关；(2) 线性相关.

6. (1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

7. $\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3$.

8. 提示：按定义证明.

9. (1) $a\neq 2$；(2) $a=2$.

10. 提示：在等式 $x_1\boldsymbol{\alpha}+x_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+x_m\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$ 的两边分别依次乘以 $\boldsymbol{A}^{m-1},\boldsymbol{A}^{m-2},\cdots,\boldsymbol{A}$,可得 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 全为零.

11. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为极大线性无关组,$\boldsymbol{\alpha}_4=-11\boldsymbol{\alpha}_1+14\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$.

12. 提示：按定义证明.

13. 提示：借助于极大线性无关组证明.

14. (1) $a=-1,b\neq 0$；(2) $a\neq -1$；(3) $a=-1,b=0$.

15. 提示：(1) 5 个四维向量构成的向量组一定线性相关；(2)借助于(1)的结果.

16. $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})=r+1$.

17. (1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3$；(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组,且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\frac{5}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_4$$

18. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组,该向量组的秩为 2,且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2.$$

19. (1) 当 $a\neq 1,a\neq -2$ 时,$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$；(2) 当 $a=1$ 时,$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$；(3) 当 $a=-2$ 时,$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$.

20. $\mathrm{R}(\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{A})=2$.

21. $a-b\neq 0$ 且 $a+2b=0$.

22. 提示：利用矩阵乘积的秩的性质 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\}$.

23. $a\neq -1$，Ⅰ和Ⅱ等价；$a=-1$ 时，Ⅰ和Ⅱ不等价.

B 类

一、填空题

1. -1；2. $abc\neq 0$；3. 3；4. -1；5. $\dfrac{1}{2}$.

二、单项选择题

1. B；2. D；3. A；4. C；5. B；6. C；7. C；8. A；9. A；10. A；11. A；12. C.

三、计算或证明下列各题

1.（1）当 $km\neq 1$ 时，向量组线性无关；（2）当 $km=1$ 时，向量组线性相关.

2. 提示：利用极大线性无关组.

3.（1）$a\neq 2$，$\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{3a-4}{a-2}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\dfrac{1-a}{a-2}\boldsymbol{\alpha}_4$；（2）$a=2$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组.

4. $a=0$ 或 $a=-10$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；$a=0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$；$a=-10$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

5. $a=1$，$b=2$；$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=1$.

6. 提示：充分性借助于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant\min\{\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}),\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta})\}=1$ 和 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 证之.

必要性可令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，由 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$ 知，取 $\boldsymbol{A}$ 的一个非零列向量作为 $\boldsymbol{\alpha}$，则有 $\boldsymbol{A}=(b_1\boldsymbol{\alpha},b_2\boldsymbol{\alpha},\cdots,b_n\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.

7. 提示：（1）根据矩阵和的秩的性质和上题的结论；（2）如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}=c\boldsymbol{\alpha}$.

8. 提示：令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{O}$，即 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$，或 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$. 两边同乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即得 $\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$.

9. $a=1$. 提示：利用 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$.

习 题 四

A 类

1. (1) $\boldsymbol{\xi}_1=(0,2,1,0)^{\mathrm{T}}$; (2) $\boldsymbol{\xi}_1=(-2,1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,-3,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(2,1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

2. (1) $\boldsymbol{x}=c_1(1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}+c_2(6,0,-4,-3,1)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{x}=c_1(-5/14,3/14,1,0)^{\mathrm{T}}+c_2(1/2,-1/2,0,1)^{\mathrm{T}}$.

3. $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$ 时，方程组有非零解；$\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，方程组仅有零解.

4. $a=-2,x_1=c,x_2=c,x_3=0$; $a=3,x_1=-\dfrac{3}{5}c,x_2=\dfrac{2}{5}c,x_3=c$.

5. (1) (Ⅰ)的基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$;

(2) (Ⅰ),(Ⅱ)的全部公共解为 $c(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$,(c 为任意实数).

6. (1) $\boldsymbol{x}=(3,0,1,0)^{\mathrm{T}}+c_1(-2,1,0,0)^{\mathrm{T}}+c_2(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{x}=(-2,3,0,0,0)^{\mathrm{T}}+c_1(1,-2,1,0,0)^{\mathrm{T}}+c_2(1,-2,0,1,0)^{\mathrm{T}}+c_3(5,-6,0,0,1)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\boldsymbol{x}=(-1,0,-1,0,0)^{\mathrm{T}}+c_1(-2,4,4,1,0)^{\mathrm{T}}+c_2(1,-2,-2,0,1)^{\mathrm{T}},c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

7. $a=-4,x_1=\dfrac{12}{7}+2c,x_2=c,x_3=-\dfrac{9}{7},x_4=1$.

8. (1) 提示：根据方程组有解的充分必要条件证明；

(2) $x_1=a_1+a_2+a_3+a_4+c,x_2=a_2+a_3+a_4+c,x_3=a_3+a_4+c,x_4=a_4+c,x_5=c$.

9. 当 $a\neq2$ 时，方程组有无穷多解. 通解为 $\boldsymbol{x}=((7a-10)/a-2,(2-2a)/a-2,1/a-2,0)^{\mathrm{T}}+c(-3,0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$c$ 为任意常数；当 $a=2$ 时，方程组无解.

10. (1) $\boldsymbol{\alpha}_1=3\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$; (2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

11. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$c$ 为任意常数.

12. (1) 提示：非齐次线性方程组有三个线性无关解，则齐次线性方程组有两个线性无关解，则方程组的系数矩阵的秩为 2；

(2) $a=2,b=-3,\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$，$c_1,c_2$ 是任意常数.

13. (1) $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, c_1 为任意常数.

$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1/2\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, c_1,c_2 为任意常数.

(2) 提示 $|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|\neq 0$

14. $t=4$; $\boldsymbol{\beta}=-3c\boldsymbol{\alpha}_1+(4-c)\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3$, c 为任意常数.

B 类

一、填空题

1. $a=2$.
2. $\lambda\neq 1$.
3. $a_1+a_2+a_3+a_4=0$.
4. $a=-1$.
5. $\lambda=-2$.
6. $\boldsymbol{x}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.
7. $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\k_1\boldsymbol{\alpha}_1\\k_2\boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,1)$.

二、单项选择题

1. B; 2. C; 3. A; 4. D; 5. A; 6. B; 7. D; 8. B; 9. D; 10. A; 11. D; 12. C; 13. B; 14. C; 15. D; 16. D.

三、计算题、证明题

1. (1) $\lambda=1$; (2) 提示:$\lambda=1$ 时,$R(\boldsymbol{A})\geqslant 1$,齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系中最多含有两个线性无关的解向量. $\boldsymbol{B}$ 的列向量作为方程组的解一定线性相关.

2. (1) $\lambda\neq 0$,且 $\lambda\neq 1$ 时方程组有唯一解; (2) $\lambda=0$ 时,方程组无解; (3) $\lambda\neq 0$,$\lambda=1$ 时方程组有无穷多个解.

3. 当 $a=0$ 时,方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\eta}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1},k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\text{ 为任意常数}$$

当 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时,方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}=(1,2,\cdots,n)^{\mathrm{T}}$$

方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{\eta}, \quad k \text{ 为任意常数}$$

4.(1) $a=1,b=3$.

(2) 基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-2,1,0,0)^T, \quad \boldsymbol{\xi}_2=(1,-2,0,1,0)^T, \quad \boldsymbol{\xi}_3=(5,-6,0,0,1)^T$$

(3) 方程组的一个特解

$$\boldsymbol{\eta}_0=(-2,3,0,0,0)^T$$

全部解为

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\eta}_0, k_1,k_2,k_3 \text{ 为任意常数}$$

5. $a\neq1$ 时,方程组有唯一解 $x_1=1+a-a^2,x_2=-1,x_3=a^2$.

$a=1$ 时,方程组的通解为 $x_1=-c,x_2=c,x_3=1$,c 为任意常数.

方程组没有无解的情况.

6.(1) 当 $\lambda\neq-2$,且 $\lambda\neq1$ 时,方程组有唯一解;

(2) 当 $\lambda=-2$ 时,方程组无解;

(3) 当 $\lambda=1$ 时,方程组有无穷多个解. 方程组的全部解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, c_1,c_2 \text{ 是任意常数}$$

7. $a=1$ 时,两方程组有公共解 $\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,$c$ 为任意常数;

$a=2$ 时,两方程组有公共解 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

8. $a=2,b=1,c=2$.

9. 提示:平面上三条不同直线有交点相当于由三直线的方程构成的方程组有解.

10.(1) $\lambda=-1,a=-2$;

(2) $\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$,$c$ 为任意常数.

11.(1) $a=1$;

(2) $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

12. 当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时:方程组的通解为

$$x=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{T}+k(-2,1,-1,2)^{T},\quad k \text{ 为任意常数}$$

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，方程组的通解为

$$x=\left(-\frac{1}{2},1,0,0\right)^{T}+k_1(1,-3,1,0)^{T}+k_2(-1,-2,0,2)^{T},\quad k_1,k_2 \text{ 为任意常数}$$

13. (1) $|A|=1-a^4$；

(2) 当 $a=-1$ 时，对应方程组的通解为

$$x=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

习 题 五

A 类

1. $a=6$.

2. (1) 提示：证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 为线性无关组；(2) $=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}$；

(3) $(17,-4,-3)$.

3. $\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0&1\\1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0\\0&0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}$

4. 提示：对任意的 $\alpha,\beta\in W_1\cap W_2$ 和任意的实数 λ,μ，证明 $\lambda\alpha+\mu\beta\in W_1\cap W_2$.

5. $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

6. $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

7. $\hat{\beta}_1=(0,1,0)^{T}$，$\hat{\beta}_2=(0,0,1)^{T}$，$\hat{\beta}_3=(1,0,0)^{T}$.

8. 提示：利用正交矩阵的定义.

9. 提示：利用正交矩阵的定义.

10. $k=1,\lambda=\dfrac{1}{4}$或 $k=-2,\lambda=1$.

11. (1) $\lambda_1=-1,k_1\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$($k_1$ 是不为零的常数)；

$\lambda_2=6$；$k_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$($k_2$ 是不为零的常数).

(2) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$($k_1,k_2$ 是不全为零的常数)；

(3) $\lambda_1=\lambda_2=1,k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$($k_1,k_2$ 是不全为零的常数)；

$\lambda_3=10,k_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$($k_3$ 是不为零的常数).

(4) $\lambda_1=-1,k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$($k_1$ 是不为零的常数)；

$\lambda_2=1,k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$($k_2$ 是不为零的常数)；

$\lambda_3=3,k_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$($k_3$ 是不为零的常数).

12. (1) $\boldsymbol{B}$ 的特征值为$-2,8,-4,|\boldsymbol{B}|=64$；(2) $|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}|=-72$.

13. (1) $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$；

(2) $(2-2^{n+1}+3^n,2-2^{n+2}+3^{n+1},2-2^{n+3}+3^{n+2})^{\mathrm{T}}$.

14. 提示：取可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}$.

15. $x+y=0$.

16. (1) $x=0,y=1$,(2) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

17. $a=-1,b=-3$,可对角化.

18. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19. (1) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

21. 提示：证明 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似于同一对角矩阵.

22. 相似. 提示：说明 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似于同一对角矩阵.

B 类

一、填空题

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; 2. $a=-2,b=2$; 3. 0; 4. $|\boldsymbol{A}|$,任意 n 维非零列向量;

5. $0,-1,1$; 6. 2; 7. -3; 8. $\boldsymbol{E}$; 9. 0; 10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 11. 1.

二、单项选择题

1. B; 2. D; 3. C; 4. D; 5. D; 6. B; 7. D; 8. A.

三、计算或证明下列各题

1. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}$.

2. $\left(\frac{11}{8},\frac{9}{8},\frac{5}{16},\frac{7}{8}\right)$.

3. 提示：验证$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+2a_2b_2+\cdots+na_nb_n$ 满足内积的所有运算性质.

4. $2\sqrt{2}$.

5. 提示：用特征值和特征向量的定义.

6. (1) 提示：用特征值和特征向量的定义；

(2) 提示：证明$|0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|=0$ 即可.

7. $a=-2$ 或 $a=-\frac{2}{3}$；若 $a=-2$，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化；若 $a=-\frac{2}{3}$，则 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

8. $-\boldsymbol{E}$.

9. 提示：(1) 用特征值和特征向量的定义；(2) 证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=n$.

10. $a=-1,\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$.

11. (1) $y=2$；(2) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}$.

12. (1) $\lambda_1=3,k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$($k$ 是不为零的常数)；$\lambda_2=0,k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$($k_1,k_2$ 是不全为零的常数).

(2) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

13.（1）提示：用线性无关的定义证明；（2）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

习　题　六

A　类

1.（1）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

2. -2.

3.（1）$f=2y_1^2-y_2^2+4y_3^2$；（2）$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2$；

（3）$f=2y_1^2+7y_2^2-4y_3^2-8y_1y_2-8y_1y_3+8y_2y_3$.

4. 提示：利用矩阵合同的定义.

5.（1）$f=3y_2^2+6y_3^2$，$\begin{cases} x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_3 \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}y_2-\frac{2}{\sqrt{6}}y_3 \\ x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_3 \end{cases}$；

（2）$f=9y_3^2$，$\begin{cases} x_1=\frac{2}{\sqrt{5}}y_1-\frac{2}{3\sqrt{5}}y_2+\frac{1}{3}y_3 \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{5}}y_1+\frac{4}{3\sqrt{5}}y_2-\frac{2}{3}y_3 \\ x_3=\frac{5}{3\sqrt{5}}y_2+\frac{2}{3}y_3 \end{cases}$；

（3）$f=y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2-\frac{1}{2}y_3^2$，$\begin{cases} x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2-\frac{1}{\sqrt{6}}y_3 \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2-\frac{1}{\sqrt{6}}y_3 \\ x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{2}{\sqrt{6}}y_3 \end{cases}$.

6. $t=-2$，正交变换矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

7. $f=6y_1^2$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$.

8. $\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2+\frac{1}{2}x_3^2-x_1x_3$.

9. (1) $f=y_1^2+y_2^2$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$；

(2) $f=2z_1^2-2z_2^2-2z_3^2$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{z}$.

10. (1) $f=y_1^2+4y_2^2-7y_3^2$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$；

(2) $f=2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2-2y_3^2$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$.

11. (1) $f=z_1^2+z_2^2$，正惯性指数为 2，秩为 2；

(2) $f=w_1^2-w_2^2-w_3^2$，正惯性指数为 1，秩为 3.

12. (1) 是正定二次型；(2) 不是正定二次型；(3) 不是正定二次型(而是负定二次型).

13. (1) $t>\frac{1}{2}$；(2) $-1<t<2$.

14. 提示：证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零.

15. 提示：利用正定矩阵与单位矩阵合同.

16. 提示：用正定矩阵的定义并利用非零向量 $\boldsymbol{x}$ 满足$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$.

B 类

一、填空题

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$；2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，2；

3. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+8x_1x_3-2x_2x_3$；4. $f=-4y_1^2+4y_2^2+y_3^2$；

5. 1；6. 3，2，1；7. 2；8. $3y_1^2$；9. $f=y_1^2-y_2^2-y_3^2$；10. n；

11. $f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$；12. $k>\dfrac{1}{2}$.

二、单项选择题

1. D；2. B；3. C；4. B；5. B；6. D.

三、计算或证明下列各题

1. 记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

2. (1) $a=1,b=-2$；

(2) $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$.

3. (1) -1；(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$；$f=2y_2^2+6y_3^2$；$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$.

4. (1) $a-2,a,a+1$；(2) $a=2$.

5. (1) 1；(2) $k>0$.

6. 提示：利用 $\boldsymbol{A}$ 必有小于零的特征值.

7. 提示：利用正定矩阵的定义.

参 考 文 献

[1] 陈文灯. 线性代数[M]. 2 版. 北京：中国财政经济出版社，2001.
[2] 吴传生. 经济数学——线性代数[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2009.
[3] 同济大学数学系. 工程数学——线性代数[M]. 5 版. 北京：高等教育出版社，2007.
[4] 陈治中. 线性代数[M]. 北京：科学出版社，2001.
[5] 北京交通大学数学系几何与代数组. 线性代数与解析几何[M]. 北京：北京交通大学出版社，2007.
[6] 李心灿，季文铎，余仁胜，等. 研究生入学考试试题难题解析选编[M]. 北京：机械工业出版社，2005.
[7] Anton H, Rorres C. Elementary Linear Algebra[M]. 9th ed. New York: John Wiley & Sons, 2005.
[8] Lipschutz S, Lipson M L. Schaum's Outline of Theory and Problems of Linear Algebra[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2004.
[9] Strang G. Linear Algebra and Its Applications[M]. 4th ed. Belmont: Thomson Brooks/Cole, 2006.
[10] Axler S. Linear Algebra[M]. 2nd ed. New York: Springer, 1997.